Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. André Frochaux

1. Mai 2023

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2023

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 8. Mai 2023, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: (35 Punkte)

(a) Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils die dualen Formeln an:

(i) A_{23}

(ii) $((\mathbf{1} \vee \mathbf{0}) \wedge \neg A_1)$

(iii) $\neg(\mathbf{1} \vee A_2) \wedge ((\neg\mathbf{0} \wedge A_5) \wedge (A_3 \wedge \neg((A_3 \wedge \neg\mathbf{1}) \wedge \neg A_4)))$

(b) Beweisen Sie, dass für alle Formeln $\varphi \in \mathsf{AL}$, in denen keine Implikation vorkommt, gilt:

Wenn $\widetilde{\varphi}$ nicht allgemeingültig ist, dann ist φ erfüllbar.

(c) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktor an. D.h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktor $\tilde{\rightarrow}$, so dass für alle $X, Y \in \mathsf{AS}$ und alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$[\![X \tilde{\rightarrow} Y]\!]^{\mathcal{I}} \quad = \quad 1 - [\![X \rightarrow Y]\!]^{\tilde{\mathcal{I}}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.27) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: (30 Punkte)

(a) Finden Sie für die folgenden Formeln heraus, ob $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ bzw. $\varphi_3 \equiv \varphi_4$ gilt.

$$\varphi_1 := (\neg A_0 \vee \neg A_1) \qquad \varphi_3 := \big(A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_2)\big)$$
$$\varphi_2 := \big((A_0 \wedge A_1) \rightarrow \neg(A_0 \vee A_2)\big) \qquad \varphi_4 := \big(\neg(A_0 \rightarrow A_1) \wedge (\neg A_2 \vee A_0)\big)$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Ist die folgende Behauptung korrekt?

Seien I und J beliebige endliche, nicht-leere Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Dann gilt

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \quad \equiv \quad \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 3: **(35 Punkte)**

Beweisen Sie das Koinzidenzlemma der Aussagenlogik. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Geben Sie die rekursive Definition einer Funktion $\mathrm{as} : \mathsf{AL} \to \mathcal{P}(\mathsf{AS})$ an, so dass für jedes $\varphi \in \mathsf{AL}$ gilt: $\mathrm{as}(\varphi)$ ist genau die Menge aller Aussagensymbole, die in φ vorkommen.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes $\varphi \in \mathsf{AL}$ gilt:

Für alle Interpretationen $\mathcal{I}_1 : \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ und $\mathcal{I}_2 : \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ mit $\mathcal{I}_1(X) = \mathcal{I}_2(X)$ für alle $X \in \mathrm{as}(\varphi)$ gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.