



Vorlesung

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester

Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Lehrstuhl Logik in der Informatik

Institut für Informatik

Humboldt-Universität zu Berlin

Kapitel 1:
Einleitung

Abschnitt 1.1:

Von der Bibel bis zu den Simpsons

Logik

- altgriechisch „logos“: Vernunft
- die Lehre des vernünftigen Schlussfolgerns
- Teilgebiet u.a. der Disziplinen Philosophie, Mathematik, Informatik und Linguistik

- zentrale Frage:

Wie kann man Aussagen miteinander verknüpfen, und auf welche Weise kann man formal Schlüsse ziehen und Beweise durchführen?

Das Lügnerparadoxon von Epimenides

Brief des Paulus an Titus 1:12-13:

*Es hat einer von ihnen gesagt, ihr eigener Prophet:
Die Kreter sind immer Lügner, böse Tiere und faule Bäume.*

Angenommen, die Aussage des Propheten ist wahr.

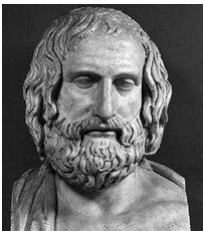
Da der Prophet selbst Kreter ist, lügt er also immer (und ist ein böses Tier und ein fauler Bauch). Dann hat er aber insbesondere in dem Satz „*Die Kreter sind immer Lügner, böse Tiere und faule Bäume*“ gelogen. D.h. die Aussage des Propheten ist *nicht* wahr. Dies ist ein Widerspruch!

Angenommen, die Aussage des Propheten ist falsch.

Dann gibt es Kreter, die nicht immer Lügner, böse Tiere und faule Bäume sind. Dies stellt keinen Widerspruch dar.

Insgesamt wissen wir also, dass der Prophet in seiner obigen Aussage nicht die Wahrheit gesagt hat.

Protagoras und sein Student Euthalus vor Gericht



Protagoras (490 – 420 v.Chr.)

Quelle: <http://www.greatthoughtstreasury.com/author/protagoras>

Euthalus studierte die Kunst der Argumentation beim Meister Protagoras, um Anwalt zu werden.

Er vereinbart mit Protagoras, die Gebühren für den Unterricht zu bezahlen, sobald er seinen ersten Prozess gewonnen hat.

Aber dann zögert Euthalus seine Anwaltstätigkeit immer weiter hinaus, und schließlich beschließt Protagoras, seine Gebühren einzuklagen. Euthalus verteidigt sich selbst . . .

Protagoras denkt:

Wenn ich den Prozess gewinne, muss Euthalus gemäß Gerichtsbeschluss zahlen.

Wenn ich den Prozess verliere, muss Euthalus gemäß unserer Vereinbarung zahlen, da er dann seinen ersten Prozess gewonnen hat.

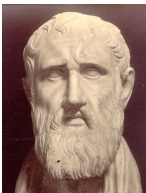
Euthalus denkt:

Wenn ich den Prozess gewinne, muss ich gemäß Gerichtsbeschluss nicht zahlen.

Wenn ich den Prozess verliere, muss ich gemäß unserer Vereinbarung nicht zahlen.

Achilles und die Schildkröte

Achilles und die Schildkröte laufen ein Wettrennen. Achilles gewährt der Schildkröte einen Vorsprung. Zenon behauptet, dass Achilles die Schildkröte niemals einholen kann.



Zenon von Elea (490 – 425 v.Chr.) *Quelle:*

<http://aefucr.blogspot.de/2008/04/resolucin-de-la-paradoja-de-zenn-de.html>

Zenons Begründung: Zu dem Zeitpunkt, an dem Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht, ist die Schildkröte schon ein Stück weiter. Etwas später erreicht Achilles diesen Punkt, aber die Schildkröte ist schon etwas weiter. Wenn Achilles diesen Punkt erreicht, ist die Schildkröte wieder etwas weiter. So kann Achilles zwar immer näher an die Schildkröte herankommen, sie aber niemals einholen.

Auflösung durch die Infinitesimalrechnung:



Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716)
und Isaac Newton (1643 – 1727)

Quelle: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Leibniz.html>

und Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

Der Barbier von Sonnenthal

Im Städtchen Sonnenthal (in dem bekanntlich viele seltsame Dinge passieren) wohnt ein Barbier, der genau diejenigen männlichen Einwohner von Sonnenthal rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Frage: Rasiert der Barbier sich selbst?

Angenommen, der Barbier rasiert sich selbst.

Da er ein männlicher Einwohner von Sonnenthal ist, der sich selbst rasiert, wird er *nicht* vom Barbier rasiert. Aber er selbst ist der Barbier. Dies ist ein Widerspruch!

Angenommen, der Barbier rasiert sich nicht selbst.

Da er in Sonnenthal wohnt und dort alle Einwohner rasiert, die sich nicht selbst rasieren, muss er sich rasieren. Dies ist ein Widerspruch!

Die Anfänge der formalen Logik

Aristoteles' Syllogismen

Die folgende Schlussweise ist **aus rein formalen Gründen** korrekt.

<p>Annahme 1: <u>Alle</u> Menschen <u>sind</u> sterblich. Annahme 2: Sokrates <u>ist ein</u> Mensch. Folgerung: <u>Also ist</u> Sokrates sterblich.</p>

Diese Art von Schluss und eine Reihe verwandter Schlussweisen nennt man **Syllogismen**.

<p>Annahme 1: <u>Alle</u> A <u>sind</u> B. Annahme 2: C <u>ist ein</u> A. Folgerung: <u>Also ist</u> C B.</p>

Beispiele

Annahme 1: Alle Borg sind assimiliert worden.

Annahme 2: Seven of Nine ist eine Borg.

Folgerung: Also ist Seven of Nine assimiliert worden.

Annahme 1: Alle Substitutionschiffren sind
anfällig gegen Brute-Force-Angriffe.

Annahme 2: Das Julius-Cäsar-Chiffre ist ein Substitutionschiffre.

Folgerung: Also ist das Julius-Cäsar-Chiffre anfällig
gegen Brute-Force-Angriffe.



Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)

Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Aristoteles>

Ein komplizierterer formaler Schluss

Annahme 1: Es gibt keine Schweine, die fliegen können.

Annahme 2: Alle Schweine sind gefräßige Tiere.

Annahme 3: Es gibt Schweine.

Folgerung: Also gibt es gefräßige Tiere, die nicht fliegen können.

Die Form des Schlusses ist:

Annahme 1: Es gibt keine A, die B (sind).

Annahme 2: Alle A sind C.

Annahme 3: Es gibt A.

Folgerung: Also gibt es C, die nicht B (sind).



Charles Lutwidge Dodgson a.k.a. Lewis Carroll (1838 – 1898)

Quelle: http://en.wikiquote.org/wiki/Lewis_Carroll

“Contrariwise,” continued Tweedledee, “if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn’t, it ain’t. That’s logic.”

aus: *Alice in Wonderland*

Nicht jeder formale Schluss ist korrekt

Annahme 1: Es gibt Vögel, die fliegen können.

Annahme 2: Es gibt keine fliegenden (Tiere),
die Klavier spielen können.

Folgerung: Also gibt es keine Vögel, die Klavier spielen können.

Kein korrekter Schluss, auch wenn in diesem Fall die Folgerung wahr ist.

Der folgende, offensichtlich falsche, Schluss hat dieselbe Form:

Annahme 1: Es gibt Menschen, die stumm sind.

Annahme 2: Es gibt keine stummen (Lebewesen),
die sprechen können.

Folgerung: Also gibt es keine Menschen, die sprechen können.

Aber wie merkt man es?

Man kann einen falschen Schluss entlarven, indem man einen formal gleichen Schluss findet, der klar falsch ist.

Annahme 1: Erbeeren schmecken gut.

Annahme 2: Schlagsahne schmeckt gut.

Folgerung: Also schmecken Erdbeeren mit Schlagsahne gut.

Aber:

Annahme 1: Pizza schmeckt gut.

Annahme 2: Schlagsahne schmeckt gut.

Folgerung: Also schmeckt Pizza mit Schlagsahne gut.

Wasons Auswahlaufgabe (Wason's selection task)

Uns stehen vier Karten der folgenden Art zur Verfügung:

Auf jeder Karte steht auf der Vorderseite eine Ziffer zwischen 0 und 9. Die Rückseite jeder Karte ist komplett rot oder komplett blau.

Wir sehen Folgendes:

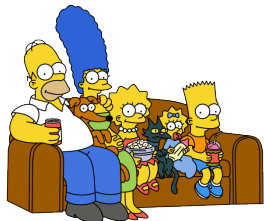


Jemand hat folgende **Hypothese** aufgestellt:

Wenn auf der Vorderseite eine gerade Zahl steht,
dann ist die Rückseite rot.

Welche Karte(n) müssen Sie umdrehen, um zu überprüfen, ob die Hypothese stimmt?

Und was sagen die Simpsons?



Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Simpson_family

Homer: Not a bear in sight. The Bear Patrol must be working like a charm.

Lisa: That's specious reasoning, Dad.

Homer: Thank you, dear.

Lisa: By your logic I could claim that this rock keeps tigers away.

Homer: Oh, how does it work?

Lisa: It doesn't work.

Homer: Uh-huh.

Lisa: It's just a stupid rock.

Homer: Uh-huh.

Lisa: But I don't see any tigers around, do you?

(Pause)

Homer: Lisa, I want to buy your rock.

[Lisa refuses at first, then takes the exchange]

Abschnitt 1.2:

Logik in der Informatik

Die Rolle der Logik in der Informatik

Halpern, Harper, Immerman, Kolaitis, Vardi, Vianu (2001):

Concepts and methods of logic occupy a central place in computer science, inasmuch that logic has been called “the calculus of computer science”.

aus: *On the unusual effectiveness of logic in computer science*, Bulletin of Symbolic Logic 7(2): 213-236 (2001)

Anwendungsbereiche der Logik in der Informatik

- Repräsentation von Wissen (z.B. im Bereich der künstlichen Intelligenz) [siehe Kapitel 2 und 3]
- Grundlage für Datenbank-Anfragesprachen [siehe Kapitel 3]
- Bestandteil von Programmiersprachen (z.B. um Bedingungen in IF-Anweisungen zu formulieren) [siehe Kapitel 2]
- automatische Generierung von Beweisen (so genannte *Theorembeweiser*) [siehe Kapitel 4]
- Verifikation von
 - Schaltkreisen (*Ziel*: beweise, dass ein Schaltkreis bzw. Chip „richtig“ funktioniert)
 - Programmen (*Ziel*: beweise, dass ein Programm gewisse wünschenswerte Eigenschaften hat)
 - Protokollen (*Ziel*: beweise, dass die Kommunikation zwischen zwei „Agenten“, die nach einem gewissen Protokoll abläuft, „sicher“ ist — etwa gegen Abhören oder Manipulation durch dritte; Anwendungsbeispiel: Internet-Banking)
- Logik-Programmierung [siehe folgende Folien]

Kurze Einführung in die Logik-Programmierung

„Was“ statt „Wie“ am Beispiel von Tiramisu

Tiramisu — Deklarativ

Aus Eigelb, Mascarpone und in Likör und Kaffee getränkten Biskuits hergestellte cremige Süßspeise

(aus: DUDEN, Fremdwörterbuch, 6. Auflage)

Tiramisu — Imperativ

1/4 l Milch mit 2 EL Kakao und 2 EL Zucker aufkochen. 1/4 l starken Kaffee und 4 EL Amaretto dazugeben.

5 Eigelb mit 75 g Zucker weißschaumig rühren, dann 500 g Mascarpone dazumischen.

ca 200 g Löffelbiskuit.

Eine Lage Löffelbiskuit in eine Auflaufform legen, mit der Flüssigkeit tränken und mit der Creme überziehen. Dann wieder Löffelbiskuit darauflegen, mit der restlichen Flüssigkeit tränken und mit der restlichen Creme überziehen.

Über Nacht im Kühlschrank durchziehen lassen und vor dem Servieren mit Kakao bestäuben.

(aus: Gisela Schweikardt, handschriftliche Kochrezepte)

Der große Traum der Informatik

Imperative Vorgehensweise:

Beschreibung, wie das gewünschte Ergebnis erzeugt wird„Wie“

Deklarative Vorgehensweise:

Beschreibung der Eigenschaften des gewünschten Ergebnisses„Was“

Traum der Informatik:

Möglichst wenig „wie“, möglichst viel „was“

D.h.: Automatische Generierung eines Ergebnisses aus seiner Spezifikation

Realität:

Datenbanken: Deklarative Anfragesprache ist Industriestandard (SQL)

Software-Entwicklung: Generierungs-Tools

Programmiersprachen: Logik-Programmierung, insbes. Prolog

ABER: Imperativer Ansatz überwiegt in der Praxis

Logik-Programmierung

- **Logik-Programmierung** bezeichnet die Idee, Logik direkt als Programmiersprache zu verwenden.
- **Logik-Programmierung** (in Sprachen wie **Prolog**) und die verwandte **funktionale Programmierung** (in Sprachen wie **LISP**, **ML**, **Haskell**) sind **deklarativ**, im Gegensatz zur **imperativen Programmierung** (in Sprachen wie **Java**, **C**, **Perl**).
- Die Idee der deklarativen Programmierung besteht darin, dem Computer lediglich sein **Wissen** über das Anwendungsszenario und sein **Ziel** mitzuteilen und dann die Lösung des Problems dem Computer zu überlassen.

Bei der imperativen Programmierung hingegen gibt man dem Computer die einzelnen Schritte zur Lösung des Problems vor.

Prolog

- **Prolog**
 - ist die wichtigste logische Programmiersprache,
 - geht zurück auf Kowalski und Colmerauer (Anfang der 1970er Jahre, Marseilles),
 - steht für (franz.) **Programmation en logique**.
 - Mitte/Ende der 1970er Jahre: effiziente Prolog-Implementierung durch den von Warren (in Edinburgh) entwickelten Prolog-10 Compiler.
- Aus Effizienzgründen werden in Prolog die abstrakten Ideen der logischen Programmierung nicht in Reinform umgesetzt, Prolog hat auch „nichtlogische“ Elemente.
- Prolog ist eine voll entwickelte und mächtige Programmiersprache, die vor allem für **symbolische Berechnungsprobleme** geeignet ist.

Anwendungen

Die wichtigsten Anwendungsgebiete sind die **künstliche Intelligenz** und die **Computerlinguistik**.

Beispiele

Das Interface für natürliche Sprache

- in der **International Space Station** wurde von der NASA
- beim IBM Watson System, das in 2011 die **Jeopardy! Man vs. Machine Challenge** gewonnen hat, wurde

in Prolog implementiert.

Mehr Informationen dazu finden sich z.B. unter

<https://sicstus.sics.se/customers.html> und

<http://www.cs.nmsu.edu/ALP/2011/03/>

[natural-language-processing-with-prolog-in-the-ibm-watson-system/](#)

In der Veranstaltung

Einführung in die formale Logik für IMP

... werden keine Details zur Programmiersprache Prolog oder dem allgemeinen Konzept der Logik-Programmierung behandelt.

Für alle, die sich diese Themen interessehalber im Selbststudium erarbeiten wollen, wird die folgende Literatur empfohlen:

- Kapitel 5 des Vorlesungsskripts [Sch18] und die im Übungsbetrieb der Veranstaltung [Logik in der Informatik](#) behandelten Übungsaufgaben zu den Themen *Prolog* und *Logik-Programmierung*,
- das Buch [Learn Prolog Now!](#) [BBS06], das einen guten Einstieg in die Programmiersprache Prolog bietet und
- das Buch [The Art of PROLOG](#) [SS94], das neben Details zur Programmiersprache Prolog auch eine Einführung in allgemeine Konzepte der Logik-Programmierung gibt.

Abschnitt 1.3:

Lernziele, Semesterausblick und Literatur

Lern- und Qualifikationsziele

Aus der Modulbeschreibung:

Studierende erlangen die Fähigkeit, Sachverhalte in geeigneten formalen Systemen zu formalisieren und die grundlegenden Begriffe und Ergebnisse der mathematischen Logik zu verstehen und anzuwenden.

Und was sagt Goethe dazu?

*Mein teurer Freund, ich rat Euch drum
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn,
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,
Irrlichteliere hin und her.*

Mephistopheles in *Faust*

Semesterüberblick

1. Einleitung

(dieses Kapitel)

2. Aussagenlogik

*Syntax und Semantik, Normalformen, Modellierung,
Resolution, Erfüllbarkeitsalgorithmen*

3. Logik erster Stufe

*Syntax und Semantik, Normalformen, Modellierung,
Nichtausdrückbarkeit*

4. Grundlagen des automatischen Schließens

*Sequenzkalkül, Vollständigkeits- und Endlichkeitssatz,
Grenzen der Berechenbarkeit, automatische Theorembeweiser*

Literaturempfehlungen

Folgende Schriften werden zur Vertiefung des Vorlesungsstoffes empfohlen:

1. dieses Vorlesungsskript zur Veranstaltung
Einführung in die formale Logik für IMP
2. das Lehrbuch [EFT07]
3. die Lehrbücher [Sch00, Bur98, KK06]

Als Ergänzung seien auch folgende Lehrbücher genannt:

- [Ebb03] (Einführung in die Mengenlehre)
- [Lib04, FG98] (Bücher zum Thema Logik und Komplexität)
- [Cam98, vD04, HR04] (weiterführende Literatur im Bereich Logik und automatisches Schließen)

Kapitel 2:
Aussagenlogik

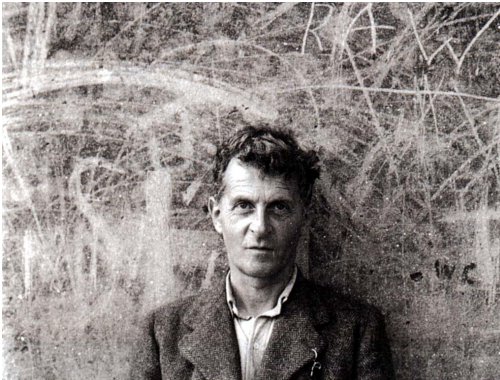
Abschnitt 2.1:

Syntax und Semantik

Aussagen

Die Frage „Was ist eigentlich ein Wort?“ ist analog der „Was ist eine Schachfigur?“
Ludwig Wittgenstein, *Philosophische Untersuchungen*

- **Aussagen** (im Sinne der Aussagenlogik) sind sprachliche Gebilde, die entweder **wahr** oder **falsch** sind.
- Aussagen können mit **Junktoren** wie **nicht**, **und**, **oder** oder **wenn ... dann** zu komplexeren Aussagen verknüpft werden.
- **Aussagenlogik** beschäftigt sich mit allgemeinen Prinzipien des korrekten Argumentierens und Schließens mit Aussagen und Kombinationen von Aussagen.



Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951)

Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Wittgenstein

Beispiel 2.1 (Geburtstagsfeier)

Fred möchte mit möglichst vielen seiner Freunde Anne, Bernd, Christine, Dirk und Eva seinen Geburtstag feiern. Er weiß Folgendes:

Wenn Bernd und Anne beide zur Party kommen, dann wird Eva auf keinen Fall kommen. Und Dirk wird auf keinen Fall kommen, wenn Bernd und Eva beide zur Feier kommen. Aber Eva kommt allenfalls dann, wenn Christine und Dirk kommen. Andererseits kommt Christine nur dann, wenn auch Anne kommt. Anne wiederum wird nur dann kommen, wenn auch Bernd oder Christine dabei sind.

Frage: Wie viele Freunde (und welche) werden im besten Fall zur Party kommen?

Das Wissen, das in dem Text wiedergegeben ist, lässt sich in „atomare Aussagen“ zerlegen, die mit Junktoren verknüpft werden können.

Die atomaren Aussagen, um die sich der Text dreht, kürzen wir folgendermaßen ab:

A : Anne kommt zur Feier

B : Bernd kommt zur Feier

C : Christine kommt zur Feier

D : Dirk kommt zur Feier

E : Eva kommt zur Feier

Das im Text zusammengefasste Wissen lässt sich wie folgt repräsentieren.

