Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. André Frochaux

15. Mai 2023

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2023

Übungsblatt 4

Abgabe: *bis 22. Mai 2023, 10.^{00} Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: **(50 Punkte)**

Im Folgenden betrachten wir einen *Baum* $\mathcal{B}$ mit der *abzählbar unendlichen Knotenmenge* $V := \mathbb{N}$. Die Wurzel von $\mathcal{B}$ ist dabei der Knoten $w := 0$. Die Kanten von $\mathcal{B}$ repräsentieren wir durch eine Funktion *Kinder*, die jedem Knoten $v \in V$ die Menge $\mathit{Kinder}(v)$ all seiner Kinder zuordnet. Wir nehmen an, dass $\mathcal{B}$ *endlich verzweigend* ist. Damit meinen wir, dass für jeden Knoten $v \in V$ die Menge $\mathit{Kinder}(v)$ endlich ist.

(a) Ein *Pfad* in $\mathcal{B}$ ist eine (endliche oder unendliche) Folge $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ von Knoten aus V, so dass gilt: $v_0 = w$ ist die Wurzel von $\mathcal{B}$, und für alle v_i, v_{i+1} auf dem Pfad ist $v_{i+1} \in \mathit{Kinder}(v_i)$. Eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ *repräsentiert einen Pfad* $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots)$, falls für jedes $v \in V$ und das zugehörige Aussagensymbol $A_v \in \mathsf{AS}$ gilt:

$$\mathcal{I}(A_v) = 1 \quad\iff\quad v \in \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}.$$

Das Aussagensymbol A_v repräsentiert also die Aussage *„Der Knoten v gehört zum Pfad P"*. Geben Sie eine unendliche Formelmenge Φ an, so dass für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \quad\iff\quad \mathcal{I} \text{ repräsentiert einen Pfad unendlicher Länge in } \mathcal{B}.$$

(b) Ein endlicher Pfad $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ hat die Länge n. Wir sagen, dass der Baum $\mathcal{B}$ *Pfade beliebiger endlicher Länge* enthält, wenn $\mathcal{B}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Pfad der Länge n enthält.

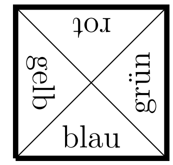
Beweisen Sie mit Hilfe des *Endlichkeitssatzes* das folgende Lemma von Dénes Kőnig (1936):

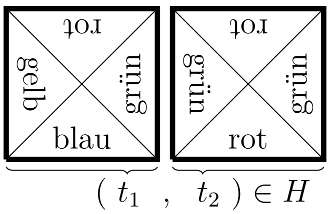
Kőnigs Lemma. *Wenn $\mathcal{B}$ Pfade beliebiger endlicher Länge enthält, dann enthält $\mathcal{B}$ einen Pfad unendlicher Länge.*

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 2: **(50 Punkte)**

Eine Kachel ist ein Einheitsquadrat mit gefärbten Kanten (vgl. Beispielabbildung rechts). Alle Kacheln eines Kacheltyps t besitzen dieselbe Färbung ihrer Kanten. Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen. Seien H und V zwei Relationen auf K, die für zwei Kacheltypen t_1, t_2 besagen, dass t_1 und t_2 in dieser Reihenfolge horizontal bzw. vertikal zueinander passen, also die sich berührenden Kanten von derselben Farbe sind.





D.h. für $t_1, t_2 \in K$ gilt:

$(t_1, t_2) \in H$ genau dann, wenn t_2 rechts neben t_1 passt

und analog

$(t_1, t_2) \in V$ genau dann, wenn t_2 über t_1 passt.

Eine (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene (für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) ist eine Funktion $k : \{1, \ldots, n\}^2 \to K$, die H und V respektiert, d.h. für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Eine (K, H, V)-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene ist eine Funktion $k : \mathbb{N}_{\geq 1}^2 \to K$, die H und V respektiert, d.h. für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Benutzen Sie für die Lösung der Aufgabe Aussagensymbole der Form $A^t_{i,j}$ für $t \in K, i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit der Bedeutung, dass Feld (i, j) mit einer Kachel vom Typ t gekachelt wird.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Konstruieren Sie eine endliche Menge Γ_n von aussagenlogischen Formeln, so dass gilt:

> Jedes Modell $\mathcal{I}$ von Γ_n entspricht einer (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene und jede (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene entspricht einem Modell $\mathcal{I}$ von Γ_n.
> Begründen Sie die Wahl Ihrer Formelmenge Γ_n.

(b) Zeigen Sie das folgende Theorem:

> Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen und seien H und V zwei 2-stellige Relationen auf K (d.h. $H, V \subseteq K \times K$). Wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine (K, H, V)-Kachelung der $n \times n$-Ebene gibt, dann gibt es auch eine (K, H, V)-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene.