

# Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2023

## Übungsblatt 3

**Abgabe:** bis 15. Mai 2023, 10.00 Uhr über Moodle

### Aufgabe 1:

(30 Punkte)

Finden Sie für jede der Mengen

- (a)  $\tau_1 := \{\vee, \mathbf{1}\}$  und
- (b)  $\tau_2 := \{\neg, \rightarrow\}$

heraus, ob sie adäquat ist (siehe Definition 2.33). Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

### Aufgabe 2:

(20 Punkte)

Betrachten Sie die Formel

$$\varphi := (A_3 \wedge ((\neg A_2 \rightarrow (\neg A_0 \wedge A_1)) \vee A_4))$$

- (a) Wandeln Sie die Formel  $\varphi$  jeweils in eine äquivalente Formel  $\varphi_{\text{DNF}}$  in DNF und  $\varphi_{\text{KNF}}$  in KNF um. Gehen Sie dazu analog zu Beispiel 2.43 vor, das heißt erzeugen Sie  $\varphi_{\text{DNF}}$  und  $\varphi_{\text{KNF}}$  aus  $\varphi$  mittels Äquivalenzumformungen.
- (b) Beschreiben Sie Schritt für Schritt, wie Sie vorgehen *würden*, um  $\varphi$  unter Verwendung einer Wahrheitstafel jeweils in eine äquivalente Formel  $\varphi'_{\text{DNF}}$  in DNF und  $\varphi'_{\text{KNF}}$  in KNF umzuwandeln. Warum wäre dieses Verfahren für das konkrete  $\varphi$  nicht ratsam?

### Aufgabe 3:

(50 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$  und sei  $\varphi_n$  die in Satz 2.45 der Vorlesung betrachtete aussagenlogische Formel.

- (a) Bestimmen Sie alle Interpretationen  $\mathcal{I}$ , für die gilt:
  - $\mathcal{I}$  erfüllt  $\varphi_n$  und
  - für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  existiert eine Interpretation, die sich von  $\mathcal{I}$  nur dadurch unterscheidet, dass sie *genau* eines der beiden Aussagensymbole  $X_i, Y_i$  auf einen anderen Wahrheitswert abbildet als  $\mathcal{I}$ , und die  $\varphi_n$  *nicht* erfüllt.
- (b) Beweisen Sie Satz 2.45 aus der Vorlesung. *Zur Erinnerung:*

**Satz 2.45.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$ , seien  $X_1, \dots, X_n$  und  $Y_1, \dots, Y_n$  genau  $2n$  verschiedene Aussagensymbole und sei

$$\varphi_n := \bigwedge_{i=1}^n (X_i \vee \neg Y_i).$$

Jede zu  $\varphi_n$  äquivalente Formel in DNF hat mindestens  $2^n$  konjunktive Klauseln.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

- (c) Gibt es für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$  DNF-Formeln  $\varphi'_n$  der Länge  $\mathcal{O}(n)$ , so dass jede zu  $\varphi'_n$  äquivalente KNF-Formel mindestens  $2^n$  disjunktive Klauseln hat? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.