- (1) Wenn Bernd und Anne beide zur Party kommen, dann wird Eva auf keinen Fall kommen.
kurz: Wenn $(B$ und $A)$, dann nicht E *kürzer:* $(B \wedge A) \rightarrow \neg E$
- (2) Dirk wird auf keinen Fall kommen, wenn Bernd und Eva beide zur Feier kommen.
kurz: Wenn $(B$ und $E)$, dann nicht D *kürzer:* $(B \wedge E) \rightarrow \neg D$
- (3) Eva kommt allenfalls dann, wenn Christine und Dirk kommen.
kurz: Wenn E , dann $(C$ und $D)$ *kürzer:* $E \rightarrow (C \wedge D)$
- (4) Christine kommt nur dann, wenn auch Anne kommt.
kurz: Wenn C , dann A *kürzer:* $C \rightarrow A$
- (5) Anne kommt nur dann, wenn auch Bernd oder Christine dabei sind.
kurz: Wenn A , dann $(B$ oder $C)$ *kürzer:* $A \rightarrow (B \vee C)$

Fallstricke natürlichsprachlicher Aussagen

Die Verwendung der Wörter **und**, **wenn ... dann**, **oder**, **nicht** in der Alltagssprache entspricht nicht immer exakt unseren logischen Junktoren.

(1) Anne hat mit dem Kaffeetrinken aufgehört.

kurz: V und nicht G

kürzer: $V \wedge \neg G$

(2) Anne hat **nicht** mit dem Kaffeetrinken aufgehört.

kurz: V und G

kürzer: $V \wedge G$

Ist (2) die Negation von (1)? In dem Fall, dass Anne noch nie Kaffee getrunken hat, ist keine der beiden Aussagen wahr.

V : Anne war in der Vergangenheit Kaffeetrinkerin.

G : Anne ist zur Zeit Kaffeetrinkerin.

Zwei weitere Beispiele:

- Ich werde mir ein rotes **oder** ein blaues Fahrrad kaufen.
- **Wenn** Regen vorhergesagt ist, **dann** nehme ich einen Schirm mit.

Syntax und Semantik

Syntax: legt fest, welche Zeichenketten Formeln der Aussagenlogik sind

Semantik: legt fest, welche „Bedeutung“ einzelne Formeln haben

Dies ist analog zur Syntax und Semantik von Java-Programmen:

Die Syntax legt fest, welche Zeichenketten Java-Programme sind, während die Semantik bestimmt, was das Programm tut.

Zur Verdeutlichung werden wir im Folgenden **syntaktische Objekte** oft in **orange** darstellen, während wir **semantische Aussagen** in **blau** angeben.

Syntax der Aussagenlogik

Notationen

- Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen besteht aus allen nicht-negativen ganzen Zahlen, d.h.

$$\mathbb{N} := \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

- Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist

$$[n] := \{1, \dots, n\} = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Definition 2.2

Ein **Aussagensymbol** (oder eine **Aussagenvariable**, kurz: **Variable**) hat die Form A_i für ein $i \in \mathbb{N}$.

Die Menge aller Aussagensymbole bezeichnen wir mit **AS**, d.h.

$$\text{AS} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\} = \{A_0, A_1, A_2, A_3, \dots\}$$

Aussagenlogische Formeln sind Wörter, die über dem folgenden Alphabet gebildet sind.

Definition 2.3

Das **Alphabet der Aussagenlogik** besteht aus

- den Aussagesymbolen in AS,
- den **Junktoren** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$,
- den **booleschen Konstanten** **0, 1**,
- den Klammersymbolen $(,)$.

Wir schreiben A_{AL} , um das Alphabet der Aussagenlogik zu bezeichnen, d.h.

$$A_{AL} := \text{AS} \cup \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}, (,) \}$$

Definition 2.4 (Syntax der Aussagenlogik)

Die Menge **AL** der **aussagenlogischen Formeln** (kurz: **Formeln**) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von A_{AL}^* :

Basisregeln: (zum Bilden der so genannten **atomaren Formeln**)

$$(B0) \mathbf{0} \in AL$$

$$(B1) \mathbf{1} \in AL$$

$$(BS) \text{ Für jedes Aussagensymbol } A_i \in AS \text{ gilt: } A_i \in AL$$

Rekursive Regeln:

$$(R1) \text{ Ist } \varphi \in AL, \text{ so ist auch } \neg\varphi \in AL \text{ (Negation)}$$

$$(R2) \text{ Ist } \varphi \in AL \text{ und } \psi \in AL, \text{ so ist auch}$$

- $(\varphi \wedge \psi) \in AL$ (Konjunktion)

- $(\varphi \vee \psi) \in AL$ (Disjunktion)

- $(\varphi \rightarrow \psi) \in AL$ (Implikation)

Beispiele

- $(\neg A_0 \vee (A_0 \rightarrow A_1)) \in \text{AL}$
- $\neg((A_0 \wedge \mathbf{0}) \rightarrow \neg A_3) \in \text{AL}$
- $A_1 \vee A_2 \wedge A_3 \notin \text{AL}$
- $(\neg A_1) \notin \text{AL}$

Griechische Buchstaben

In der Literatur werden Formeln einer Logik traditionell meistens mit griechischen Buchstaben bezeichnet.

Hier eine Liste der gebräuchlichsten Buchstaben:

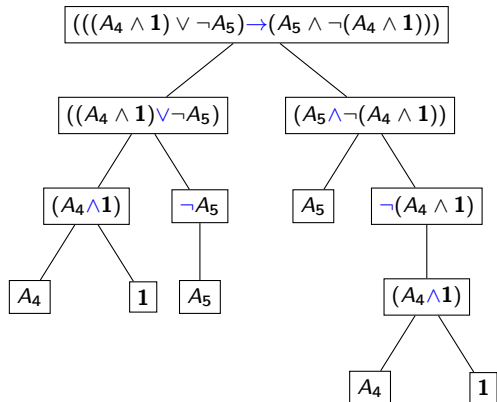
Buchstabe	φ	ψ	χ	θ bzw. ϑ	λ	μ	ν	τ	κ
Aussprache	phi	psi	chi	theta	lambda	mü	nü	tau	kappa
Buchstabe	σ	ρ	ξ	ζ	α	β	γ	δ	ω
Aussprache	sigma	rho	xi	zeta	alpha	beta	gamma	delta	omega
Buchstabe	ε	ι	π	Δ	Γ	Σ	Π	Φ	
Aussprache	epsilon	iota	pi	Delta	Gamma	Sigma	Pi	Phi	

Syntaxbäume

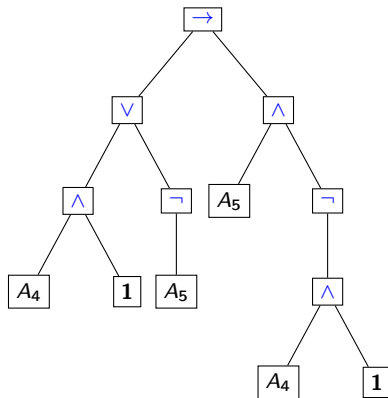
Die Struktur einer Formel lässt sich bequem in einem **Syntaxbaum** (englisch: **parse tree**) darstellen.

Beispiel: Syntaxbaum der Formel $((A_4 \wedge 1) \vee \neg A_5) \rightarrow (A_5 \wedge \neg(A_4 \wedge 1))$

Ausführlich:



Kurzform:



Subformeln und eindeutige Lesbarkeit

- Jede Formel hat genau einen Syntaxbaum. Diese Aussage ist als das **Lemma über die eindeutige Lesbarkeit aussagenlogischer Formeln** bekannt.
- Die Formeln ψ , die im ausführlichen Syntaxbaum einer Formel φ als Knotenbeschriftung vorkommen, nennen wir **Subformeln** (bzw. **Teilformeln**) von φ .
- Eine Subformel ψ von φ kann an mehreren Knoten des Syntaxbaums vorkommen. Wir sprechen dann von verschiedenen **Vorkommen** von ψ in φ .

Semantik der Aussagenlogik

Vorüberlegung zur Semantik

- Eine aussagenlogische Formel wird erst zur Aussage, wenn wir alle in ihr vorkommenden **Aussagensymbole** durch **Aussagen** ersetzen.
- Wir interessieren uns hier nicht so sehr für die tatsächlichen Aussagen, sondern nur für ihren **Wahrheitswert**, also dafür, ob sie wahr oder falsch sind.
- Um das festzustellen, reicht es, den Aussagensymbolen die Wahrheitswerte der durch sie repräsentierten Aussagen zuzuordnen.
- Die Bedeutung einer Formel besteht also aus ihren Wahrheitswerten unter allen möglichen Wahrheitswerten für die in der Formel vorkommenden Aussagensymbole.

Interpretationen (d.h. Variablenbelegungen)

Wir repräsentieren die Wahrheitswerte **wahr** und **falsch** durch **1** und **0**.

Definition 2.5

Eine **aussagenlogische Interpretation** (kurz: **Interpretation** oder **Belegung**) ist eine Abbildung

$$\mathcal{I} : AS \rightarrow \{0, 1\}.$$

D.h.: \mathcal{I} „belegt“ jedes Aussagensymbol $X \in AS$ mit einem der beiden Wahrheitswerte 1 (für „wahr“) oder 0 (für „falsch“); und $\mathcal{I}(X)$ ist der Wahrheitswert, mit dem das Aussagensymbol X belegt wird.

Semantik der Aussagenlogik

Definition 2.6

Zu jeder Formel $\varphi \in \text{AL}$ und jeder Interpretation \mathcal{I} definieren wir einen Wahrheitswert $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}}$ rekursiv wie folgt:

Rekursionsanfang:

- $\llbracket 0 \rrbracket^{\mathcal{I}} := 0$.
- $\llbracket 1 \rrbracket^{\mathcal{I}} := 1$.
- Für alle $X \in \text{AS}$ gilt: $\llbracket X \rrbracket^{\mathcal{I}} := \mathcal{I}(X)$.

Rekursionsschritt:

- Ist $\varphi \in \text{AL}$, so ist $\llbracket \neg\varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Semantik der Aussagenlogik (Fortsetzung)

- Ist $\varphi \in \text{AL}$ und $\psi \in \text{AL}$, so ist

- $$\llbracket (\varphi \wedge \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- $$\llbracket (\varphi \vee \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 0 & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- $$\llbracket (\varphi \rightarrow \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 0 & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Intuitive Bedeutung der Semantik

Boolesche Konstanten: **1** und **0** bedeuten einfach „**wahr**“ und „**falsch**“.

Aussagensymbole: Die Aussagensymbole stehen für irgendwelche Aussagen, von denen uns aber nur der Wahrheitswert interessiert. Dieser wird durch die Interpretation festgelegt.

Negation: $\neg\varphi$ bedeutet „**nicht** φ “.

Konjunktion: $(\varphi \wedge \psi)$ bedeutet „ φ **und** ψ “.

Disjunktion: $(\varphi \vee \psi)$ bedeutet „ φ **oder** ψ “.

Implikation: $(\varphi \rightarrow \psi)$ bedeutet „ φ **impliziert** ψ “ (oder „**wenn** φ **dann** ψ “).

Rekursive Definitionen über Formeln

- Ähnlich wie Funktionen auf den natürlichen Zahlen, wie zum Beispiel die Fakultätsfunktion oder die Fibonacci Folge, können wir Funktionen auf den aussagenlogischen Formeln rekursiv definieren.
- Dabei gehen wir von den atomaren Formeln aus und definieren dann den Funktionswert einer zusammengesetzten Formel aus den Funktionswerten ihrer Bestandteile.
- Zur Rechtfertigung solcher Definitionen benötigt man die eindeutige Lesbarkeit aussagenlogischer Formeln, die besagt, dass sich jede Formel eindeutig in ihre Bestandteile zerlegen lässt.
- Wir haben auf diese Weise die Semantik definiert. Wir haben nämlich für jede Interpretation \mathcal{I} rekursiv eine Funktion $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{I}} : \text{AL} \rightarrow \{0, 1\}$ definiert.

Rekursive Definitionen (Forts.)

Schematisch sieht die rekursive Definition einer Funktion $f : \text{AL} \rightarrow M$ (für eine beliebige Menge M) folgendermaßen aus:

Rekursionsanfang:

- Definiere $f(\mathbf{0})$ und $f(\mathbf{1})$.
- Definiere $f(X)$ für alle $X \in \text{AS}$.

Rekursionsschritt:

- Definiere $f(\neg\varphi)$ aus $f(\varphi)$.
- Definiere $f((\varphi \wedge \psi))$ aus $f(\varphi)$ und $f(\psi)$.
- Definiere $f((\varphi \vee \psi))$ aus $f(\varphi)$ und $f(\psi)$.
- Definiere $f((\varphi \rightarrow \psi))$ aus $f(\varphi)$ und $f(\psi)$.

Beispiel 2.7

Betrachte die Formel $\varphi := (\neg A_0 \vee (A_5 \rightarrow A_1))$

und die Interpretation $\mathcal{I} : AS \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$\mathcal{I}(A_0) = 1, \quad \mathcal{I}(A_1) = 1, \quad \mathcal{I}(A_5) = 0$$

und $\mathcal{I}(Y) = 0$ für alle $Y \in AS \setminus \{A_0, A_1, A_5\}$.

Der Wahrheitswert $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}}$ ist der Wert

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} &\stackrel{\text{Def. 2.6}}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } \llbracket \neg A_0 \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \text{ und } \llbracket (A_5 \rightarrow A_1) \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\ &\stackrel{\text{Def. 2.6}}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } \llbracket A_0 \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } (\llbracket A_5 \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } \llbracket A_1 \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\ &\stackrel{\text{Def. 2.6}}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{I}(A_0) = 1 \text{ und } \mathcal{I}(A_5) = 1 \text{ und } \mathcal{I}(A_1) = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= 1 \quad (\text{denn gemäß obiger Wahl von } \mathcal{I} \text{ gilt } \mathcal{I}(A_5) = 0). \end{aligned}$$

Alternative Art, den Wert $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}}$ zu bestimmen

- Ersetze in φ jedes Aussagensymbol X durch seinen gemäß \mathcal{I} festgelegten Wahrheitswert, d.h. durch den Wert $\mathcal{I}(X)$, und rechne dann den Wert des resultierenden booleschen Ausdrucks aus.
- Speziell für die Formel φ und die Interpretation \mathcal{I} aus Beispiel 2.7 ergibt die Ersetzung der Aussagensymbole durch die gemäß \mathcal{I} festgelegten Wahrheitswerte den booleschen Ausdruck

$$(\neg 1 \vee (0 \rightarrow 1)).$$

- Ausrechnen von $\neg 1$ ergibt den Wert 0 .
Ausrechnen von $(0 \rightarrow 1)$ ergibt den Wert 1 .
- Insgesamt erhalten wir also $(0 \vee 1)$, was sich zum Wert 1 errechnet.
Somit erhalten wir, dass $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$ ist.

Die Modellbeziehung

Definition 2.8

- (a) Eine Interpretation \mathcal{I} **erfüllt** eine Formel $\varphi \in \text{AL}$ (wir schreiben: $\mathcal{I} \models \varphi$), wenn $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$.

Wir schreiben kurz $\mathcal{I} \not\models \varphi$ um auszudrücken, dass \mathcal{I} die Formel φ *nicht* erfüllt (d.h., es gilt $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0$).

- (b) Eine Interpretation \mathcal{I} **erfüllt** eine Formelmenge $\Phi \subseteq \text{AL}$ (wir schreiben: $\mathcal{I} \models \Phi$), wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.
- (c) Ein **Modell** einer Formel φ (bzw. einer Formelmenge Φ) ist eine Interpretation \mathcal{I} mit $\mathcal{I} \models \varphi$ (bzw. $\mathcal{I} \models \Phi$).

Das Koinzidenzlemma

- Offensichtlich hängt der Wert $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}}$ nur von den Werten $\mathcal{I}(X)$ der Aussagensymbole $X \in AS$ ab, die auch in φ vorkommen.

Diese Aussage ist als das **Koinzidenzlemma der Aussagenlogik** bekannt.

- Um $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}}$ festzulegen, reicht es also, die Werte $\mathcal{I}(X)$ nur für diejenigen Aussagensymbole $X \in AS$ anzugeben, die in φ vorkommen.

Vereinbarungen zu Interpretationen

- Statt der vollen Interpretation $\mathcal{I} : AS \rightarrow \{0, 1\}$ geben wir in der Regel nur endlich viele Werte $\mathcal{I}(X_1), \dots, \mathcal{I}(X_n)$ an und legen fest, dass $\mathcal{I}(Y) := 0$ für alle $Y \in AS \setminus \{X_1, \dots, X_n\}$.
- In den Beispielen legen wir eine Interpretation oft durch eine Wertetabelle fest. Beispielsweise beschreibt die Tabelle

X	A_0	A_1	A_5
$\mathcal{I}(X)$	1	1	0

die Interpretation \mathcal{I} mit $\mathcal{I}(A_0) = \mathcal{I}(A_1) = 1$ und $\mathcal{I}(A_5) = 0$ und $\mathcal{I}(Y) = 0$ für alle $Y \in AS \setminus \{A_0, A_1, A_5\}$.

- Wir schreiben $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, um anzudeuten, dass in φ nur Aussagensymbole aus der Menge $\{X_1, \dots, X_n\}$ vorkommen.

Für Wahrheitswerte $b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\}$ schreiben wir dann $\varphi[b_1, \dots, b_n]$ anstatt $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}}$ für eine (bzw. alle) Interpretationen \mathcal{I} mit $\mathcal{I}(X_i) = b_i$ für alle $i \in [n] := \{1, \dots, n\}$.

Vereinbarungen

- Wir schreiben $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ als Abkürzung für $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$.
- Statt mit A_0, A_1, A_2, \dots bezeichnen wir **Aussagensymbole** auch oft mit $A, B, C, \dots, X, Y, Z, \dots$ oder mit Varianten wie X', Y_1, \dots .
- Die äußeren Klammern einer Formel lassen wir manchmal weg und schreiben z.B. $(X \wedge Y) \rightarrow Z$ an Stelle des (formal korrekten) $((X \wedge Y) \rightarrow Z)$.
- Bezüglich Klammerung vereinbaren wir, dass \neg am stärksten bindet, und dass \wedge und \vee stärker binden als \rightarrow .

Wir können also z.B. $X \wedge \neg Y \rightarrow Z \vee X$ schreiben und meinen damit $((X \wedge \neg Y) \rightarrow (Z \vee X))$.

Nicht schreiben können wir z.B. $X \wedge Y \vee Z$ (da wir nichts darüber vereinbart haben, wie fehlende Klammern hier zu setzen sind).

- Wir schreiben $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ bzw. $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ an Stelle von

$$(\dots((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_n)$$

und nutzen analoge Schreibweisen auch für „ \vee “ an Stelle von „ \wedge “.

- Ist M eine **endliche** Menge aussagenlogischer Formeln, so schreiben wir

$$\bigwedge_{\varphi \in M} \varphi$$

um die Formel $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ zu bezeichnen, wobei $n = |M|$ die Anzahl der Formeln in M ist und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ die Auflistung aller Formeln in M in lexicographischer Reihenfolge ist. Formeln sind hierbei Worte über dem Alphabet der Aussagenlogik, wobei die einzelnen Symbole dieses Alphabets folgendermaßen aufsteigend sortiert sind:

$$0, 1, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,), A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$$

Die analoge Schreibweise nutzen wir auch für „ \vee “ an Stelle von „ \wedge “.

- Diese Schreibweisen werden wir manchmal auch kombinieren. Sind zum Beispiel $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ und $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ endliche Mengen und ist für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben, so schreiben wir

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j}$$

um die Formel $(\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge \psi_{i_m})$ zu bezeichnen, wobei für jedes $i \in I$ die Formel ψ_i durch $\psi_i := (\varphi_{i,j_1} \vee \dots \vee \varphi_{i,j_n})$ definiert ist.

Wahrheitstafeln

Für jede Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ kann man die **Wahrheitswerte unter allen möglichen Interpretationen** in einer **Wahrheitstafel** darstellen. Für alle $(b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ enthält die Tafel eine Zeile mit den Werten $b_1 \cdots b_n \mid \varphi[b_1, \dots, b_n]$.

