Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. André Frochaux

5. Juni 2023

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2023

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 12. Juni 2023, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

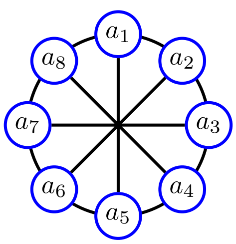
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{a, g, i, k, l, o, r\}$.

(a) Geben Sie die Wortstruktur $\mathcal{A}_w$ für das Wort $w := korollar \in \Sigma^*$ an.

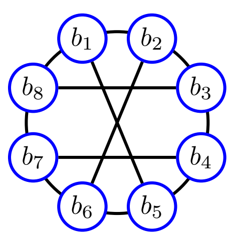
(b) Sei $\mathcal{B}$ die σ_Σ-Struktur mit dem Universum $B := [5]$, in der $\leqslant^\mathcal{B}$ die natürliche lineare Ordnung auf $[5]$ ist und $P_g^\mathcal{B} := \{3\}$, $P_i^\mathcal{B} := \{4\}$, $P_k^\mathcal{B} := \{5\}$, $P_l^\mathcal{B} := \{1\}$, $P_o^\mathcal{B} := \{2\}$ und $P_a^\mathcal{B} = P_r^\mathcal{B} = \emptyset$. Welches Wort $w \in \Sigma^*$ wird durch $\mathcal{B}$ repräsentiert?

Aufgabe 2: (25 Punkte)

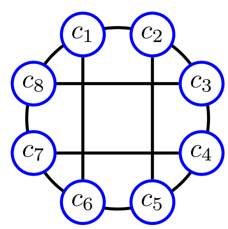
Betrachten Sie die folgenden drei ungerichteten Graphen mit je 8 Knoten.



$\mathcal{A}_1$



$\mathcal{A}_2$



$\mathcal{A}_3$

(a) Geben Sie die $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A}_1 = (A_1, E^{\mathcal{A}_1})$ an, welche den ersten Graphen repräsentiert.

(b) Entscheiden Sie für die drei Paare

- **(i)** $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$
- **(ii)** $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_3$
- **(iii)** $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_3$

jeweils, ob die beiden Strukturen isomorph sind. Falls ja, geben Sie einen Isomorphismus an. Falls nein, begründen Sie, warum die Strukturen nicht isomorph sind.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{f, R, S, c\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f, einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 3-stelligen Relationssymbol S und einem Konstantensymbol c.

Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, S^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{C} := (C, f^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}, S^{\mathcal{C}}, c^{\mathcal{C}})$ wobei

- $A := \{q, r, s, t, u\}$, $R^{\mathcal{A}} := \{(q, q), (r, t), (t, r), (u, q)\}$, $S^{\mathcal{A}} := \{(q, s, q), (u, t, r)\}$, $c^{\mathcal{A}} := s$,
- $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{\mathcal{B}} := \{(5, 5), (4, 1), (2, 5), (1, 4)\}$, $S^{\mathcal{B}} := \{(2, 1, 4), (5, 3, 5)\}$, $c^{\mathcal{B}} := 3$,
- $C := \{v, w, x, y, z\}$, $R^{\mathcal{C}} := \{(w, y), (v, v), (y, w), (z, v)\}$, $S^{\mathcal{C}} := \{(v, z, v), (z, y, w)\}$, $c^{\mathcal{C}} := x$

und die Funktionen $f^{\mathcal{A}} \colon A \to A$, $f^{\mathcal{B}} \colon B \to B$ und $f^{\mathcal{C}} \colon C \to C$ definiert sind durch

$a \in A$	q	r	s	t	u
$f^{\mathcal{A}}(a)$	t	s	t	u	q

$a \in B$	1	2	3	4	5
$f^{\mathcal{B}}(a)$	2	5	1	3	1

$a \in C$	v	w	x	y	z
$f^{\mathcal{C}}(a)$	y	x	y	z	v

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und begründen Sie, warum es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Der örtliche *Toobi-Baumarkt* hat einen neuen Automaten entwickelt, um der Kundschaft Farben zu empfehlen und über den Vorrat der Farben im Baumarkt zu informieren. Dazu geben die Kunden zwei Farben aus einer Auswahl von sechs Farben in den Automaten ein und erhalten eine der sechs Farben als Ergebnis. Die sechs Farben ergeben das Universum $A := \{\text{Violett, Blau, Grün, Gelb, Orange, Rot}\}$.

Wir betrachten die σ-Struktur $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$ mit $c^{\mathcal{A}} :=$ Violett und $R^{\mathcal{A}} = \{\text{Blau}\}$; die Funktion $f^{\mathcal{A}}$ soll die Funktionsweise des Farbempfehlungsautomaten beschreiben: Der Wert $f^{\mathcal{A}}(x, y)$ für $x, y \in A$ findet sich in Zeile x und Spalte y der folgenden Tabelle.

$f^{\mathcal{A}}$	Violett	Blau	Grün	Gelb	Orange	Rot
Violett	Gelb	Rot	Orange	Violett	Grün	Blau
Blau	Rot	Orange	Gelb	Grün	Violett	Violett
Grün	Orange	Gelb	Rot	Blau	Violett	Violett
Gelb	Violett	Grün	Blau	Violett	Rot	Orange
Orange	Grün	Violett	Violett	Rot	Blau	Gelb
Rot	Blau	Violett	Violett	Orange	Gelb	Grün

Dabei beschreibt $f^{\mathcal{A}}(x, y)$ die Farbempfehlung bei Eingabe der Farben x und y, und die Relation $R^{\mathcal{A}}$ beschreibt die vorrätigen Farben.

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta \colon \mathsf{VAR} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = \text{Rot}, \quad \beta(v_1) = \text{Gelb}, \quad \beta(v_2) = \text{Blau}, \quad \text{und} \quad \beta(v_i) = \text{Orange} \quad \text{für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$ und $[\![t_3]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden σ-Terme, die Eingaben der Toobi-Kundschaft repräsentieren:

(i) $t_1 := f(v_{73}, c)$ **(ii)** $t_2 := f(f(v_{42}, v_0), f(v_1, c))$ **(iii)** $t_3 := f(f(f(v_2, v_5), f(v_3, c)), v_9)$

Geben Sie bei der Berechnung von $[\![t_i]\!]^{\mathcal{I}}$ mit $i \in [3]$ mindestens $i + 1$ Zwischenschritte an.