Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. André Frochaux

24. April 2023

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2023

Übungsblatt 1

Abgabe: *bis 1. Mai 2023, 10.^{00} Uhr über Moodle*

*Notieren Sie bitte ganz oben auf Ihrer Abgabe die Daten **aller** Personen Ihrer Kleingruppe. So könnte der Kopf Ihrer Abgabe aussehen:*

Blatt Nr. X	*Max Mustermann,*	*Matr.Nr. 0101010*
	Sabine Musterfrau	*Matr.Nr. 1001001*

*Jede Person erhält nur Punkte für diejenigen Abgaben, auf denen ihr Name angegeben ist. Sich in die Abgabegruppe in Moodle einzutragen ist **nicht** ausreichend.*

Aufgabe 1: (50 Punkte)

Arthur hat eine weite Reise vor sich und wird wohl auch nicht wiederkommen. Nach dem ganzen Bier bleibt kaum noch Zeit zum Packen. Da wären die frisch gekauften Erdnüsse (28p plus £4.72 Trinkgeld), ein Handtuch, die Zahnbürste und eine Badehose. Alles wird er so schnell nicht finden können zwischen all den Trümmern. Aber *ohne Panik* liest Ford die Regeln aus einem Buch vor:

Regel 1: Wer eine Badhose oder eine Zahnbürste mitnimmt, braucht auf jeden Fall auch ein Handtuch und Erdnüsse.

Regel 2: Wer keine Zahnbürste mitnimmt, lässt gleich die Badehose zu Hause, nimmt zumindest aber die Erdnüsse mit.

Regel 3: Weder kann man gleichzeitig Erdnüsse und Zahnbürste noch kann man gleichzeitig Handtuch und Badehose mitnehmen.

Jetzt kann nur noch die Aussagenlogik helfen!

(a) Übersetzen Sie jede der drei Regeln 1, 2 und 3 in aussagenlogische Formeln φ_1, φ_2 und φ_3, welche den jeweiligen Sachverhalt widerspiegeln. Benutzen Sie dazu die Aussagensymbole B, E, H und Z mit der Bedeutung, dass die **B**adehose, die **E**rdnüsse, das **H**andtuch bzw. die **Z**ahnbürste mitgenommen wird.

(b) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel φ auf, die ausschließlich die Aussagensymbole B, E, H und Z benutzt und die widerspiegelt, dass die Regeln (1)-(3) gleichzeitig erfüllt sein müssen.

(c) Stellen Sie eine Wahrheitstafel für die Formel φ auf.

(d) Travel light! Arthur fühlt sich nicht wohl mit überbordendem Gepäck.
Geben Sie eine erfüllende Interpretation für Ihre Formel φ an, bei der die Anzahl der mit wahr interpretierten Aussagensymbole minimal ist. Zeigen Sie, dass Ihre Lösung korrekt ist.

(e) Ford besteht darauf: Das Handtuch kommt mit! Gibt es eine erfüllende Interpretation $\mathcal{I}$ für Ihre Formel φ mit $\mathcal{I}(H) = 1$? Wenn ja, geben Sie diese an!

Aufgabe 2: (50 Punkte)

(a) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel ein Modell an und für jede nicht allgemeingültige Formel eine Interpretation, die die Formel nicht erfüllt.

(i) $\varphi_1 := (A_1 \wedge \mathbf{0})$

(ii) $\varphi_2 := \big((A_0 \vee A_1) \rightarrow (A_0 \wedge A_1)\big)$

(iii) $\varphi_3 := \big(\neg(A_0 \rightarrow \neg A_1) \rightarrow A_1\big)$

(iv) $\varphi_4 := \big((A_0 \wedge A_1) \rightarrow \neg(A_0 \vee A_1)\big)$

(b) Seien φ_1, φ_2 und φ_3 wie in Aufgabenteil **(a)** definiert und sei $\Phi := \{\varphi_1, \varphi_2\}$. Gilt nun, dass $\Phi \models \varphi_3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Beweisen Sie, dass für alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \models (\varphi \rightarrow \psi)$$

(d) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Zweierpotenz*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 2^m$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n := \begin{cases} (A_n \leftrightarrow A_{2\cdot n}), & \text{falls } n \text{ eine Zweierpotenz ist} \\ (A_n \leftrightarrow \neg A_{2^n}), & \text{falls } n \text{ keine Zweierpotenz ist} \end{cases}$$

und $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Es ist also beispielsweise $\varphi_0 = (A_0 \leftrightarrow \neg A_1)$, $\varphi_1 = (A_1 \leftrightarrow A_2)$, $\varphi_2 = (A_2 \leftrightarrow A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_8)$, $\varphi_4 = (A_4 \leftrightarrow A_8)$ und $\varphi_5 = (A_5 \leftrightarrow \neg A_{32})$.

Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \rightarrow \{0,1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und beweisen Sie, dass $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.