Um die Wahrheitstafel für φ auszufüllen, ist es bequem, auch Spalten für (alle oder einige) Subformeln von φ einzufügen.

Beispiel: Wahrheitstafel für $\varphi(X, Y, Z) := ((X \vee Y) \rightarrow (X \wedge Z))$:

X	Y	Z	$(X \vee Y)$	$(X \wedge Z)$	φ
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Die Reihenfolge der Zeilen ist dabei unerheblich. Wir vereinbaren allerdings, die Zeilen stets so anzuordnen, dass die Werte $b_1 \cdots b_n \in \{0, 1\}^n$, aufgefasst als Binärzahlen, in aufsteigender Reihenfolge aufgelistet werden.

Wahrheitstafeln für die Junktoren

Die Bedeutung der Junktoren kann man mittels ihrer Wahrheitstafeln beschreiben:

X	$\neg X$
0	1
1	0

X	Y	$(X \wedge Y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	Y	$(X \vee Y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

X	Y	$(X \rightarrow Y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Genauso kann man eine Wahrheitstafel für die Formel $X \leftrightarrow Y$, die ja eine Abkürzung für $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ ist, bestimmen:

X	Y	$(X \leftrightarrow Y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$X \leftrightarrow Y$ bedeutet also „ X genau dann wenn Y “.

Ein Logikrätsel

Beispiel 2.9

Auf der Insel Wafa leben zwei Stämme: Die Was, die immer die Wahrheit sagen, und die Fas, die immer lügen. Ein Reisender besucht die Insel und trifft auf drei Einwohner A , B , C , die ihm Folgendes erzählen:

- A sagt:
„ B und C sagen genau dann die Wahrheit, wenn C die Wahrheit sagt.“
- B sagt:
„Wenn A und C die Wahrheit sagen, dann ist es nicht der Fall, dass A die Wahrheit sagt, wenn B und C die Wahrheit sagen.“
- C sagt:
„ B lügt genau dann, wenn A oder B die Wahrheit sagen.“

Frage: Welchen Stämmen gehören A , B und C an?

Aussagenlogische Modellierung

Aussagensymbole:

- W_A steht für „A sagt die Wahrheit.“
- W_B steht für „B sagt die Wahrheit.“
- W_C steht für „C sagt die Wahrheit.“

Aussagen der drei Inselbewohner:

- $\varphi_A := (W_B \wedge W_C) \leftrightarrow W_C$
- $\varphi_B := (W_A \wedge W_C) \rightarrow \neg((W_B \wedge W_C) \rightarrow W_A)$
- $\varphi_C := \neg W_B \leftrightarrow (W_A \vee W_B)$

Wir suchen nach einer Interpretation, die die Formel

$$\psi := (W_A \leftrightarrow \varphi_A) \wedge (W_B \leftrightarrow \varphi_B) \wedge (W_C \leftrightarrow \varphi_C)$$

erfüllt.

Lösung mittels Wahrheitstafel

W_A	W_B	W_C	φ_A	φ_B	φ_C	$W_A \leftrightarrow \varphi_A$	$W_B \leftrightarrow \varphi_B$	$W_C \leftrightarrow \varphi_C$	ψ
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	0	0	0

Die Interpretation \mathcal{I} mit $\mathcal{I}(W_A) = 1$, $\mathcal{I}(W_B) = 1$, $\mathcal{I}(W_C) = 0$ in Zeile 7 ist die einzige, die die Formel ψ erfüllt.

Gemäß dieser Interpretation sind die Aussagen, die durch die Symbole W_A und W_B repräsentiert werden, wahr, während die Aussage, die durch W_C repräsentiert wird, falsch ist.

Das heißt, die Personen A und B sagen die Wahrheit und sind somit Was, und Person C lügt und ist daher ein Fa.

Computerlesbare Darstellung von Formeln

Wir betrachten das Alphabet ASCII aller ASCII-Symbole.

Die Menge AS_{ASCII} aller ASCII-Repräsentationen von Aussagensymbolen besteht aus allen nicht-leeren Worten über dem Alphabet ASCII, deren erstes Symbol ein Buchstabe ist, und bei dem alle weiteren Symbole Buchstaben oder Ziffern sind.

Die Menge AL_{ASCII} aller ASCII-Repräsentationen von aussagenlogischen Formeln ist die rekursiv wie folgt definierte Teilmenge von $ASCII^*$:

Basisregeln:

- $0 \in AL_{ASCII}$, $1 \in AL_{ASCII}$ und $w \in AL_{ASCII}$ für alle $w \in AS_{ASCII}$.

Rekursive Regeln:

- Ist $\varphi \in AL_{ASCII}$, so ist auch $\sim\varphi \in AL_{ASCII}$. (Negation)
- Ist $\varphi \in AL_{ASCII}$ und $\psi \in AL_{ASCII}$, so ist auch
 - $(\varphi \wedge \psi) \in AL_{ASCII}$ (Konjunktion)
 - $(\varphi \vee \psi) \in AL_{ASCII}$ (Disjunktion)
 - $(\varphi \rightarrow \psi) \in AL_{ASCII}$ (Implikation)
 - $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in AL_{ASCII}$ (Biiplikation).

Abstrakte vs. computerlesbare Syntax

Es ist offensichtlich, wie man Formeln aus AL in ihre entsprechende ASCII-Repräsentation übersetzt und umgekehrt. Zum Beispiel ist

$$((A_0 \wedge \mathbf{0}) \rightarrow \neg A_{13})$$

eine Formel in AL, deren ASCII-Repräsentation die folgende Zeichenkette aus AL_{ASCII} ist:

$$((A0 /\ 0) -> \sim A13).$$

Wir werden meistens mit der „abstrakten Syntax“, d.h. mit der in Definition 2.4 festgelegten Menge AL, arbeiten. Um aber Formeln in Computer-Programme einzugeben, können wir die ASCII-Repräsentation verwenden.

Demo: snippets of logic

- ein Formelchecker für die Aussagenlogik
- entwickelt von André Frochoux
- Funktionalitäten u.a.:
 - Syntaxcheck für eingegebene Formeln
 - Ausgabe eines Syntaxbaums
 - Ausgabe einer Wahrheitstafel
- Zugänglich via

http://www.snippets-of-logic.net/index_AL.php?lang=de

Zurück zu Beispiel 2.1 („Geburtstagsfeier“)

Das in Beispiel 2.1 aufgelistete Wissen kann durch folgende aussagenlogische Formel repräsentiert werden:

$$\varphi := ((B \wedge A) \rightarrow \neg E) \wedge ((B \wedge E) \rightarrow \neg D) \wedge \\ (E \rightarrow (C \wedge D)) \wedge (C \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow (B \vee C))$$

Die Frage

„Wie viele (und welche) Freunde werden im besten Fall zur Party kommen?“

kann nun durch Lösen der folgenden Aufgabe beantwortet werden:

Finde eine Interpretation \mathcal{I} für φ , so dass gilt:

- $\mathcal{I} \models \varphi$ (d.h., \mathcal{I} ist ein **Modell** von φ) und
- $|\{X \in \{A, B, C, D, E\} : \mathcal{I}(X) = 1\}|$ ist so groß wie möglich.

Diese Frage können wir lösen, indem wir

- (1) die Wahrheitstafel für φ ermitteln,
- (2) alle Zeilen raussuchen, in denen in der mit „ φ “ beschrifteten Spalte der Wert 1 steht (das liefert uns genau die Modelle von φ) und
- (3) aus diesen Zeilen all jene raussuchen, bei denen in den mit A, B, C, D, E beschrifteten Spalten möglichst viele Einsen stehen. Jede dieser Zeilen repräsentiert dann eine größtmögliche Konstellation von gleichzeitigen Partybesuchern.

Prinzipiell führt diese Vorgehensweise zum Ziel.

Leider ist das Verfahren aber recht aufwändig, da die Wahrheitstafel, die man dabei aufstellen muss, sehr groß wird: Sie hat $2^5 = 32$ Zeilen.

A	B	C	D	E	$E \rightarrow (C \wedge D)$	$C \rightarrow A$	$(B \wedge E) \rightarrow \neg D$	$A \rightarrow (B \vee C)$	$(B \wedge A) \rightarrow \neg E$	φ
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0

Modelle für φ werden hier durch grau unterlegte Zeilen repräsentiert.

In der Wahrheitstafel sieht man:

- Es gibt **kein** Modell für φ , bei dem in den mit A bis E beschrifteten Spalten insgesamt 5 Einsen stehen.
- Es gibt genau **zwei** Modelle für φ , bei denen in den mit A bis E beschrifteten Spalten insgesamt 4 Einsen stehen, nämlich die beiden Interpretationen \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 mit

$$\mathcal{I}_1(A) = \mathcal{I}_1(C) = \mathcal{I}_1(D) = \mathcal{I}_1(E) = 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_1(B) = 0$$

und

$$\mathcal{I}_2(A) = \mathcal{I}_2(B) = \mathcal{I}_2(C) = \mathcal{I}_2(D) = 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_2(E) = 0.$$

Die Antwort auf die Frage „*Wie viele (und welche) Freunde werden bestenfalls zur Party kommen?*“ lautet also:

Bestenfalls werden 4 der 5 Freunde kommen, und dafür gibt es zwei Möglichkeiten, nämlich

- (1) dass alle außer Bernd kommen, und
- (2) dass alle außer Eva kommen.

*Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und die
Folgerungsbeziehung*

Erfüllbarkeit

Definition 2.10

Eine Formel $\varphi \in \text{AL}$ heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation gibt, die φ erfüllt.

Eine Formelmenge Φ heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation \mathcal{I} gibt, die Φ erfüllt (d.h. es gilt $\mathcal{I} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in \Phi$).

Eine Formel oder Formelmenge, die nicht erfüllbar ist, nennen wir **unerfüllbar**.

Beobachtung 2.11

- (a) *Eine aussagenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn in der letzten Spalte ihrer Wahrheitstafel mindestens eine 1 steht.*
- (b) *Eine endliche Formelmenge $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ist genau dann erfüllbar, wenn die Formel $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ erfüllbar ist.*

Beispiele:

- Die Formel X ist erfüllbar.
- Die Formel $(X \wedge \neg X)$ ist unerfüllbar.

Allgemeingültigkeit

Definition 2.12

Eine Formel $\varphi \in AL$ ist **allgemeingültig**, wenn *jede* Interpretation \mathcal{I} die Formel φ erfüllt.

Bemerkung

Allgemeingültige Formeln nennt man auch **Tautologien**.

Man schreibt auch $\models \varphi$ um auszudrücken, dass φ allgemeingültig ist.

Beobachtung 2.13

Eine aussagenlogische Formel ist genau dann allgemeingültig, wenn in der letzten Spalte ihrer Wahrheitstafel nur 1en stehen.

Beispiel: Die Formel $(X \vee \neg X)$ ist allgemeingültig.

Beispiel 2.14

Die Formel $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y)$ ist

- **erfüllbar**, da z.B. die Interpretation \mathcal{I} mit $\mathcal{I}(X) = 0$ und $\mathcal{I}(Y) = 1$ die Formel erfüllt.
- **nicht allgemeingültig**, da z.B. die Interpretation \mathcal{I}' mit $\mathcal{I}'(X) = 0$ und $\mathcal{I}'(Y) = 0$ die Formel nicht erfüllt.

Die Folgerungsbeziehung

Definition 2.15

Eine Formel $\psi \in \text{AL}$ **folgt** aus einer Formelmenge $\Phi \subseteq \text{AL}$ (wir schreiben: $\Phi \models \psi$), wenn für jede Interpretation \mathcal{I} gilt: Wenn \mathcal{I} die Formelmenge Φ erfüllt, dann erfüllt \mathcal{I} auch die Formel ψ .

Notation

Für zwei Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}$ schreiben wir kurz $\varphi \models \psi$ an Stelle von $\{\varphi\} \models \psi$ und sagen, dass die Formel ψ aus der Formel φ folgt.

Beispiel 2.16

Sei $\varphi := ((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y))$ und $\psi := (Y \vee (\neg X \wedge \neg Y))$.

Dann gilt $\varphi \models \psi$, aber es gilt *nicht* $\psi \models \varphi$ (kurz: $\psi \not\models \varphi$), denn:

X	Y	$(X \vee Y)$	$(\neg X \vee Y)$	φ	ψ
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

In jeder Zeile der Wahrheitstafel, in der in der mit „ φ “ beschrifteten Spalte eine 1 steht, steht auch in der mit „ ψ “ beschrifteten Spalte eine 1. Somit gilt $\varphi \models \psi$.

Andererseits steht in Zeile 1 in der mit „ ψ “ beschrifteten Spalte eine 1 und in der mit „ φ “ beschrifteten Spalte eine 0. Für die entsprechende Interpretation \mathcal{I} (mit $\mathcal{I}(X) = 0$ und $\mathcal{I}(Y) = 0$) gilt also $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$ und $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0$. Daher gilt $\psi \not\models \varphi$.

Beispiel 2.17

Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}$ gilt:

$$\{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)\} \models \psi.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Semantik:

Sei \mathcal{I} eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)\}$. Dann gilt:

(1) $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$ und

(2) $\llbracket (\varphi \rightarrow \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$, d.h. es gilt $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0$ oder $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$.

Da $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$ gemäß (1) gilt, folgt gemäß (2), dass $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$.

Bemerkung

Man kann die Folgerungsbeziehung $\{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)\} \models \psi$ als eine formale Schlussregel auffassen (ähnlich den Syllogismen in Kapitel 1):

Wenn φ und $(\varphi \rightarrow \psi)$ gelten, so muss auch ψ gelten.

Diese Regel, die unter dem Namen **Modus Ponens** bekannt ist, ist von grundlegender Bedeutung in der Logik.

Zusammenhänge

Lemma 2.18 (Allgemeingültigkeit, Unerfüllbarkeit und Folgerung)

Für jede Formel $\varphi \in \text{AL}$ gilt:

$$(a) \quad \varphi \text{ ist allgemeingültig} \iff \neg\varphi \text{ ist unerfüllbar} \iff \mathbf{1} \models \varphi.$$

$$(b) \quad \varphi \text{ ist unerfüllbar} \iff \varphi \models \mathbf{0}.$$

Lemma 2.19 (Erfüllbarkeit und die Folgerungsbeziehung)

Für alle Formelmengen $\Phi \subseteq \text{AL}$ und für alle Formeln $\psi \in \text{AL}$ gilt:

$$\Phi \models \psi \iff \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ ist unerfüllbar.}$$

Lemma 2.20 (Allgemeingültigkeit und die Folgerungsbeziehung)

(a) Für jede Formel $\varphi \in \text{AL}$ gilt:

φ ist allgemeingültig $\iff \varphi$ folgt aus der leeren Menge,

kurz:

$$\models \varphi \iff \emptyset \models \varphi.$$

(b) Für jede Formel $\psi \in \text{AL}$ und jede endliche Formelmenge $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \text{AL}$ gilt:

$\Phi \models \psi \iff (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ ist allgemeingültig.

Bemerkung 2.21

Aus den beiden vorigen Lemmas erhält man leicht, dass für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}$ gilt:

$$\varphi \models \psi \iff (\varphi \rightarrow \psi) \text{ ist allgemeingültig} \iff (\varphi \wedge \neg\psi) \text{ ist unerfüllbar.}$$

Beweis.

Es sei $\Phi := \{\varphi\}$. Gemäß Lemma 2.20 gilt:

$$\Phi \models \psi \iff (\varphi \rightarrow \psi) \text{ ist allgemeingültig.}$$

Somit gilt: $\varphi \models \psi \iff (\varphi \rightarrow \psi) \text{ ist allgemeingültig.}$

Außerdem gilt gemäß Lemma 2.19:

$$\Phi \models \psi \iff \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ ist unerfüllbar.}$$

Somit gilt: $\varphi \models \psi \iff (\varphi \wedge \neg\psi) \text{ ist unerfüllbar.}$



Abschnitt 2.2:

Aussagenlogische Modellierung

Beispiel 1: Sudoku

Sudoku

	3							
			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				
4					3			1
				2				
	6					2	8	
			4	1	9			5
							7	

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Aussagenlogisches Modell

Koordinaten der Felder:

Feld (i, j) ist das Feld in Zeile i und Spalte j .

Aussagensymbole:

Aussagensymbol $P_{i,j,k}$, für $i, j, k \in [9]$, steht für die Aussage

„Das Feld mit den Koordinaten (i, j) enthält die Zahl k .“

Interpretationen beschreiben also Beschriftungen des 9×9 -Gitters.

Ziel:

Für jede Anfangsbeschriftung A eine Formelmenge Φ_A , so dass für alle Interpretationen \mathcal{I} gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi_A \iff \mathcal{I} \text{ beschreibt eine korrekte Lösung.}$$

Wir beschreiben zunächst eine Formelmenge $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_5\}$, die die Grundregeln des Spiels beschreibt.

Beschriftungen:

“Auf jedem Feld steht mindestens eine Zahl“:

$$\varphi_1 := \bigwedge_{i,j=1}^9 \bigvee_{k=1}^9 P_{i,j,k}.$$

“Auf jedem Feld steht höchstens eine Zahl“:

$$\varphi_2 := \bigwedge_{i,j=1}^9 \bigwedge_{\substack{k,\ell=1 \\ k \neq \ell}}^9 \neg(P_{i,j,k} \wedge P_{i,j,\ell}).$$

Zeilen:

„Jede Zahl kommt in jeder Zeile vor“:

$$\varphi_3 := \bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{k=1}^9 \bigvee_{j=1}^9 P_{i,j,k}.$$

Spalten:

„Jede Zahl kommt in jeder Spalte vor“:

$$\varphi_4 := \bigwedge_{j=1}^9 \bigwedge_{k=1}^9 \bigvee_{i=1}^9 P_{i,j,k}.$$

Blöcke:

„Jede Zahl kommt in jedem Block vor“:

$$\varphi_5 := \bigwedge_{i,j=0}^2 \bigwedge_{k=1}^9 \bigvee_{i',j'=1}^3 P_{3i+i',3j+j',k}.$$

Anfangsbeschriftung:

Sei A die Anfangsbeschriftung. Wir setzen

$$\Phi_A := \Phi \cup \{ P_{i,j,k} : A \text{ beschriftet Feld } (i,j) \text{ mit der Zahl } k \}.$$

Automatische Lösung von Sudoku:

Um ein Sudoku mit Anfangsbeschriftung A zu lösen, können wir nun einfach die Formel $\psi_A := \bigwedge_{\varphi \in \Phi_A} \varphi$ bilden und die Wahrheitstafel zu dieser Formel aufstellen. Falls die Wahrheitstafel zeigt, dass ψ_A kein Modell besitzt, so ist das Sudoku nicht lösbar. Andernfalls können wir ein beliebiges Modell \mathcal{I} von ψ_A hernehmen und daran die Lösung des Sudokus ablesen: Für jedes Feld (i,j) gibt es gemäß unserer Konstruktion der Formel ψ_A genau eine Zahl $k \in [9]$, so dass $\mathcal{I}(P_{i,j,k}) = 1$ ist. Diese Zahl k können wir in Feld (i,j) eintragen und erhalten damit eine Lösung des Sudokus.

Beispiel 2: Automatische Hardwareverifikation

Abschnitt 2.3:

Äquivalenz und Adäquatheit

Äquivalenz

Definition 2.22

Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}$ sind **äquivalent** (wir schreiben $\varphi \equiv \psi$), wenn sie von den selben Interpretationen erfüllt werden, d.h., wenn für alle Interpretationen \mathcal{I} gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi.$$

Zwei Formelmengen $\Phi, \Psi \subseteq \text{AL}$ sind **äquivalent** (wir schreiben $\Phi \equiv \Psi$), wenn sie von den selben Interpretationen erfüllt werden, d.h., wenn für alle Interpretationen \mathcal{I} gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \iff \mathcal{I} \models \Psi.$$

Beobachtung 2.23

- (a) Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}$ sind genau dann äquivalent, wenn in den letzten Spalten ihrer Wahrheitstabellen jeweils die gleichen Einträge stehen.
- (b) Für endliche Formelmengen $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \text{AL}$ gilt

$$\Phi \equiv \Psi \iff \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i \equiv \bigwedge_{j=1}^n \psi_j.$$

Beispiel: Für alle $X, Y \in \text{AS}$ gilt: $\neg(X \vee Y) \equiv (\neg X \wedge \neg Y)$ und $X \equiv \neg\neg X$.

Äquivalenz und Allgemeingültigkeit

Lemma 2.24

(a) Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}$ gilt:

$$\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \leftrightarrow \psi) \text{ ist allgemeingültig.}$$

(b) Für alle $\varphi \in \text{AL}$ gilt:

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig} \iff \varphi \equiv \mathbf{1}.$$

Fundamentale Äquivalenzen

Satz 2.25

Für alle Formeln $\varphi, \psi, \chi \in \text{AL}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

(a) *Idempotenz:*

$$(\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi, \quad (\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi.$$

(b) *Kommutativität:*

$$(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi), \quad (\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi).$$

(c) *Assoziativität:*

$$((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)), \quad ((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \chi)).$$

(d) *Absorption:*

$$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi, \quad (\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \equiv \varphi.$$

(Fortsetzung: nächste Folie)

(e) *Distributivität:*

$$(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)), \quad (\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)).$$

(f) *Doppelte Negation:*

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi.$$

(g) *De Morgansche Regeln:*

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi), \quad \neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

(h) *Tertium Non Datur:*

$$(\varphi \wedge \neg\varphi) \equiv \mathbf{0}, \quad (\varphi \vee \neg\varphi) \equiv \mathbf{1}.$$

(Fortsetzung: nächste Folie)

(i)

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge \mathbf{1}) &\equiv \varphi, & (\varphi \vee \mathbf{0}) &\equiv \varphi, \\(\varphi \wedge \mathbf{0}) &\equiv \mathbf{0}, & (\varphi \vee \mathbf{1}) &\equiv \mathbf{1}.\end{aligned}$$

(j)

$$\mathbf{1} \equiv \neg \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \equiv \neg \mathbf{1}.$$

(k) *Elimination der Implikation:*

$$(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg \varphi \vee \psi).$$

Beweis.

Alle hier genannten Äquivalenzen können leicht mit Hilfe der Wahrheitstafelmethode überprüft werden.

Zum Beispiel die erste de Morgansche Regel:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi).$$

Wir berechnen dazu folgende Wahrheitstafeln:

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Die letzten Spalten der beiden Wahrheitstafeln sind gleich, also sind die Formeln äquivalent.

Rest: Übung.



Bemerkung

Durch schrittweises Anwenden der in Satz 2.25 aufgelisteten Äquivalenzen kann man eine gegebene Formel in eine zu ihr äquivalente Formel umformen.

Das Dualitätsprinzip

Definition 2.26

Sei $\varphi \in \text{AL}$ eine Formel, in der keine Implikationen vorkommt.

Die zu φ **duale Formel** ist die Formel $\tilde{\varphi} \in \text{AL}$, die aus φ entsteht, indem man überall **0** durch **1**, **1** durch **0**, \wedge durch \vee und \vee durch \wedge ersetzt.

Beispiel

Für $\varphi := ((A_1 \wedge \mathbf{0}) \vee \neg(A_2 \vee \mathbf{1}))$ ist $\tilde{\varphi} = ((A_1 \vee \mathbf{1}) \wedge \neg(A_2 \wedge \mathbf{0}))$.

Satz 2.27 (Dualitätssatz der Aussagenlogik)

Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}$, in denen keine Implikation vorkommt, gilt:

$$\varphi \equiv \psi \quad \iff \quad \tilde{\varphi} \equiv \tilde{\psi}.$$

Beweise per Induktion über den Aufbau von Formeln

- Ähnlich wie wir Aussagen über die natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion beweisen können, können wir Aussagen über Formeln per **Induktion über den Aufbau der Formeln** beweisen.
- Im **Induktionsanfang** beweisen wir die Aussagen für die atomaren Formeln, und im **Induktionsschritt** schließen wir von den Bestandteilen einer Formel auf die Formel selbst.
- Dieses Vorgehen ist z.B. dadurch gerechtfertigt, dass es sich auch als vollständige Induktion über die Höhe des Syntaxbaumes auffassen lässt.

Schematisch sieht der Beweis einer Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$ für alle Formeln $\varphi \in AL$ wie folgt aus:

Induktionsanfang:

- Beweise $\mathbb{A}(\mathbf{0})$ und $\mathbb{A}(\mathbf{1})$.
- Beweise $\mathbb{A}(X)$ für alle $X \in AS$.

Induktionsschritt:

- Beweise $\mathbb{A}(\neg\varphi)$ unter der Annahme, dass $\mathbb{A}(\varphi)$ gilt.
- Beweise $\mathbb{A}((\varphi \wedge \psi))$ unter der Annahme, dass $\mathbb{A}(\varphi)$ und $\mathbb{A}(\psi)$ gelten.
- Beweise $\mathbb{A}((\varphi \vee \psi))$ unter der Annahme, dass $\mathbb{A}(\varphi)$ und $\mathbb{A}(\psi)$ gelten.
- Beweise $\mathbb{A}((\varphi \rightarrow \psi))$ unter der Annahme, dass $\mathbb{A}(\varphi)$ und $\mathbb{A}(\psi)$ gelten.

Um den Dualitätssatz zu beweisen benötigen wir zunächst noch eine Definition. Der Kern des Beweises steckt im darauf folgenden Lemma.

Definition 2.28

Sei \mathcal{I} eine Interpretation. Die zu \mathcal{I} **duale Interpretation** $\tilde{\mathcal{I}}$ ist definiert durch $\tilde{\mathcal{I}}(X) := 1 - \mathcal{I}(X)$ für alle $X \in \text{AS}$.

D.h. für alle Aussagensymbole X gilt:

$$\tilde{\mathcal{I}}(X) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{I}(X) = 1 \\ 1, & \text{falls } \mathcal{I}(X) = 0 \end{cases}$$

Lemma 2.29

Für alle Formeln $\varphi \in \text{AL}$, in denen keine Implikation vorkommt, und alle Interpretationen \mathcal{I} gilt:

$$\mathcal{I} \models \tilde{\varphi} \iff \tilde{\mathcal{I}} \not\models \varphi.$$

Beweis von Satz 2.27.

Seien $\varphi, \psi \in \text{AL}$ Formeln, in denen keine Implikation vorkommt.

Wir wollen zeigen, dass gilt: $\varphi \equiv \psi \iff \tilde{\varphi} \equiv \tilde{\psi}$.

„ \implies “: Es gilt:¹

$$\varphi \equiv \psi$$

$$\implies \text{F.a. Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } (\tilde{\mathcal{I}} \models \varphi \iff \tilde{\mathcal{I}} \models \psi)$$

Lemma 2.29
 \implies

$$\text{F.a. Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } (\mathcal{I} \not\models \tilde{\varphi} \iff \mathcal{I} \not\models \tilde{\psi})$$

$$\implies \text{F.a. Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } (\mathcal{I} \models \tilde{\varphi} \iff \mathcal{I} \models \tilde{\psi})$$

$$\implies \tilde{\varphi} \equiv \tilde{\psi}.$$

„ \impliedby “: Es gilt:

$$\tilde{\varphi} \equiv \tilde{\psi} \implies \tilde{\tilde{\varphi}} \equiv \tilde{\tilde{\psi}} \quad (\text{andere Beweisrichtung})$$

$$\implies \varphi \equiv \psi \quad (\text{weil } \tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi \text{ und } \tilde{\tilde{\psi}} = \psi).$$

¹Wir schreiben kurz „f.a.“ als Abkürzung für die Worte „für alle“



Funktionale Vollständigkeit der Aussagenlogik

Im Folgenden bezeichnen wir als **Wahrheitstafel** eine Tabelle mit $n+1$ Spalten und 2^n Zeilen, die für jedes Tupel $(b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ genau eine Zeile enthält, deren erste n Einträge b_1, \dots, b_n sind.

Satz 2.30 (Funktionale Vollständigkeit der Aussagenlogik)

Zu jeder Wahrheitstafel gibt es eine Formel $\varphi \in AL$ mit dieser Wahrheitstafel.

Mathematisch präzise lässt sich dieser Satzes wie folgt formulieren:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es zu jeder Funktion $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ eine Formel $\varphi(A_1, \dots, A_n) \in AL$, so dass für alle $(b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt:

$$F(b_1, \dots, b_n) = 1 \iff \varphi[b_1, \dots, b_n] = 1.$$

Definition 2.31

Funktionen $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ (mit $n \in \mathbb{N}$) nennt man **Boolesche Funktionen** (der Stelligkeit n).

Bevor wir Satz 2.30 beweisen, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 2.32

Betrachte die Wahrheitstafel T :

b_1	b_2	b_3	$F(b_1, b_2, b_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Eine Formel $\varphi(A_1, A_2, A_3)$, so dass T die Wahrheitstafel für φ ist, kann man folgendermaßen erzeugen:

- Betrachte alle Zeilen von T , bei denen in der letzten Spalte eine „1“ steht.
- Für jede solche Zeile konstruiere eine Formel, die genau von der zu der Zeile gehörenden Belegung von b_1, b_2, b_3 erfüllt wird.
- Bilde die Disjunktion (d.h. die „Veroderung“) über all diese Formeln. Dies liefert die gesuchte Formel φ .

In unserer Beispiel-Wahrheitstafel T gibt es genau 3 Zeilen, bei denen in der letzten Spalte eine „1“ steht, nämlich die Zeilen

b_1	b_2	b_3	$F(b_1, b_2, b_3)$	zur jeweiligen Zeile gehörende Formel:
0	0	0	1	$(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$
0	0	1	1	$(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
1	0	1	1	$(A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Insgesamt erhalten wir dadurch die zur Wahrheitstafel T passende Formel

$$\varphi = (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3).$$

Adäquatheit

Satz 2.30 besagt, dass die Aussagenlogik AL die größtmögliche Ausdruckstärke hat. Dafür reichen allerdings schon „kleinere“ Logiken, wie wir im Folgenden sehen werden.

Definition 2.33

Sei $\tau \subseteq \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$.

- (a) $AL(\tau)$ sei das Fragment der Logik AL, das aus den Formeln besteht, in denen nur Junktoren und Konstanten aus τ vorkommen.
- (b) τ heißt **adäquat**, wenn jede Formel $\varphi \in AL$ äquivalent zu einer Formel in $AL(\tau)$ ist.

Beispiele 2.34

- (a) $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\mathbf{0}, \rightarrow\}$ sind adäquat.
- (b) $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ist nicht adäquat.

Andere Junktoren

- Die Auswahl der Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ (und \leftrightarrow als Abkürzung) für „unsere“ aussagenlogische Sprache richtet sich nach dem umgangssprachlichen Gebrauch und den Erfordernissen des formalen Schließens, ist aber in gewisser Weise willkürlich.
- Durch Festlegung ihrer Wahrheitstafeln können wir auch andere Junktoren definieren und erhalten daraus andere aussagenlogische Sprachen.
- Für jede Menge τ von so definierten Junktoren und den booleschen Konstanten (die wir als „nullstellige“ Junktoren auffassen können) sei $AL(\tau)$ die daraus gebildete aussagenlogische Sprache.
- Satz 2.30 besagt dann, dass jede Formel in $AL(\tau)$ zu einer Formel in AL äquivalent ist. Gilt die Umkehrung ebenfalls, so bezeichnen wir τ als **adäquat**.

Beispiele 1: Exklusives Oder

Der 2-stellige Junktor \oplus sei definiert durch

φ	ψ	$(\varphi \oplus \psi)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Intuitiv bedeutet $(\varphi \oplus \psi)$ „entweder φ oder ψ “.

Man nennt \oplus auch **exklusives Oder**.

Der dreistellige Mehrheitsjunktork

Der 3-stellige Junktork M sei definiert durch

φ	ψ	χ	$M(\varphi, \psi, \chi)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Intuitiv ist $M(\varphi, \psi, \chi)$ also genau dann wahr, wenn mindestens zwei (also die Mehrheit) der Formeln φ, ψ, χ wahr sind.

NAND

Der folgende zweistellige Junktor ist bekannt als **NAND-Gatter** (not-and) oder **Sheffer-Strich**:

φ	ψ	$(\varphi \psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Satz 2.35

$\{|\}$ ist adäquat.

Abschnitt 2.4:
Normalformen

Vereinfachende Annahme

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Formeln in $AL(\{\neg, \vee, \wedge\})$.

Rechtfertigung

Die Annahme bedeutet keine wesentliche Einschränkung, weil die Menge $\{\neg, \vee, \wedge\}$ adäquat ist.

NNF

Definition 2.36

Eine Formel ist in **Negationsnormalform (NNF)**, wenn sie zu $AL(\{\neg, \wedge, \vee\})$ gehört und Negationszeichen nur unmittelbar vor Aussagensymbolen auftreten.

Satz 2.37

Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer Formel in NNF.

Ein NNF-Algorithmus

Eingabe: Formel $\varphi \in \text{AL}(\{\neg, \wedge, \vee\})$.

Ausgabe: Formel φ' in NNF

Verfahren:

1. Wiederhole folgende Schritte:
2. Wenn φ in NNF ist, dann halte mit Ausgabe φ .
3. Ersetze eine Subformel von φ der Gestalt $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ durch $(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$ oder eine Subformel der Gestalt $\neg(\psi_1 \vee \psi_2)$ durch $(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$ oder eine Subformel der Gestalt $\neg\neg\psi$ durch ψ .
Sei φ' die resultierende Formel.
4. $\varphi := \varphi'$.

Korrektheit des NNF-Algorithmus

Satz 2.38

Für jede Eingabeformel $\varphi \in \text{AL}(\{\neg, \wedge, \vee\})$ gibt der NNF-Algorithmus nach endlich vielen Schritten eine zu φ äquivalente Formel φ' in NNF aus.

(hier ohne Beweis)

Bemerkung

Unter Verwendung geeigneter Datenstrukturen lässt sich der NNF-Algorithmus mit linearer Laufzeit implementieren, d.h., Laufzeit $O(n)$ bei Eingabe einer Formel der Länge n .

Beispiel 2.39

Das Ziel ist, die Formel $\left(\left(\neg A_0 \wedge \neg((A_0 \vee A_1) \rightarrow A_0)\right) \rightarrow \mathbf{0}\right)$

in NNF zu bringen, d.h. eine zu ihr äquivalente Formel in NNF zu finden.

Lösung: Wir ersetzen zunächst die Konstanten $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ sowie alle Implikationspfeile durch geeignete Formeln aus $AL(\{\neg, \wedge, \vee\})$ und wenden dann den NNF-Algorithmus an. Der Teil einer Formel, der als Nächstes ersetzt wird, ist im Folgenden jeweils unterstrichen.

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(\neg A_0 \wedge \neg((A_0 \vee A_1) \rightarrow A_0)\right) \rightarrow \underline{\mathbf{0}}\right) \\
 \equiv & \left(\left(\neg A_0 \wedge \neg((A_0 \vee A_1) \rightarrow A_0)\right) \underline{\Rightarrow} (A_0 \wedge \neg A_0)\right) \\
 \equiv & \left(\neg\left(\neg A_0 \wedge \neg((A_0 \vee A_1) \underline{\Rightarrow} A_0)\right) \vee (A_0 \wedge \neg A_0)\right) \\
 \equiv & \left(\underline{\neg}\left(\neg A_0 \wedge \neg(\neg(A_0 \vee A_1) \vee A_0)\right) \vee (A_0 \wedge \neg A_0)\right) \\
 \equiv & \left(\left(\underline{\neg\neg} A_0 \vee \underline{\neg\neg}(\neg(A_0 \vee A_1) \vee A_0)\right) \vee (A_0 \wedge \neg A_0)\right) \\
 \equiv & \left(\left(A_0 \vee (\underline{\neg}\neg(A_0 \vee A_1) \vee A_0)\right) \vee (A_0 \wedge \neg A_0)\right) \\
 \equiv & \left(\left(A_0 \vee ((\neg A_0 \wedge \neg A_1) \vee A_0)\right) \vee (A_0 \wedge \neg A_0)\right).
 \end{aligned}$$

Diese Formel ist offensichtlich in NNF.

Klammern bei Konjunktionen und Disjunktionen

Weil \wedge assoziativ ist, können wir Formeln der Gestalt $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ etwas großzügiger interpretieren. Von nun an stehe $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ für $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ mit *irgendeiner* Klammerung.

Entsprechend verfahren wir mit Disjunktionen.

Beispiel

Die Formel $\bigwedge_{i=1}^4 \varphi_i$ kann für jede der folgenden Formeln stehen:

$$(((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \varphi_4) ,$$

$$((\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \wedge \varphi_4) ,$$

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge (\varphi_3 \wedge \varphi_4)) ,$$

$$(\varphi_1 \wedge ((\varphi_2 \wedge \varphi_3) \wedge \varphi_4)) ,$$

$$(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\varphi_3 \wedge \varphi_4))) .$$

DNF und KNF

Definition 2.40

- (a) Ein **Literal** ist eine Formel der Gestalt X oder $\neg X$, wobei $X \in AS$.
Im ersten Fall sprechen wir von einem **positiven**, im zweiten Fall von einem **negativen** Literal.
- (b) Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, d.h., wenn sie die Form

$$\bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} \lambda_{i,j} \right)$$

hat, wobei $n, m_1, \dots, m_n \geq 1$ sind und die $\lambda_{i,j}$ für alle $i \in [n]$ und $j \in [m_i]$ Literale sind. Die Subformeln $\kappa_i := \bigwedge_{j=1}^{m_i} \lambda_{i,j}$, für $i \in [n]$, nennen wir die **(konjunktiven) Klauseln** der Formel.

Beispiele:

- $(A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_2 \wedge A_1)$ ist in DNF
- $A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3$ ist in DNF (mit $n = 3$ und $m_1 = m_2 = m_3 = 1$)
- $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$ ist in DNF (mit $n = 1$ und $m_1 = 3$) und gleichzeitig ist diese Formel eine konjunktive Klausel

- (c) Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktion von Literalen ist, d.h., wenn sie die Form

$$\bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} \lambda_{i,j} \right)$$

hat, wobei $n, m_1, \dots, m_n \geq 1$ sind und die $\lambda_{i,j}$ für alle $i \in [n]$ und $j \in [m_i]$ Literale sind. Die Subformeln $\kappa_i := \bigvee_{j=1}^{m_i} \lambda_{i,j}$, für $i \in [n]$, nennen wir die **(disjunktiven) Klauseln** der Formel.

Beispiele:

- $(A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_2 \vee A_1)$ ist in KNF
- $A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3$ ist in KNF (mit $n = 1$ und $m_1 = 3$) und gleichzeitig ist diese Formel eine disjunktive Klausel
- $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$ ist in KNF (mit $n = 3$ und $m_1 = m_2 = m_3 = 1$)

Normalformen spielen in vielen Anwendungsgebieten eine wichtige Rolle. Beispielsweise geht man in der Schaltungstechnik (Hardware-Entwurf) oft von DNF-Formeln aus, während bei der aussagenlogischen Modellbildung oftmals KNF-Formeln auftreten, da sich eine Sammlung von einfach strukturierten Aussagen sehr gut durch eine Konjunktion von Klauseln ausdrücken lässt.

Satz 2.41

Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer Formel in DNF und zu einer Formel in KNF.

Bemerkung 2.42

Der Beweis von Satz 2.41 zeigt Folgendes:

Um für eine gegebene Formel ψ eine äquivalente Formel φ in

- DNF zu erzeugen, können wir die Wahrheitstafel für ψ aufstellen und dann wie in Beispiel 2.32 vorgehen (bzw. $\varphi := A_1 \wedge \neg A_1$ setzen, falls ψ unerfüllbar ist).
 - KNF zu erzeugen, können wir wie folgt vorgehen:
 - (1) Stelle die Wahrheitstafel für ψ auf.
 - (2) Falls in der letzten Spalte nur „1“en stehen, setze $\varphi := A_1 \vee \neg A_1$.
 - (3) Ansonsten gehe wie folgt vor:
 - Betrachte alle Zeilen der Wahrheitstafel, bei denen in der letzten Spalte eine „0“ steht.
 - Für jede solche Zeile konstruiere die disjunktive Klausel, die von allen Interpretationen außer der zur Zeile gehörenden erfüllt wird.
- Beispiel:** Wenn die Zeile der Wahrheitstafel die Form

$$0 \ 1 \ 1 \ | \ 0$$

hat, so gehört dazu die disjunktive Klausel

$$A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3.$$

- Bilde die Konjunktion all dieser disjunktiven Klauseln.
Dies liefert die gesuchte KNF-Formel φ .

Wenn eine Formel sehr viele verschiedene Aussagensymbole enthält, die zur Formel gehörige Wahrheitstafel also sehr groß ist, ist das gerade beschriebene Verfahren zur Umformung in DNF oder KNF sehr zeitaufwändig.

In solchen Fällen ist es ratsam, stattdessen zu versuchen, die gewünschte Normalform durch Äquivalenzumformungen zu erzeugen.

Beispiel 2.43

Sei $\varphi := \left((\neg A_0 \wedge (A_0 \rightarrow A_1)) \vee (A_2 \rightarrow A_3) \right)$.

Transformation von φ in NNF: siehe Tafel

Transformation in DNF: siehe Tafel

Transformation in KNF: siehe Tafel

Je nach Formel muss man ggf. die Distributivitätsregel mehrmals anwenden, bis man eine Formel der gewünschten Normalform erhält.

Ein DNF-Algorithmus

Eingabe: Formel $\varphi \in \text{AL}(\{\neg, \wedge, \vee\})$ in NNF.

Ausgabe: Formel φ'' in DNF

- Verfahren:**
1. Wiederhole folgende Schritte:
 2. Wenn φ in DNF ist, dann halte mit Ausgabe φ .
 3. Ersetze eine Subformel von φ der Gestalt $(\psi_1 \wedge (\psi_2 \vee \psi_3))$ durch $((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3))$ oder eine Subformel der Gestalt $((\psi_1 \vee \psi_2) \wedge \psi_3)$ durch $((\psi_1 \wedge \psi_3) \vee (\psi_2 \wedge \psi_3))$. Sei φ' die resultierende Formel.
 4. $\varphi := \varphi'$.

Satz 2.44

Für jede Eingabeformel φ in NNF gibt der DNF-Algorithmus nach endlich vielen Schritten eine zu φ äquivalente Formel φ'' in DNF aus.

(hier ohne Beweis)

Analog kann man auch einen „KNF-Algorithmus“ angeben, der bei Eingabe einer NNF-Formel eine äquivalente Formel in KNF erzeugt (Details: Übung).

Eine kleine Formel mit großer DNF

Satz 2.45

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, seien X_1, \dots, X_n und Y_1, \dots, Y_n genau $2n$ verschiedene Aussagensymbole und sei

$$\varphi_n := \bigwedge_{i=1}^n (X_i \vee \neg Y_i).$$

Jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF hat mindestens 2^n konjunktive Klauseln.

Beweis: Übung

Korollar 2.46

Jeder Algorithmus, der bei Eingabe von beliebigen aussagenlogischen Formeln dazu äquivalente Formeln in DNF erzeugt, hat eine Laufzeit, die im worst-case exponentiell ist, d.h., $2^{\Omega(n)}$ bei Eingabe von Formeln der Länge n .

Abschnitt 2.5:
Der Endlichkeitssatz

Der Endlichkeitssatz

(auch bekannt als Kompaktheitssatz)

Um nachzuweisen, dass eine gegebene *unendliche* Formelmengung erfüllbar ist, ist der folgende Satz sehr nützlich.

Satz 2.47 (Der Endlichkeitssatz der Aussagenlogik)

(a) Für jede Formelmengung $\Phi \subseteq \text{AL}$ gilt:

Φ ist erfüllbar \iff Jede endliche Teilmenge von Φ ist erfüllbar.

(b) Für alle $\Phi \subseteq \text{AL}$ und $\psi \in \text{AL}$ gilt:

$\Phi \models \psi$ \iff Es gibt eine endliche Teilmenge Γ von Φ , so dass $\Gamma \models \psi$.

Anwendung: Färbbarkeit

Zur Erinnerung:

- Ein **Graph** $G = (V, E)$ besteht aus einer nicht-leeren Menge V von Knoten und einer Menge $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$ von (ungerichteten) Kanten.
- Ein **Subgraph** eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $H = (V', E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- Ein Graph ist endlich (bzw. unendlich), wenn seine Knotenmenge endlich (bzw. unendlich) ist.

Definition 2.48

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$.

Eine **k -Färbung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $f : V \rightarrow [k]$, so dass für alle Kanten $\{v, w\} \in E$ gilt: $f(v) \neq f(w)$.

G heißt **k -färbbar**, falls es eine k -Färbung von G gibt.

Satz 2.49

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$.

Ein unendlicher Graph G mit Knotenmenge \mathbb{N} ist genau dann k -färbbar, wenn jeder endliche Subgraph von G k -färbbar ist.

Abschnitt 2.6:
Resolution

Um nachzuweisen, dass eine gegebene KNF-Formel *unerfüllbar* ist, ist das im Folgenden vorgestellte Resolutionsverfahren nützlich.

Beispiel 2.50

Wir wollen nachweisen, dass die KNF-Formel

$$\varphi := (\neg P \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (Q \vee R \vee T) \wedge \neg T \wedge (\neg S \vee R)$$

unerfüllbar ist. Dazu können wir wie folgt argumentieren:

Angenommen, eine Interpretation \mathcal{I} erfüllt φ .

- Dann gilt $\mathcal{I} \models \neg T$.
- Aus $\mathcal{I} \models Q \vee R \vee T$ und $\mathcal{I} \models \neg T$ folgt dann $\mathcal{I} \models Q \vee R$.
- Aus $\mathcal{I} \models Q \vee R$ und $\mathcal{I} \models \neg Q \vee S$ folgt $\mathcal{I} \models R \vee S$.
- Aus $\mathcal{I} \models R \vee S$ und $\mathcal{I} \models \neg S \vee R$ folgt $\mathcal{I} \models R$.
- Aus $\mathcal{I} \models \neg P \vee \neg R$ und $\mathcal{I} \models P \vee \neg R$ folgt $\mathcal{I} \models \neg R$.

Das ist ein *Widerspruch*. Somit ist φ *nicht* erfüllbar.

Umwandlung in kleine KNF-Formeln

Das Resolutionsverfahren, das wir im Folgenden vorstellen, funktioniert nur für KNF-Formeln.

Wir wissen bereits:

- Zu jeder Formel φ gibt es eine äquivalente Formel in KNF.
- Aber möglicherweise ist die kleinste zu φ äquivalente KNF-Formel exponentiell groß in der Größe von φ .

Wenn es uns nur um die Frage geht, ob eine Formel φ **(un)erfüllbar** ist, ist es aber auch gar nicht nötig, eine zu φ **äquivalente** KNF-Formel zu finden. Es reicht, eine zu φ **erfüllbarkeitsäquivalente** KNF-Formel zu konstruieren.

Definition 2.51

Zwei Formeln φ und ψ heißen **erfüllbarkeitsäquivalent**, falls gilt:

$$\varphi \text{ ist erfüllbar} \iff \psi \text{ ist erfüllbar.}$$

Eine beliebige Formel in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* KNF-Formel umzuwandeln, ist in Linearzeit möglich.

Beispiel 2.52

Um die Formel

$$\varphi := (P \rightarrow \neg Q) \vee (\neg(P \wedge Q) \wedge R)$$

in eine erfüllbarkeitsäquivalente KNF-Formel umzuformen, können wir wie folgt vorgehen.

Das Tseitin-Verfahren

Auf die gleiche Weise wie in Beispiel 2.52 können wir jede beliebige aussagenlogische Formel in eine erfüllbarkeitsäquivalente KNF-Formel umwandeln. Dieses Verfahren wird **Tseitin-Verfahren** genannt. Eine Laufzeitanalyse zeigt, dass das Tseitin-Verfahren in Linearzeit durchgeführt werden kann. Insgesamt erhalten wir so den folgenden Satz.

Satz 2.53

Zu jeder aussagenlogischen Formel φ gibt es eine aussagenlogische Formel φ_K mit folgenden Eigenschaften:

- (a) φ_K ist **erfüllbarkeitsäquivalent** zu φ .
- (b) φ_K ist in **3-KNF**, d.h., in KNF, wobei jede disjunktive Klausel aus höchstens 3 Literalen besteht (wir sagen: die Klauseln haben Länge ≤ 3).
- (c) $|\varphi_K| = O(|\varphi|)$.

Außerdem gibt es einen Algorithmus, der φ_K bei Eingabe von φ in Linearzeit berechnet.

Notation

$|\varphi|$ bezeichnet die **Länge** (bzw. **Größe**) einer aussagenlogischen Formel φ , d.h. die Länge von φ aufgefasst als Wort über dem Alphabet A_{AL} .

Repräsentation von KNF-Formeln

Für den Rest diese Abschnitts werden wir nur noch KNF-Formeln betrachten, und wenn wir von **Klauseln** sprechen, meinen wir stets **disjunktive Klauseln**, also Disjunktionen von Literalen.

Für das Resolutionsverfahren ist die folgende Repräsentation von Klauseln und KNF-Formeln sehr hilfreich:

- Eine Klausel $(\lambda_1 \vee \dots \vee \lambda_\ell)$, die aus Literalen $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ besteht, identifizieren wir mit der Menge $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ ihrer Literale.

Beispiel: Wir schreiben z.B. $\{A_1, \neg A_2, A_3\}$ um die Klausel $(A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$ zu bezeichnen.

D.h.: Ab jetzt sind disjunktive Klauseln für uns dasselbe wie endliche Mengen von Literalen. **Wenn wir von einer Klausel sprechen, meinen wir eine endliche Menge von Literalen** und identifizieren diese mit der Formel, die aus der Disjunktion all dieser Literale besteht.

Spezialfall: Die leere Menge \emptyset entspricht der unerfüllbaren Formel **0** (die wiederum der „Formel“ entspricht, die aus der Disjunktion aller Literale aus \emptyset besteht).

- Eine KNF-Formel $\varphi = \bigwedge_{i=1}^m \gamma_i$, die aus (disjunktiven) Klauseln $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ besteht, identifizieren wir mit der Menge $\Gamma := \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ ihrer Klauseln. Offensichtlicherweise gilt für alle Interpretationen \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \Gamma.$$

Beispiel: Die KNF-Formel $\varphi = A_1 \wedge (\neg A_2 \vee A_1) \wedge (A_3 \vee \neg A_2 \vee \neg A_1)$ repräsentieren wir durch die endliche Klauselmenge

$$\{ A_1, (\neg A_2 \vee A_1), (A_3 \vee \neg A_2 \vee \neg A_1) \}$$

bzw. durch

$$\{ \{A_1\}, \{\neg A_2, A_1\}, \{A_3, \neg A_2, \neg A_1\} \}$$

„Erfüllbarkeit von KNF-Formeln“ ist damit im Wesentlichen dasselbe Problem wie „Erfüllbarkeit von endlichen Mengen von Klauseln“.

Resolution

Notation

Für ein Literal λ sei

$$\bar{\lambda} := \begin{cases} \neg X, & \text{falls } \lambda \text{ von der Form } X \text{ für ein } X \in AS \text{ ist} \\ X, & \text{falls } \lambda \text{ von der Form } \neg X \text{ für ein } X \in AS \text{ ist.} \end{cases}$$

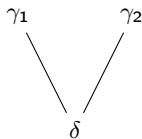
Wir nennen $\bar{\lambda}$ auch das **Negat** von λ .

Definition 2.54 (Resolutionsregel)

Seien γ_1 , γ_2 und δ endliche Mengen von Literalen (d.h. disjunktive Klauseln). Dann ist δ eine **Resolvente** von γ_1 und γ_2 , wenn es ein Literal λ gibt, so dass gilt:

$$\lambda \in \gamma_1, \quad \bar{\lambda} \in \gamma_2 \quad \text{und} \quad \delta = (\gamma_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (\gamma_2 \setminus \{\bar{\lambda}\}).$$

Graphische Darstellung:



„ δ ist eine Resolvente von γ_1 und γ_2 .“

Das Resolutionslemma

Notation

Ein **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen (eine solche Klausel repräsentiert die Disjunktion der in ihr enthaltenen Literale).

Eine **Klauselmenge** ist eine (endliche oder unendliche) Menge von Klauseln.

Lemma 2.55 (Resolutionslemma)

Sei Γ eine Klauselmenge, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ und sei δ eine Resolvente von γ_1 und γ_2 . Dann sind die Klauselmengen Γ und $\Gamma \cup \{\delta\}$ äquivalent.

Resolutionsableitungen und -widerlegungen

Definition

Sei Γ eine Klauselmeng.

- (a) Eine **Resolutionsableitung** einer Klausel δ aus Γ ist ein Tupel $(\delta_1, \dots, \delta_\ell)$ von Klauseln, so dass gilt: $\ell \geq 1$, $\delta_\ell = \delta$, und für alle $i \in [\ell]$ ist
- $\delta_i \in \Gamma$, oder
 - es gibt $j, k \in [i-1]$, so dass δ_i eine Resolvente von δ_j und δ_k ist.
- (b) Eine **Resolutionswiderlegung** von Γ ist eine Resolutionsableitung der leeren Klausel aus Γ .

Zur Erinnerung:

Eine Klausel δ ist genau dann eine **Resolvente** zweier Klauseln γ_1 und γ_2 , wenn es ein Literal λ gibt, so dass gilt:

$$\lambda \in \gamma_1, \quad \bar{\lambda} \in \gamma_2 \quad \text{und} \quad \delta = (\gamma_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (\gamma_2 \setminus \{\bar{\lambda}\}).$$

Notation 2.56

- (a) Wir schreiben kurz $\Gamma \vdash_R \delta$ um auszudrücken, dass es eine Resolutionsableitung von δ aus Γ gibt.

Insbesondere bedeutet $\Gamma \vdash_R \emptyset$, dass es eine Resolutionswiderlegung von Γ gibt.

- (b) An Stelle von $(\delta_1, \dots, \delta_\ell)$ schreiben wir Resolutionsableitungen der besseren Lesbarkeit halber oft zeilenweise, also

$$\begin{array}{l} (1) \ \delta_1 \\ (2) \ \delta_2 \\ \vdots \\ (\ell) \ \delta_\ell \end{array}$$

und geben am Ende jeder Zeile eine kurze Begründung an.

Beispiel 2.57

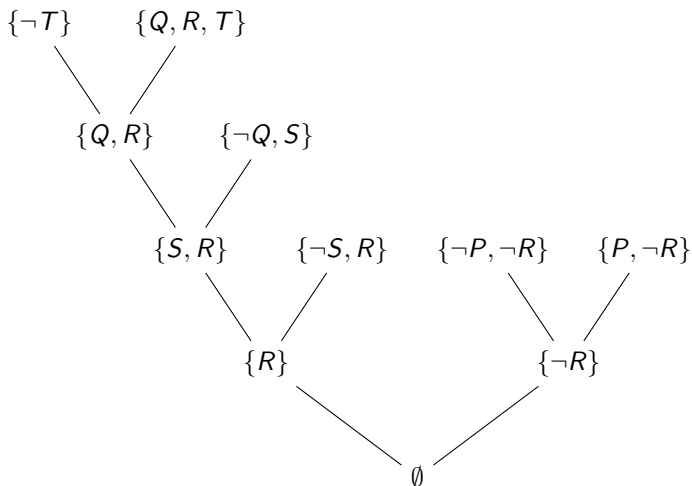
Sei

$$\Gamma := \{ \{\neg P, \neg R\}, \{P, \neg R\}, \{\neg Q, S\}, \{Q, R, T\}, \{\neg T\}, \{\neg S, R\}, \{T, R\} \}$$

Eine Resolutionswiderlegung von Γ ist:

- | | | |
|------|----------------------|----------------------------|
| (1) | $\{\neg T\}$ | (in Γ) |
| (2) | $\{Q, R, T\}$ | (in Γ) |
| (3) | $\{Q, R\}$ | (Resolvente von (1), (2)) |
| (4) | $\{\neg Q, S\}$ | (in Γ) |
| (5) | $\{S, R\}$ | (Resolvente von (3), (4)) |
| (6) | $\{\neg S, R\}$ | (in Γ) |
| (7) | $\{R\}$ | (Resolvente von (5), (6)) |
| (8) | $\{\neg P, \neg R\}$ | (in Γ) |
| (9) | $\{P, \neg R\}$ | (in Γ) |
| (10) | $\{\neg R\}$ | (Resolvente von (8), (9)) |
| (11) | \emptyset | (Resolvente von (7), (10)) |

Graphische Darstellung der Resolutionswiderlegung



Korrektheit und Vollständigkeit der Resolution

Satz 2.58

Für jede Klauselmenge Γ gilt:

$$\Gamma \vdash_R \emptyset \iff \Gamma \text{ ist unerfüllbar.}$$

D.h.: Eine Klauselmenge hat genau dann eine Resolutionswiderlegung, wenn sie unerfüllbar ist.

Vorsicht

Beim Anwenden der Resolutionsregel (Definition 2.54) darf immer nur ein Literal λ betrachtet werden.

Beispiel:

Betrachte die Klauselmenge $\Gamma := \{\gamma_1, \gamma_2\}$ mit $\gamma_1 := \{X, Y\}$ und $\gamma_2 := \{\neg X, \neg Y\}$ (wobei X und Y zwei verschiedene Ausagensymbole sind).

Der Satz von Haken

Für eine endliche Klauselmengemenge Γ sei die *Größe* von Γ die Zahl

$$\|\Gamma\| := \sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma|,$$

wobei $|\gamma|$ die Anzahl der Literale in γ bezeichnet.

Der folgende (schwer zu beweisende) Satz zeigt, dass es im Worst-Case exponentiell lange dauern kann, eine Resolutionswiderlegung zu finden.

Satz 2.59 (Satz von Haken, 1985)

Es gibt Konstanten $c, d > 0$ und endliche Klauselmengemengen Γ_n für $n \geq 1$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

1. $\|\Gamma_n\| \leq n^c$,
2. Γ_n ist unerfüllbar, und
3. jede Resolutionswiderlegung von Γ_n hat Länge $\geq 2^{dn}$.

(Hier ohne Beweis)

Abschnitt 2.7:
Erfüllbarkeitsalgorithmen

Das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem

Wir betrachten im Folgenden Algorithmen für das

Aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem:

Eingabe: eine Formel $\varphi \in \text{AL}$
Ausgabe: „erfüllbar“, falls φ erfüllbar ist;
„unerfüllbar“, sonst.

Notation

Im Folgenden bezeichnet n immer die Anzahl der in φ vorkommenden verschiedenen Aussagensymbole, und $m := |\varphi|$ bezeichnet die Länge von φ (aufgefasst als Wort über dem Alphabet der Aussagenlogik).

Varianten des Erfüllbarkeitsproblems

Berechnen einer erfüllenden Interpretation:

Zusätzlich soll bei erfüllbaren Formeln noch ein Modell berechnet werden, d.h., ein Tupel $(b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$, so dass $\varphi[b_1, \dots, b_n] = 1$.

Einschränkung auf KNF-Formeln:

Oft beschränkt man sich auf Eingabeformeln in KNF oder sogar 3-KNF. Das ist keine wesentliche Einschränkung, weil sich mit Hilfe des Tseitin-Verfahrens jede Formel in Linearzeit in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in 3-KNF transformieren lässt (Satz 2.53).

Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln in KNF bzw. 3-KNF bezeichnet man mit **SAT** bzw. **3-SAT**.

Komplexität des Erfüllbarkeitsproblems

Satz 2.60 (Satz von Cook und Levin, ≈ 1971)

Das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem (und sogar die Einschränkung 3-SAT) ist **NP-vollständig**.

Die Komplexitätsklassen P und NP, der Begriff der NP-Vollständigkeit, sowie ein Beweis des Satzes von Cook und Levin werden in der Vorlesung *Einführung in die Theoretische Informatik* behandelt.

Bemerkung

- Wenn also $P \neq NP$ ist (was allgemein vermutet wird), gibt es für das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem keinen Polynomialzeitalgorithmus.
- Man vermutet sogar, dass es eine Konstante $c > 1$ gibt, so dass jeder Algorithmus für 3-SAT eine worst-case Laufzeit von $\Omega(c^n)$ hat. Diese Vermutung ist unter dem Namen „**Exponential Time Hypothesis**“ (ETH) bekannt.
- Der im Worst-Case beste derzeit bekannte Algorithmus für 3-SAT hat eine Laufzeit von etwa $O(1.4^n)$.

Der Wahrheitstafelalgorithmus

Lemma 2.61

Es gibt einen Linearzeitalgorithmus, der bei Eingabe einer Formel $\varphi(A_1, \dots, A_n) \in \text{AL}$ und eines Tupels $(b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ den Wert $\varphi[b_1, \dots, b_n]$ berechnet.

Beweis: Übung.

Der folgende Algorithmus löst das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem.

Wahrheitstafelalgorithmus

Eingabe: eine Formel $\varphi \in \text{AL}$

1. Berechne die Wahrheitstafel für φ .
2. Falls in der letzten Spalte mindestens eine 1 auftaucht, gib „erfüllbar“ aus, sonst gib „unerfüllbar“ aus.

Laufzeit: $O(m \cdot 2^n)$ (sogar im „Best-Case“)

Der Resolutionsalgorithmus

Der Resolutionsalgorithmus probiert einfach alle möglichen Resolutionsableitungen durch und testet so, ob es eine Resolutionswiderlegung gibt (d.h. die Klauselmenge unerfüllbar ist).

Resolutionsalgorithmus

Eingabe: eine endliche Klauselmenge Γ (entspricht einer KNF-Formel)

1. Wiederhole, bis keine neuen Klauseln mehr generiert werden:
Füge alle Resolventen aller Klauseln aus Γ zu Γ hinzu.
2. Falls $\emptyset \in \Gamma$, gib „unerfüllbar“ aus, sonst gib „erfüllbar“ aus.

Laufzeit: $2^{O(n)}$ (weil es bei n Aussagensymbolen 4^n verschiedene Klauseln gibt).

Der Davis-Putnam-Logemann-Loveland Algorithmus

Der DPLL-Algorithmus ist ein in der Praxis sehr erfolgreicher Algorithmus, der die Wahrheitstafelmethode mit Resolution kombiniert.

Ähnlich wie bei dem Wahrheitstafelalgorithmus durchsucht der DPLL-Algorithmus systematisch den Raum aller möglichen Interpretationen und testet, ob diese die gegebene Klauselmenge erfüllen. Resolution wird dabei dazu verwendet, die Suche geschickt zu steuern und Dinge, die während der Suche bereits über die Klauselmenge „gelernt“ wurden, weiterzuverwenden.

Der DPLL-Algorithmus ist die Basis moderner SAT-Solver, die Klauselmengen, die aus Millionen von Klauseln und Hunderttausenden von Aussagensymbolen bestehen, auf Erfüllbarkeit testen können.

DPLL-Algorithmus

Eingabe: eine endliche Klauselmengemenge Γ (entspricht einer KNF-Formel)

1. Vereinfache Γ . % Details dazu: siehe nächste Folie
2. Falls $\Gamma = \emptyset$, gib „erfüllbar“ aus.
3. Falls $\emptyset \in \Gamma$, gib „unerfüllbar“ aus.
4. Wähle ein Literal λ .
5. % probiere aus, ob Γ ein Modell hat, bei dem das Literal λ erfüllt wird:
Löse rekursiv $\Gamma \cup \{\{\lambda\}\}$. Falls dies erfüllbar ist, gib „erfüllbar“ aus.
6. % probiere aus, ob Γ ein Modell hat, bei dem das Literal $\bar{\lambda}$ erfüllt wird:
Löse rekursiv $\Gamma \cup \{\{\bar{\lambda}\}\}$. Falls dies erfüllbar ist, gib „erfüllbar“ aus. Sonst gib „unerfüllbar“ aus.

Vereinfachungsheuristiken, die in Schritt 1. angewendet werden:

- **Unit Propagation:** Für alle „Einerklauseln“ $\{\lambda\} \in \Gamma$ (wobei λ ein Literal ist), bilde alle Resolventen von $\{\lambda\}$ mit anderen Klauseln und streiche anschließend alle Klauseln, die λ enthalten. Wiederhole dies, so lange es Einerklauseln gibt.

Präzise:

Für jede „Einerklausel“ $\{\lambda\} \in \Gamma$ tue Folgendes:

1. Ersetze jede Klausel $\gamma \in \Gamma$ durch die Klausel $\gamma \setminus \{\bar{\lambda}\}$.
2. Entferne aus Γ jede Klausel, die das Literal λ enthält.

Wiederhole dies, so lange es in Γ Einerklauseln gibt.

- **Pure Literal Rule:** Literale λ , deren Negat $\bar{\lambda}$ nirgendwo in der Klauselmenge auftaucht, können auf 1 gesetzt werden. Alle Klauseln, die ein solches Literal enthalten, sind dann wahr und können gestrichen werden.
- Streiche Klauseln, die Obermengen von anderen Klauseln sind (dies ist allerdings ineffizient und wird in der Praxis zumeist weggelassen).

Man sieht leicht, dass der DPLL-Algorithmus stets die korrekte Antwort gibt (d.h., er terminiert immer, und er gibt genau dann „erfüllbar“ aus, wenn die eingegebene Klauselmenge Γ erfüllbar ist).

Laufzeit des DPLL-Algorithmus:

$O(m \cdot 2^n)$ im Worst-Case, in der Praxis aber häufig sehr effizient.

Beispiel 2.62

Sei $\Gamma :=$

$$\begin{aligned} & \{ \{X_1, \neg X_5, \neg X_6, X_7\}, \{\neg X_1, X_2, \neg X_5\}, \{\neg X_1, \neg X_2, \neg X_3, \neg X_5, \neg X_6\}, \\ & \{X_1, X_2, \neg X_4, X_7\}, \{\neg X_4, \neg X_6, \neg X_7\}, \{X_3, \neg X_5, X_7\}, \\ & \{X_3, \neg X_4, \neg X_5\}, \{X_5, \neg X_6\}, \{X_5, X_4, \neg X_8\}, \\ & \{X_1, X_3, X_5, X_6, X_7\}, \{\neg X_7, X_8\}, \{\neg X_6, \neg X_7, \neg X_8\} \} \end{aligned}$$

Abschnitt 2.8:
Hornformeln

Hornklauseln und Hornformeln

Hornformeln sind spezielle aussagenlogische Formeln, die die Basis der logischen Programmierung bilden, und für die das Erfüllbarkeitsproblem effizient gelöst werden kann.

Definition 2.63

Eine **Hornklausel** ist eine disjunktive Klausel, in der höchstens ein positives Literal vorkommt.

Eine **Hornformel** ist eine Konjunktion endlich vieler Hornklauseln.

Beispiele

- $\{\neg X, \neg Y, \neg Z\}$ (bzw. $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$) ist eine Hornklausel.
- $\{\neg X, \neg Y, Z\}$ (bzw. $\neg X \vee \neg Y \vee Z$) ist eine Hornklausel.
- $\{\neg X, Y, Z\}$ (bzw. $\neg X \vee Y \vee Z$) ist keine Hornklausel.
- $\{X\}$ (bzw. X) ist eine Hornklausel.
- \emptyset ist eine Hornklausel.
- $(X \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge Y$ ist eine Hornformel.

Hornklauseln als Implikationen

- Eine Hornklausel der Form $\{\neg X_1, \dots, \neg X_{n-1}, X_n\}$ (bzw. $\neg X_1 \vee \dots \vee \neg X_{n-1} \vee X_n$) ist äquivalent zur Formel

$$(X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}) \rightarrow X_n.$$

Solche Klauseln werden auch „Regeln“ (oder „Prozedurklauseln“) genannt.

- Eine Hornklausel der Form $\{\neg X_1, \dots, \neg X_{n-1}\}$ ist äquivalent zur Formel

$$(X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}) \rightarrow \mathbf{0}.$$

Solche Klauseln werden auch „Zielklauseln“ (oder „Frageklauseln“) genannt.

- Eine Hornklausel der Form $\{X_1\}$ ist äquivalent zur Formel

$$\mathbf{1} \rightarrow X_1.$$

Solche Klauseln werden auch „Tatsachenklausel“ genannt.

- Die leere (Horn-)Klausel \emptyset ist unerfüllbar und daher äquivalent zur Formel

$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Der Streichungsalgorithmus

Der folgende Algorithmus löst das Erfüllbarkeitsproblem für Hornformeln in Polynomialzeit.

Wir geben zunächst den Algorithmus an, betrachten dann Beispielläufe davon, analysieren die Laufzeit und zeigen danach, dass der Algorithmus korrekt ist, d.h. stets die richtige Antwort gibt.

Streichungsalgorithmus

Eingabe: eine endliche Menge Γ von Hornklauseln

1. Wiederhole:
2. Falls $\emptyset \in \Gamma$, so halte mit Ausgabe „unerfüllbar“.
3. Falls Γ keine Tatsachenklausel (d.h. Klausel $\{X\}$ mit $X \in AS$) enthält, so halte mit Ausgabe „erfüllbar“.
% Γ wird erfüllt, indem jedes Aussagensymbol mit 0 belegt wird
4. Wähle eine Tatsachenklausel $\{X\} \in \Gamma$.
% Idee: Um Γ zu erfüllen, muss X mit dem Wert 1 belegt werden
5. Streiche $\neg X$ aus allen Klauseln $\delta \in \Gamma$, die das Literal $\neg X$ enthalten.
% Wenn X den Wert 1 hat, trägt $\neg X$ nichts zum Erfüllen einer Klausel bei
6. Streiche aus Γ alle Klauseln $\delta \in \Gamma$, die das Literal X enthalten (d.h. entferne aus Γ alle $\delta \in \Gamma$, für die gilt: $X \in \delta$).
% Wenn X den Wert 1 hat, sind solche Klauseln erfüllt

Beispiele 2.64

Wir wenden den Streichungsalgorithmus auf die beiden folgenden Mengen von Hornklauseln an.

$$(a) \quad \Gamma_a := \{ S \rightarrow \mathbf{0}, (P \wedge Q) \rightarrow R, (S \wedge R) \rightarrow \mathbf{0}, (U \wedge T \wedge Q) \rightarrow P, \\ (U \wedge T) \rightarrow Q, \mathbf{1} \rightarrow U, \mathbf{1} \rightarrow T \}$$

$$(b) \quad \Gamma_b := \{ (Q \wedge P) \rightarrow T, (U \wedge T \wedge Q) \rightarrow R, (U \wedge T) \rightarrow Q, \\ \mathbf{1} \rightarrow U, R \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{1} \rightarrow T \}$$

Laufzeit des Streichungsalgorithmus

Man sieht leicht, dass in jedem Schleifendurchlauf die Anzahl der Klauseln in Γ kleiner wird. Daher terminiert der Algorithmus nach maximal m Schleifendurchläufen, wobei m die Anzahl der Klauseln in der Eingabemenge Γ ist.

In jedem einzelnen Schleifendurchlauf betrachtet der Algorithmus alle Klauseln der aktuellen Klauselmenge und führt dabei $O(n)$ Schritte durch, wobei $n = \|\Gamma\|$ die Größe der Klauselmenge ist.

Insgesamt terminiert der Streichungsalgorithmus also nach $O(m \cdot n)$ Schritten, d.h. in Zeit polynomiell in der Größe von Γ .

Satz 2.65

Die Laufzeit des Streichungsalgorithmus ist $O(m \cdot n)$, wobei $m = |\Gamma|$ die Anzahl der Hornklauseln in der eingegebenen Menge Γ und $n = \|\Gamma\|$ die Größe von Γ ist.

Bemerkung

Eine Variante des Streichungsalgorithmus läuft sogar in Linearzeit, d.h. in Zeit $O(n)$.

Der Streichungsalgorithmus und Resolution

Lemma 2.66

Sei Γ_0 eine endliche Menge von Hornklauseln und δ eine Klausel, die zu irgendeinem Zeitpunkt während des Laufs des Streichungsalgorithmus bei Eingabe Γ_0 in der vom Algorithmus gespeicherten Menge Γ liegt. Dann gilt:

$$\Gamma_0 \vdash_R \delta.$$

Korrektheit des Streichungsalgorithmus

Satz 2.67

Der Streichungsalgorithmus ist korrekt.

Das heißt, bei Eingabe einer endlichen Menge Γ_0 von Hornklauseln hält der Algorithmus mit Ausgabe „erfüllbar“, falls Γ_0 erfüllbar ist, und mit Ausgabe „nicht erfüllbar“, falls Γ_0 unerfüllbar ist.

Kapitel 3:

Logik erster Stufe

Abschnitt 3.1:
Strukturen

Strukturen

Wir führen einen allgemeinen Strukturbegriff ein, der es uns erlaubt:

- mathematische Strukturen wie Gruppen, Körper, Vektorräume, Graphen, etc.
- und die gängigen Modelle der Informatik wie Transitionssysteme, endliche Automaten, relationale Datenbanken, Schaltkreise, etc.

zu beschreiben.

Signaturen

Definition 3.1

Eine **Signatur** (auch **Vokabular** oder **Symbolmenge**) ist eine Menge σ von **Relations-, Funktions- und/oder Konstantensymbolen**.

Jedes Relationsymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine **Stelligkeit** (bzw. **Arität**, engl. **arity**)

$$\text{ar}(R) \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{bzw.} \quad \text{ar}(f) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Notation

- In diesem Kapitel bezeichnet der griechische Buchstabe σ (in Worten: sigma) immer eine Signatur.
- Für Relationssymbole verwenden wir normalerweise Großbuchstaben wie R, P, Q, E , für Funktionssymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie f, g, h und für Konstantensymbole Kleinbuchstaben wie c, d .
- Gelegentlich verwenden wir als Relations- und Funktionssymbole auch Zeichen wie \leq (2-stelliges Relationssymbol) und $+, \cdot$ (2-stellige Funktionssymbole), und wir verwenden $\underline{0}, \underline{1}$ als Konstantensymbole.
- Die Stelligkeit eines Relations- oder Funktionssymbols deuten wir häufig an, indem wir sie mit Schrägstrich hinter das Symbol schreiben.

Beispiel

Die Notation $R/2$ deutet an, dass R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Strukturen

Definition 3.2

Eine σ -Struktur \mathcal{A} besteht aus folgenden Komponenten:

- einer nicht-leeren Menge A , dem **Universum** von \mathcal{A} (auch: **Träger**, engl. universe, domain),
- für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und für $k := \text{ar}(R)$ gibt es eine k -stellige Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^k$,
- für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ und für $k := \text{ar}(f)$ gibt es eine k -stellige Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^k \rightarrow A$, und
- für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ gibt es ein Element $c^{\mathcal{A}} \in A$.

Notation

- Wir beschreiben σ -Strukturen oft in Tupelschreibweise:

$$\mathcal{A} = (A, (S^{\mathcal{A}})_{S \in \sigma}).$$

Falls $\sigma = \{S_1, \dots, S_k\}$ endlich ist, schreiben wir auch

$$\mathcal{A} = (A, S_1^{\mathcal{A}}, \dots, S_k^{\mathcal{A}}).$$

- Wir bezeichnen σ -Strukturen meistens mit „kalligraphischen“ Buchstaben wie $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{W}, \dots$. Das Universum der Strukturen bezeichnen wir dann durch die entsprechenden lateinischen Großbuchstaben, also A, B, C, W, \dots .

Mengen

Für die leere Signatur $\sigma := \emptyset$ bestehen σ -Strukturen nur aus ihrem Universum, sind also einfach (nicht-leere) Mengen.

Graphen

In diesem Kapitel bezeichnet E immer ein zweistelliges Relationssymbol.

- Ein **gerichteter Graph** (kurz: **Digraph**) $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ mit Knotenmenge $V^{\mathcal{G}}$ und Kantenmenge $E^{\mathcal{G}}$ ist eine $\{E\}$ -Struktur. Das Universum ist die Knotenmenge $V^{\mathcal{G}}$.
- Einen **ungerichteten Graphen** $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ mit Knotenmenge $V^{\mathcal{G}}$ und Kantenmenge $E^{\mathcal{G}} \subseteq \{e \subseteq V^{\mathcal{G}} : |e| = 2\}$ repräsentieren wir durch eine $\{E\}$ -Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ mit Universum $A = V^{\mathcal{G}}$ und Relation $E^{\mathcal{A}} = \{(u, v) : \{u, v\} \in E^{\mathcal{G}}\}$. Insbesondere ist $E^{\mathcal{A}}$ *symmetrisch* und *irreflexiv* im Sinne der folgenden Definition.

Eigenschaften zweistelliger Relationen

Definition 3.3

Sei $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$, wobei $R^{\mathcal{A}}$ eine zweistellige Relation über der Menge A ist (d.h. $(A, R^{\mathcal{A}})$ ist ein gerichteter Graph).

(a) $R^{\mathcal{A}}$ heißt **reflexiv**, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \in R^{\mathcal{A}}$.

$R^{\mathcal{A}}$ heißt **irreflexiv**, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \notin R^{\mathcal{A}}$.

(b) $R^{\mathcal{A}}$ heißt **symmetrisch**, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

Wenn $(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$, dann ist auch $(b, a) \in R^{\mathcal{A}}$.

$R^{\mathcal{A}}$ heißt **antisymmetrisch**, wenn für alle $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt:

Wenn $(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$, dann $(b, a) \notin R^{\mathcal{A}}$.

(c) $R^{\mathcal{A}}$ heißt **transitiv**, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:

Wenn $(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$ und $(b, c) \in R^{\mathcal{A}}$, dann auch $(a, c) \in R^{\mathcal{A}}$.

(d) $R^{\mathcal{A}}$ heißt **konnex**, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$ oder $(b, a) \in R^{\mathcal{A}}$ oder $a = b$.

Äquivalenzrelationen

Eine **Äquivalenzrelation** auf einer Menge A ist eine 2-stellige Relation über A , die **reflexiv**, **transitiv** und **symmetrisch** ist.

Beispiele

- (a) **Gleichheit:** Für jede Menge M ist $\{(m, m) : m \in M\}$ eine Äquivalenzrelation auf M .
- (b) **Gleichmächtigkeit:** Für jede endliche Menge M und deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M) = \{N : N \subseteq M\}$ gilt: $\{(A, B) : A, B \subseteq M, |A| = |B|\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(M)$.
- (c) **Logische Äquivalenz:** Die Relation $\{(\varphi, \psi) : \varphi, \psi \in \text{AL}, \varphi \equiv \psi\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge AL aller aussagenlogischen Formeln.

Ordnungen

In diesem Kapitel bezeichnet \leq sei immer ein zweistelliges Relationssymbol. Für \leq verwenden wir Infixschreibweise, d.h., wir schreiben $x \leq^{\mathcal{A}} y$ statt $(x, y) \in \leq^{\mathcal{A}}$.

- (a) Eine **Präordnung** ist eine $\{\leq\}$ -Struktur $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$, bei der $\leq^{\mathcal{A}}$ reflexiv und transitiv ist.
- (b) Eine **partielle Ordnung** (oder **Halbordnung**) ist eine Präordnung \mathcal{A} , bei der $\leq^{\mathcal{A}}$ antisymmetrisch ist.
- (c) Eine **lineare** (oder **totale**) **Ordnung** ist eine partielle Ordnung \mathcal{A} , bei der $\leq^{\mathcal{A}}$ konnex ist.

Beispiele

- (a) Die „kleiner-gleich“ Relation auf \mathbb{N} (oder \mathbb{Z} oder \mathbb{R}) ist eine lineare Ordnung; die „größer-gleich“ auch.
- (b) Für jede Menge M ist die **Teilmengenrelation** \subseteq eine partielle Ordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$; aber keine lineare Ordnung, sofern M mindestens zwei Elemente besitzt. Dasselbe gilt für die **Obermengenrelation** \supseteq .
- (c) Die **Folgerungsrelation für aussagenlogische Formeln**: $\{(\varphi, \psi) : \varphi, \psi \in \text{AL}, \varphi \models \psi\}$ ist eine Präordnung auf der Menge AL, aber keine partielle Ordnung.

Arithmetische Strukturen

$+$ und \cdot seien immer zweistellige Funktionssymbole, für die wir Infixschreibweise verwenden. $\underline{0}$ und $\underline{1}$ seien Konstantensymbole.

- Der **Körper der reellen Zahlen** ist die $\{+, \cdot, \underline{0}, \underline{1}\}$ -Struktur $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, so dass $A_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}$, $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}$ und $\cdot^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}$ sind die normale Addition bzw. Multiplikation auf \mathbb{R} , und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} := 1$.
- Der **Ring der ganzen Zahlen** ist die $\{+, \cdot, \underline{0}, \underline{1}\}$ -Struktur $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$, so dass $A_{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}$, $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}}$ und $\cdot^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}}$ sind die normale Addition bzw. Multiplikation auf \mathbb{Z} , und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}} := 1$.
- Das **Standardmodell der Arithmetik** ist die $\{+, \cdot, \leq, \underline{0}, \underline{1}\}$ -Struktur $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$, so dass $A_{\mathbb{N}} := \mathbb{N}$ ist; die Funktionen $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ und $\cdot^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ und die Relation $\leq^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ sind die normale Addition, Multiplikation bzw. Ordnung auf \mathbb{N} , und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}} := 1$.
- Der **zweielementige Körper** ist die $\{+, \cdot, \underline{0}, \underline{1}\}$ -Struktur \mathcal{F}_2 mit Universum $F_2 := \{0, 1\}$, den Funktionen $+^{\mathcal{F}_2}$ und $\cdot^{\mathcal{F}_2}$ der Addition bzw. Multiplikation modulo 2, und $\underline{0}^{\mathcal{F}_2} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{F}_2} := 1$.

Wörter als Strukturen

Sei Σ ein endliches, nicht-leeres Alphabet. Für jedes $a \in \Sigma$ sei P_a ein einstelliges Relationssymbol, und es sei

$$\sigma_\Sigma := \{\leq\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\}.$$

Für jedes nicht-leere Wort $w := w_1 \cdots w_n \in \Sigma^*$ mit $w_1, \dots, w_n \in \Sigma$ sei \mathcal{A}_w die σ_Σ -Struktur

- mit Universum $A_w := [n]$, für die gilt:
- $\leq^{\mathcal{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $[n]$,
d.h., $\leq^{\mathcal{A}_w} = \{ (i, j) : i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq j \leq n \}$,
- Für jedes $a \in \Sigma$ ist $P_a^{\mathcal{A}_w} := \{ i \in [n] : w_i = a \}$.

Beispiel

Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$. Für $w := abacaba$ ist \mathcal{A}_w die folgende σ_Σ -Struktur:

- $A_w = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\leq^{\mathcal{A}_w} = \{ (i, j) : i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq j \leq 7 \}$
- $P_a^{\mathcal{A}_w} = \{1, 3, 5, 7\}$, $P_b^{\mathcal{A}_w} = \{2, 6\}$, $P_c^{\mathcal{A}_w} = \{4\}$.

Wortstrukturen

Eine **Wortstruktur über Σ** ist eine σ_Σ -Struktur \mathcal{A} für die gilt:

- das Universum A von \mathcal{A} ist endlich,
- $(A, \leq^{\mathcal{A}})$ ist eine lineare Ordnung,
- für jedes $i \in A$ gibt es **genau ein** $a \in \Sigma$, so dass $i \in P_a^{\mathcal{A}}$.

Beispiel 3.4

Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$. Die σ_Σ -Struktur \mathcal{B} mit

- Universum $B = \{\diamond, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$,
- linearer Ordnung $\leq^{\mathcal{B}}$, die besagt, dass $\diamond < \heartsuit < \spadesuit < \clubsuit$ ist, d.h.
 $\leq^{\mathcal{B}} = \{(\diamond, \diamond), (\diamond, \heartsuit), (\diamond, \spadesuit), (\diamond, \clubsuit), (\heartsuit, \heartsuit), (\heartsuit, \spadesuit), (\heartsuit, \clubsuit), (\spadesuit, \spadesuit), (\spadesuit, \clubsuit), (\clubsuit, \clubsuit)\}$,
- $P_a^{\mathcal{B}} = \{\diamond, \clubsuit\}$
- $P_b^{\mathcal{B}} = \{\heartsuit, \spadesuit\}$,
- $P_c^{\mathcal{B}} = \emptyset$,

ist eine Wortstruktur, die das Wort $w = abba$ repräsentiert.

Relationale Datenbanken

- **Relationale Datenbanken** bestehen aus endlich vielen endlichen Tabellen.
- Jede solche Tabelle lässt sich als Relation auffassen, die Zeilen der Tabelle entsprechen dabei den Tupeln in der Relation.
- Eine relationale Datenbank entspricht dann einer endlichen Struktur, deren Universum aus allen potentiellen Einträgen in einzelnen Zellen der Tabellen besteht, und die für jede Tabelle in der Datenbank eine Relation enthält.

Beispiel: Eine Kinodatenbank

<i>Kino</i>			
Name	Adresse	Stadtteil	Telefonnummer
Babylon	Dresdner Str. 126	Kreuzberg	030 61 60 96 93
Casablanca	Friedenstr. 12-13	Adlershof	030 67 75 75 2
Filmtheater am Friedrichshain	Bötzowstr. 1-5	Prenzlauer Berg	030 42 84 51 88
Kino International	Karl-Marx-Allee 33	Mitte	030 24 75 60 11
Movimento	Kotbusser Damm 22	Kreuzberg	030 692 47 85
Urania	An der Urania 17	Schöneberg	030 21 89 09 1

<i>Film</i>		
Name	Regisseur	Schauspieler
Alien	Ridley Scott	Sigourney Weaver
Blade Runner	Ridley Scott	Harrison Ford
Blade Runner	Ridley Scott	Sean Young
Brazil	Terry Gilliam	Jonathan Pryce
Brazil	Terry Gilliam	Kim Greist
Casablanca	Michael Curtiz	Humphrey Bogart
Casablanca	Michael Curtiz	Ingrid Bergmann
Gravity	Alfonso Cuaron	Sandra Bullock
Gravity	Alfonso Cuaron	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	Matt Damon
Resident Evil	Paul Anderson	Milla Jovovich
Terminator	James Cameron	Arnold Schwarzenegger
Terminator	James Cameron	Linda Hamilton
Terminator	James Cameron	Michael Biehn
...

<i>Programm</i>		
Kino	Film	Zeit
Babylon	Casablanca	17:30
Babylon	Gravity	20:15
Casablanca	Blade Runner	15:30
Casablanca	Alien	18:15
Casablanca	Blade Runner	20:30
Casablanca	Resident Evil	20:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	20:00
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	21:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	23:00
Kino International	Casablanca	18:00
Kino International	Brazil	20:00
Kino International	Brazil	22:00
Movimiento	Gravity	17:00
Movimiento	Gravity	19:30
Movimiento	Alien	22:00
Urania	Monuments Men	17:00
Urania	Monuments Men	20:00

Die Kinodatenbank als Struktur

Signatur: $\sigma_{\text{KINO}} := \{ R_{\text{Kino}}/4, R_{\text{Film}}/3, R_{\text{Prog}}/3 \} \cup \{ 'c' : c \in \text{ASCII}^* \}$

Die Kinodatenbank wird dargestellt als σ_{KINO} -Struktur \mathcal{D} .

Universum:

$$\mathcal{D} := \text{ASCII}^* \supseteq \{ \text{Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93, Casablanca, \dots, 20:00} \}.$$

Relationen:

$$R_{\text{Kino}}^{\mathcal{D}} := \{ (\text{Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93}, \\ (\text{Casablanca, Friedenstr. 12-13, Adlershof, 030 67 75 75 2}), \\ \dots, \\ (\text{Urania, An der Urania 17, Schöneberg, 030 21 89 09 1}) \}$$

$$R_{\text{Film}}^{\mathcal{D}} := \{ (\text{Alien, Ridley Scott, Sigourney Weaver}), \\ (\text{Blade Runner, Ridley Scott, Harrison Ford}), \dots \}$$

$$R_{\text{Prog}}^{\mathcal{D}} := \{ (\text{Babylon, Casablanca, 17:30}), \\ (\text{Babylon, Gravity, 20:15}), \dots \}.$$

Konstanten: $'c'^{\mathcal{D}} := c$, für jedes $c \in \text{ASCII}^*$.

D.h.: jedes Konstantensymbol wird durch den zwischen den Hochkommas stehenden Text interpretiert.

Restriktionen und Expansionen

Definition 3.5

Seien σ und τ Signaturen mit $\sigma \subseteq \tau$.

- (a) Die σ -**Restriktion** einer τ -Struktur \mathcal{B} ist die σ -Struktur $\mathcal{B}|_\sigma$ mit $B|_\sigma := B$ und $S^{\mathcal{B}|_\sigma} := S^{\mathcal{B}}$ für jedes $S \in \sigma$.

D.h.: Ist $\mathcal{B} = (B, (S^{\mathcal{B}})_{S \in \tau})$, so ist $\mathcal{B}|_\sigma = (B, (S^{\mathcal{B}})_{S \in \sigma})$.

- (b) Eine τ -Struktur \mathcal{B} ist eine τ -**Expansion** einer σ -Struktur \mathcal{A} , wenn $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_\sigma$.

Beispiel

Die $\{+, \underline{0}\}$ -**Restriktion des Standardmodells der Arithmetik** ist die Struktur

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}}|_{\{+, \underline{0}\}} = (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}, \underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}),$$

wobei $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ die natürliche Addition auf \mathbb{N} und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ die natürliche Zahl 0 ist.

Man bezeichnet diese Struktur als das **Standardmodell der Presburger Arithmetik**.

Prinzipielle Gleichheit von Strukturen

Frage: Wann sind zwei σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} „prinzipiell gleich“?

Antwort: Wenn \mathcal{B} aus \mathcal{A} entsteht, indem man die Elemente des Universums von \mathcal{A} umbenennt.

Dies wird in der folgenden Definition präzisiert.

Isomorphismen

Definition 3.6

Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} σ -Strukturen. Ein **Isomorphismus** von \mathcal{A} nach \mathcal{B} ist eine Abbildung $\pi : A \rightarrow B$ mit folgenden Eigenschaften:

1. π ist **bijektiv**.
2. Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alle k -stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle k -Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff (\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

3. Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt:

$$\pi(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}.$$

4. Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alle k -stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle k -Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$\pi(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k)) = f^{\mathcal{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)).$$

Isomorphie

Notation

Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} σ -Strukturen. Wir schreiben $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, um anzudeuten, dass π ein Isomorphismus von \mathcal{A} nach \mathcal{B} ist.

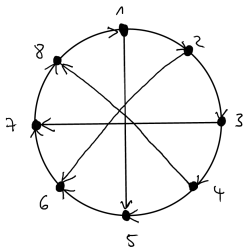
Definition 3.7

Zwei σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} heißen **isomorph** (wir schreiben: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), wenn es einen Isomorphismus von \mathcal{A} nach \mathcal{B} gibt.

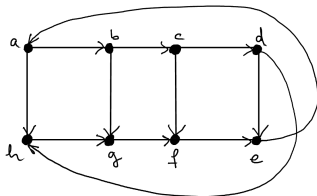
Beispiele 3.8

- (a) Seien A, B nicht-leere Mengen. Dann sind die \emptyset -Strukturen $\mathcal{A} := (A)$ und $\mathcal{B} := (B)$ genau dann isomorph, wenn A und B gleichmächtig sind (d.h. es gibt eine Bijektion von A nach B).

(b) Seien $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, E^{\mathcal{B}})$ die beiden folgenden Digraphen:



$$\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$$



$$\mathcal{B} = (B, E^{\mathcal{B}})$$

Dann ist $\pi : A \rightarrow B$ mit

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(i)$	a	b	c	d	h	g	f	e

ein Isomorphismus von \mathcal{A} nach \mathcal{B} .

(c) Sei $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und

$$\leq^{\mathcal{A}} = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq j \leq 4\},$$

und sei $\mathcal{B} = (B, \leq^{\mathcal{B}})$ mit $B = \{\diamond, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, wobei $\leq^{\mathcal{B}}$ wie in Beispiel 3.4 definiert ist. Skizze:



Dann ist $\pi : A \rightarrow B$ mit

i	1	2	3	4
$\pi(i)$	\diamond	\heartsuit	\spadesuit	\clubsuit

ein Isomorphismus von \mathcal{A} nach \mathcal{B} .

Allgemein gilt: Sind A und B endliche Mengen mit $|A| = |B|$, und sind $\leq^{\mathcal{A}}$ und $\leq^{\mathcal{B}}$ lineare Ordnungen auf A und B , so ist die Abbildung $\pi : A \rightarrow B$, die das (bzgl. $\leq^{\mathcal{A}}$) kleinste Element in A auf das (bzgl. $\leq^{\mathcal{B}}$) kleinste Element in B abbildet, und allgemein für jedes $i \in \{1, \dots, |A|\}$ das (bzgl. $\leq^{\mathcal{A}}$) i -kleinste Element in A auf das (bzgl. $\leq^{\mathcal{B}}$) i -kleinste Element in B abbildet, ein Isomorphismus von $\mathcal{A} := (A, \leq^{\mathcal{A}})$ nach $\mathcal{B} := (B, \leq^{\mathcal{B}})$.

- (d) Sind $\leq^{\mathbb{N}}$ und $\leq^{\mathbb{Z}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf \mathbb{N} und \mathbb{Z} , so sind die $\{\leq\}$ -Strukturen $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}})$ und $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, \leq^{\mathbb{Z}})$ **nicht isomorph** (kurz: $\mathcal{N} \not\cong \mathcal{Z}$).

Beweis: Angenommen, $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist ein Isomorphismus von \mathcal{N} nach \mathcal{Z} . Sei $z := \pi(0)$. In \mathbb{Z} gibt es ein Element $z' \in \mathbb{Z}$ mit $z' < z$ (z.B. $z' = z - 1$). Da π surjektiv ist, muss es ein $n' \in \mathbb{N}$ geben, so dass $\pi(n') = z'$. Wegen $z' \neq z$ muss $n' \neq 0$ gelten (da π injektiv ist). Somit gilt:

$$0 \leq^{\mathbb{N}} n' \quad \text{aber} \quad z \not\leq^{\mathbb{Z}} z'.$$

Also ist π kein Isomorphismus von \mathcal{N} nach \mathcal{Z} . Widerspruch!

(e) Sei $\sigma := \{f, c\}$, wobei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, wobei gilt:

- $A := \mathbb{N}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen,
- $f^{\mathcal{A}} := +^{\mathbb{N}}$ ist die natürliche Addition auf \mathbb{N} ,
- $c^{\mathcal{A}} := 0$ ist die natürliche Zahl 0

und sei $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$, wobei

- $B := \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller Zweierpotenzen,
- $f^{\mathcal{B}} : B \times B \rightarrow B$ ist die Funktion mit

$$f^{\mathcal{B}}(b_1, b_2) := b_1 \cdot b_2, \quad \text{für alle } b_1, b_2 \in B$$

- $c^{\mathcal{B}} := 1 = 2^0 \in B$.

Dann gilt: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, und die Abbildung $\pi : A \rightarrow B$ mit $\pi(n) := 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ein **Isomorphismus von \mathcal{A} nach \mathcal{B}** , denn:

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation

Lemma 3.9

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller σ -Strukturen. D.h.:
Für alle σ -Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ gilt:

1. $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ (Reflexivität),
2. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \implies \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$ (Symmetrie),
3. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \cong \mathcal{C} \implies \mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ (Transitivität).

Beweis: Übung.

Abschnitt 3.2:

Terme der Logik erster Stufe

Individuenvariablen

Definition 3.10

Eine **Individuenvariable** (auch: **Variable erster Stufe**; kurz: **Variable**) hat die Form v_i für ein $i \in \mathbb{N}$.

Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit VAR, d.h.

$$\text{VAR} = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots\} = \{v_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Terme der Logik erster Stufe

Definition 3.11

- (a) Für eine Signatur σ sei A_{σ} -Terme das **Alphabet**, das aus allen Elementen in **VAR**, allen **Konstanten- und Funktionssymbolen** in σ , den Klammern $(,)$ und dem Komma $,$ besteht.
- (b) Die Menge T_{σ} aller σ -Terme ist die wie folgt rekursiv definierte Teilmenge von A_{σ} -Terme^{*}:

Basisregeln:

- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c \in T_{\sigma}$.
- Für jede Variable $x \in \text{VAR}$ ist $x \in T_{\sigma}$.

Rekursive Regel:

- Für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ und für $k := \text{ar}(f)$ gilt:
Sind $t_1 \in T_{\sigma}, \dots, t_k \in T_{\sigma}$, so ist auch $f(t_1, \dots, t_k) \in T_{\sigma}$.

- (c) Die Menge aller **Terme der Logik der ersten Stufe** ist $T := \bigcup_{\sigma \text{ Signatur}} T_{\sigma}$.

Beispiele

Sei $\sigma := \{ f/2, c \}$.

Folgende Worte sind σ -Terme:

$$c, \quad v_4, \quad f(c, c), \quad f(c, f(c, v_0)).$$

Folgende Worte sind keine σ -Terme:

$$0, \quad f(0, c), \quad f(v_0, c, v_1), \quad f^A(2, 3).$$

Belegungen und Interpretationen

Definition 3.12

Sei σ eine Signatur.

(a) Eine **Belegung** in einer σ -Struktur \mathcal{A} ist eine Abbildung $\beta : \text{VAR} \rightarrow A$.

D.h.: β ordnet jeder Variablen $x \in \text{VAR}$ ein Element $\beta(x)$ aus dem Universum von \mathcal{A} zu.

(b) Eine **σ -Interpretation** ist ein Paar

$$\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta),$$

bestehend aus einer σ -Struktur \mathcal{A} und einer Belegung β in \mathcal{A} .

Die Auswertung von Termen in Interpretationen

Wir wollen Terme nun in Interpretationen „auswerten“.

Die **Auswertung von** Term t in einer Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ soll dasjenige **Element aus \mathcal{A} liefern**, das man erhält, wenn man

- die in t vorkommenden **Variablen** gemäß der Belegung β interpretiert,
- die in t vorkommenden Konstantensymbole c gemäß ihrer Interpretation $c^{\mathcal{A}}$ in \mathcal{A} belegt,
- die in t vorkommenden Funktionssymbole f gemäß ihrer Interpretation $f^{\mathcal{A}}$ in \mathcal{A} belegt

und dann nach und nach den resultierenden Term ausrechnet.

Dies wird in der folgenden Definition präzisiert.

Semantik von σ -Termen

Definition 3.13

Sei σ eine Signatur. Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $\llbracket \cdot \rrbracket$, die jedem σ -Term t und jeder σ -Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen Wert $\llbracket t \rrbracket^{\mathcal{I}} \in \mathcal{A}$ zuordnet:

- Für alle $x \in \text{VAR}$ ist $\llbracket x \rrbracket^{\mathcal{I}} := \beta(x)$.
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $\llbracket c \rrbracket^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$.
- Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$, und für alle σ -Terme $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$ gilt:

$$\llbracket f(t_1, \dots, t_k) \rrbracket^{\mathcal{I}} := f^{\mathcal{A}}(\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{I}}, \dots, \llbracket t_k \rrbracket^{\mathcal{I}}).$$

Beispiel

Sei $\sigma = \{ f/2, c \}$, und sei $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ die σ -Struktur mit $A = \mathbb{N}$, $f^{\mathcal{A}} = +^{\mathbb{N}}$ (die Addition auf den natürlichen Zahlen) und $c^{\mathcal{A}} = 0$ (die natürliche Zahl 0).

Sei $\beta : \text{VAR} \rightarrow A$ eine Belegung mit $\beta(v_1) = 1$ und $\beta(v_2) = 7$, und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$.

Sei t der σ -Term $f(v_2, f(v_1, c))$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \llbracket t \rrbracket^{\mathcal{I}} &= f^{\mathcal{A}}\left(\beta(v_2), f^{\mathcal{A}}(\beta(v_1), c^{\mathcal{A}})\right) \\
 &= f^{\mathcal{A}}\left(7, f^{\mathcal{A}}(1, 0)\right) \\
 &= \left(7 + (1 + 0)\right) \\
 &= 8.
 \end{aligned}$$

Abschnitt 3.3:

Syntax der Logik erster Stufe

Vergleich zwischen Aussagenlogik und Logik erster Stufe

Die Logik erster Stufe übernimmt, verändert und erweitert die Syntax der Aussagenlogik.

- Was gleich bleibt:
 - Die Junktoren \neg , \wedge , \vee , \rightarrow werden übernommen.
- Was sich verändert:
 - Variablen stehen nicht mehr für „wahre“ oder „falsche“ Aussagen, sondern für Elemente im Universum einer σ -Struktur.
 - Variablen sind keine atomaren Formeln mehr.
- Was neu hinzukommt:
 - Es gibt Quantoren \exists und \forall (für „es existiert“ und „für alle“).
 - Es gibt Symbole für Elemente aus der Signatur σ .
 - Es können σ -Terme benutzt werden, um Elemente im Universum einer σ -Struktur zu bezeichnen.

Das Alphabet der Logik erster Stufe

Definition 3.14

Sei σ eine Signatur.

Das **Alphabet** $A_{FO[\sigma]}$ der Logik erster Stufe über σ besteht aus

- allen Symbolen in $A_{\sigma\text{-Terme}}$,
- allen Symbolen in σ ,
- den Quantoren \exists (Existenzquantor) und \forall (Allquantor),
- dem Gleichheitssymbol $=$,
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.

D.h.:

$$A_{FO[\sigma]} = \text{VAR} \cup \sigma \cup \{\exists, \forall\} \cup \{=\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\} \cup \{(,)\} \cup \{, \}.$$

Syntax der Logik erster Stufe

Definition 3.15

Sei σ eine Signatur. Die Menge $\text{FO}[\sigma]$ aller **Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ** (kurz: $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln; „FO“ steht für die englische Bezeichnung der Logik erster Stufe: first-order logic) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A_{\text{FO}[\sigma]}^*$:

Basisregeln:

- Für alle σ -Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:

$$t_1 = t_2 \in \text{FO}[\sigma].$$

- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und für alle σ -Terme t_1, \dots, t_k in T_σ gilt:

$$R(t_1, \dots, t_k) \in \text{FO}[\sigma].$$

$\text{FO}[\sigma]$ -Formeln der Form $t_1 = t_2$ oder $R(t_1, \dots, t_k)$ heißen **atomare σ -Formeln**.

Rekursive Regeln:

- Ist $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, so ist auch $\neg\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.
- Ist $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, so ist auch
 - $(\varphi \wedge \psi) \in \text{FO}[\sigma]$,
 - $(\varphi \vee \psi) \in \text{FO}[\sigma]$,
 - $(\varphi \rightarrow \psi) \in \text{FO}[\sigma]$.
- Ist $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ und $x \in \text{VAR}$, so ist auch
 - $\exists x \varphi \in \text{FO}[\sigma]$,
 - $\forall x \varphi \in \text{FO}[\sigma]$.

Beispiel 3.16

Sei $\sigma = \{ f/2, c \}$.

Folgende Worte aus $A_{\text{FO}[\sigma]}^*$ sind $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln:

- $f(v_0, v_1) = c$ (atomare σ -Formel)
- $\forall v_2 f(v_2, c) = v_2$
- $\neg \exists v_3 (f(v_3, v_3) = v_3 \wedge \neg v_3 = c)$

Folgende Worte sind keine $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln:

- $(f(v_0, v_1) = c)$
- $(\exists v_2 f(v_2, c) = v_2)$
- $f(f(c, c), v_1)$ (ist ein σ -Term, aber keine $\text{FO}[\sigma]$ -Formel)
- $\exists c f(v_0, c) = v_0$

Beispiel 3.17

Sei $\sigma = \{E/2\}$.

Folgendes ist eine FO[σ]-Formel:

$$\forall v_0 \forall v_1 \left((E(v_0, v_1) \wedge E(v_1, v_0)) \rightarrow v_0 = v_1 \right)$$

Intuition zur Semantik:

In einem gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ sagt diese Formel Folgendes aus:

„Für alle Knoten $a_0 \in A$ und
für alle Knoten $a_1 \in A$ gilt:
falls $(a_0, a_1) \in E^{\mathcal{A}}$ und $(a_1, a_0) \in E^{\mathcal{A}}$, so ist $a_0 = a_1$.“

Die Formel sagt in einem Digraph $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ also aus, dass die Kantenrelation $E^{\mathcal{A}}$ antisymmetrisch ist.

Notation

- Statt mit v_0, v_1, v_2, \dots bezeichnen wir Variablen oft auch mit x, y, z, \dots oder mit Varianten wie x', y_1, y_2, \dots .
- Ähnlich wie bei der Aussagenlogik schreiben wir $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ als Abkürzung für die Formel $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$.
- Die Menge aller **Formeln der Logik der ersten Stufe** ist

$$\text{FO} := \bigcup_{\sigma \text{ Signatur}} \text{FO}[\sigma].$$

Abschnitt 3.4:

Semantik der Logik erster Stufe

Bevor wir die Semantik der Logik erster Stufe formal definieren, betrachten wir zunächst einige Beispiele, um ein intuitives Verständnis der Semantik der Logik erster Stufe zu erlangen.

Beispiele zur Semantik der Logik erster Stufe

Gerichtete Graphen

Beispiel 3.18

Sei $\sigma = \{E/2\}$.

(a) Die FO[σ]-Formel

$$\varphi := \forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$$

besagt:

„Für alle Knoten x und für alle Knoten y gilt: Falls es eine Kante von x nach y gibt, so gibt es auch eine Kante von y nach x .“

Für jeden Digraphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt daher:

$$\mathcal{A} \text{ erfüllt } \varphi \iff E^{\mathcal{A}} \text{ ist symmetrisch.}$$

Umgangssprachlich sagen wir auch: „Die Formel φ **sagt in einem Digraphen \mathcal{A} aus**, dass dessen Kantenrelation symmetrisch ist.“

- (b) Die folgende FO[σ]-Formel drückt aus, dass es von Knoten x zu Knoten y einen Weg der Länge 3 gibt:

$$\varphi(x, y) := \exists z_1 \exists z_2 \left((E(x, z_1) \wedge E(z_1, z_2)) \wedge E(z_2, y) \right).$$

- (c) Die FO[σ]-Formel

$$\forall x \forall y \exists z_1 \exists z_2 \left((E(x, z_1) \wedge E(z_1, z_2)) \wedge E(z_2, y) \right)$$

sagt in einem Digraph \mathcal{A} aus, dass es zwischen je 2 Knoten einen Weg der Länge 3 gibt.

Verwandtschaftsbeziehungen

Um Verwandtschaftsbeziehungen zu modellieren, können wir eine Signatur σ nutzen, die aus den folgenden Symbolen besteht:

- 1-stellige Funktionssymbole *Vater*, *Mutter*
(Bedeutung: $x = \text{Mutter}(y)$ besagt: „ x ist die Mutter von y “.)
- 2-stellige Relationssymbole *Geschwister*, *Vorfahr*
(Bedeutung: $\text{Geschwister}(x, y)$ besagt, dass x und y Geschwister sind;
 $\text{Vorfahr}(x, y)$ besagt, dass x ein Vorfahr von y ist.)

Generelles Wissen über Verwandtschaftsbeziehungen lässt sich durch Formeln der Logik erster Stufe repräsentieren, z.B.:

- „Personen mit gleichem Vater und gleicher Mutter sind Geschwister“:

$$\forall x \forall y \left(\left(\left(\text{Vater}(x) = \text{Vater}(y) \wedge \text{Mutter}(x) = \text{Mutter}(y) \right) \wedge \neg x = y \right) \rightarrow \text{Geschwister}(x, y) \right)$$

- „Eltern sind gerade die unmittelbaren Vorfahren“:

$$\forall x \forall y \left((x = \text{Vater}(y) \vee x = \text{Mutter}(y)) \leftrightarrow (\text{Vorfahr}(x, y) \wedge \neg \exists z (\text{Vorfahr}(x, z) \wedge \text{Vorfahr}(z, y))) \right)$$

- „Die Relation *Vorfahr* ist transitiv“:

$$\forall x \forall y \forall z \left((\text{Vorfahr}(x, y) \wedge \text{Vorfahr}(y, z)) \rightarrow \text{Vorfahr}(x, z) \right)$$

- Die folgende Formel $\varphi(x, y)$ besagt „ x ist Tante oder Onkel von y “:

$$\varphi(x, y) := \exists z \left(\text{Geschwister}(x, z) \wedge (z = \text{Mutter}(y) \vee z = \text{Vater}(y)) \right)$$

- Die folgende Formel $\psi(x)$ besagt „ x ist Vater von genau 2 Kindern“:

$$\psi(x) := \exists y_1 \exists y_2 \left(\left((x = \text{Vater}(y_1) \wedge x = \text{Vater}(y_2)) \wedge \neg y_1 = y_2 \right) \wedge \forall z (x = \text{Vater}(z) \rightarrow (z = y_1 \vee z = y_2)) \right)$$

Formale Definition der Semantik der Logik erster Stufe

Um die formale Definition der Semantik der Logik erster Stufe angeben zu können, benötigen wir noch folgende Begriffe:

Notation

- Ist β eine Belegung in einer σ -Struktur \mathcal{A} , ist $x \in \text{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei

$$\beta_x^a$$

die Belegung mit $\beta_x^a(x) = a$ und $\beta_x^a(y) = \beta(y)$ für alle $y \in \text{VAR} \setminus \{x\}$.

- Ist $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ -Interpretation, ist $x \in \text{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei

$$\mathcal{I}_x^a := (\mathcal{A}, \beta_x^a).$$

Semantik der Logik erster Stufe

Definition 3.19

Sei σ eine Signatur. Rekursiv über den Aufbau von $\text{FO}[\sigma]$ definieren wir eine Funktion $\llbracket \cdot \rrbracket$, die jeder $\text{FO}[\sigma]$ -Formel φ und jeder σ -Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen **Wahrheitswert** (kurz: **Wert**) $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} \in \{0, 1\}$ zuordnet:

Rekursionsanfang:

- Für alle σ -Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:

$$\llbracket t_1 = t_2 \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{I}} = \llbracket t_2 \rrbracket^{\mathcal{I}} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und für alle σ -Terme $t_1, \dots, t_k \in \text{T}_\sigma$ gilt:

$$\llbracket R(t_1, \dots, t_k) \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } (\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{I}}, \dots, \llbracket t_k \rrbracket^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Rekursionsschritt:

- Ist $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ und ist $x \in \text{VAR}$, so ist

$$\llbracket \exists x \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls es (mind.) ein } a \in A \text{ gibt, so dass } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}_x^a} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket \forall x \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls für jedes } a \in A \text{ gilt: } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}_x^a} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die Semantik der Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ ist wie in der Aussagenlogik definiert, d.h. für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\llbracket \neg\varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket (\varphi \wedge \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket (\varphi \vee \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 0, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \text{ und } \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket (\varphi \rightarrow \psi) \rrbracket^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 0, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 3.20

Sei $\sigma = \{E/2\}$. Betrachte die FO[σ]-Formel

$$\varphi := \forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$$

Für jede σ -Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ gilt:

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 &\iff \text{für alle } a \in A \text{ gilt: } \llbracket \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x)) \rrbracket^{\mathcal{I}}_{x^a} = 1 \\ &\iff \text{für alle } a \in A \text{ gilt: für alle } b \in A \text{ gilt:} \\ &\quad \llbracket (E(x, y) \rightarrow E(y, x)) \rrbracket^{\mathcal{I}}_{x^a y^b} = 1 \\ &\iff \text{für alle } a \in A \text{ und alle } b \in A \text{ gilt:} \\ &\quad \text{Falls } \llbracket E(x, y) \rrbracket^{\mathcal{I}}_{x^a y^b} = 1, \text{ so } \llbracket E(y, x) \rrbracket^{\mathcal{I}}_{x^a y^b} = 1 \\ &\iff \text{für alle } a \in A \text{ und alle } b \in B \text{ gilt:} \\ &\quad \text{Falls } (a, b) \in E^{\mathcal{A}}, \text{ so } (b, a) \in E^{\mathcal{A}} \\ &\iff E^{\mathcal{A}} \text{ ist symmetrisch} \end{aligned}$$

Die Modellbeziehung

Definition 3.21

Sei σ eine Signatur.

- (a) Eine σ -Interpretation \mathcal{I} *erfüllt* eine Formel $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ (wir schreiben: $\mathcal{I} \models \varphi$), wenn $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$.
- (b) Eine σ -Interpretation \mathcal{I} *erfüllt* eine Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ (wir schreiben: $\mathcal{I} \models \Phi$), wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt.
- (c) Ein *Modell* einer Formel φ (bzw. einer Formelmenge Φ) ist eine Interpretation \mathcal{I} mit $\mathcal{I} \models \varphi$ (bzw. $\mathcal{I} \models \Phi$).

Konventionen

- Terme bezeichnen wir mit t, s und Varianten s', t_1, t_2, \dots
- Formeln bezeichnen wir mit φ, ψ, χ und Varianten $\psi', \varphi_1, \varphi_2, \dots$
- Formelmengen bezeichnen wir mit Φ, Ψ und Varianten $\Psi', \Phi_1, \Phi_2, \dots$

Subformeln, Subterme und Syntaxbäume

- Eine Formel ψ ist **Subformel** einer Formel φ , wenn ψ als Teilwort in φ vorkommt (insbes. ist jede Formel eine Subformel von sich selbst).

Beispiel: $\psi := E(v_0, v_1)$ ist Subformel der Formel $\exists v_0 \forall v_1 E(v_0, v_1)$

- Ein Term s ist **Subterm** eines Terms t , wenn s als Teilwort in t vorkommt (insbes. ist jeder Term ein Subterm von sich selbst).

Beispiel: $f(c, c)$ ist Subterm des Terms $f(v_0, f(c, c))$.

- Sei $\xi \in T \cup FO$, d.h. ξ ist ein Term oder eine Formel der Logik erster Stufe.
 - Ähnlich wie bei aussagenlogischen Formeln können wir einen **Syntaxbaum** für ξ definieren.
 - Das **Lemma über die eindeutige Lesbarkeit von Termen und Formeln** besagt, dass jeder Term und jede Formel genau einen Syntaxbaum hat.
 - Die **Subterme** von ξ (falls $\xi \in T$) bzw. **Subformeln** von ξ (falls $\xi \in FO$) sind dann alle Terme bzw. Formeln, die im Syntaxbaum vorkommen.

Das Isomorphielemma

Das **Isomorphielemma** besagt, dass isomorphe Objekte (Strukturen bzw. Interpretationen) dieselben Formeln der Logik erster Stufe erfüllen.

Um diese Aussage präzise formulieren zu können, benötigen wir die folgende Notation.

Isomorphismen, Belegungen und Interpretationen

Definition 3.22

Sei σ eine Signatur, seien \mathcal{A}, \mathcal{B} isomorphe σ -Strukturen und sei π ein Isomorphismus von \mathcal{A} nach \mathcal{B} (kurz: $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$).

(a) Für jede Belegung β in \mathcal{A} sei $\pi\beta$ die Belegung in \mathcal{B} , so dass für alle $x \in \text{VAR}$ gilt:

$$\pi\beta(x) = \pi(\beta(x)).$$

(b) Für eine Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ schreiben wir $\pi\mathcal{I}$ für die Interpretation

$$\pi\mathcal{I} := (\mathcal{B}, \pi\beta).$$

Aus dieser Definition folgt direkt:

Lemma 3.23

Sei σ eine Signatur, seien \mathcal{A}, \mathcal{B} isomorphe σ -Strukturen, sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, sei β eine Belegung in \mathcal{A} und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$.

Für jedes $x \in \text{VAR}$, für jedes $a \in A$, für $\mathcal{I}' := \mathcal{I} \frac{a}{x}$ und für $b := \pi(a)$ gilt:

$$\pi\mathcal{I}' = (\pi\mathcal{I}) \frac{b}{x}.$$

Das Isomorphielemma

Satz 3.24 (Das Isomorphielemma der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur, seien \mathcal{A}, \mathcal{B} isomorphe σ -Strukturen und sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Für jede Belegung β in \mathcal{A} und die σ -Interpretation $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ gilt:

- (a) Für jeden σ -Term $t \in T_\sigma$ ist $\llbracket t \rrbracket^{\pi\mathcal{I}} = \pi(\llbracket t \rrbracket^{\mathcal{I}})$.
- (b) Für jede FO[σ]-Formel φ gilt: $\pi\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi$.

Wir werden das Isomorphielemma per Induktion über den Aufbau von Termen und Formeln beweisen. Hierzu zunächst ein kurzer Überblick darüber, wie solche Induktionsbeweise prinzipiell aufgebaut sind.

Beweise per Induktion über den Aufbau von Termen und Formeln

- Ähnlich wie Aussagen über die aussagenlogischen Formeln können wir Aussagen über Terme und Formeln der Logik der ersten Stufe per **Induktion über den Aufbau** von T_σ bzw. $FO[\sigma]$ beweisen.
- Im **Induktionsanfang** beweisen wir die Aussagen für die gemäß Basisregeln definierten Terme bzw. Formeln. Im **Induktionsschritt** schließen wir von den Subtermen bzw. Subformeln auf den Term bzw. die Formel selbst.
- Wie bei der Aussagenlogik ist dieses Vorgehen gerechtfertigt, weil es sich auch als vollständige Induktion über die Höhe des Syntaxbaums auffassen lässt.

Beweise per Induktion über den Aufbau von Termen

Schematisch sieht der Beweis einer Aussage $\mathbb{A}(t)$ für alle Terme $t \in T_\sigma$ wie folgt aus:

Induktionsanfang:

- Beweise, dass für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ die Aussage $\mathbb{A}(c)$ gilt.
- Beweise, dass für alle Variablen $x \in \text{VAR}$ die Aussage $\mathbb{A}(x)$ gilt.

Induktionsschritt:

- Betrachte jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$, sei $k := \text{ar}(f)$, und seien t_1, \dots, t_k beliebige σ -Terme. Beweise, dass $\mathbb{A}(f(t_1, \dots, t_k))$ gilt, und verwende dazu die Induktionsannahme, dass $\mathbb{A}(t_i)$ für jedes $i \in [k]$ gilt.

Mit dieser Vorgehensweise beweisen wir nun Teil (a) des Isomorphielemmas.

Teil (b) des Isomorphielemmas beweisen wir per Induktion über den Aufbau von Formeln. Prinzipiell sind solche Induktionsbeweise wie folgt aufgebaut.

Beweise per Induktion über den Aufbau von Formeln

Schematisch sieht der Beweis einer **Aussage** $\mathbb{A}(\varphi)$ für alle FO[σ]-Formeln φ wie folgt aus:

Induktionsanfang:

- Beweise, dass für alle σ -Terme $t_1, t_2 \in T_\sigma$ die Aussage $\mathbb{A}(t_1=t_2)$ gilt.
- Beweise, dass für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und für alle σ -Terme $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$ die Aussage $\mathbb{A}(R(t_1, \dots, t_k))$ gilt

Induktionsschritt:

Seien φ und ψ beliebige FO[σ]-Formeln. Die **Induktionsannahme** besagt, dass die Aussagen $\mathbb{A}(\varphi)$ und $\mathbb{A}(\psi)$ gelten.

Im Induktionsschritt muss dann gezeigt werden, dass

- für jede Variable $x \in \text{VAR}$ die Aussage $\mathbb{A}(\exists x \varphi)$ gilt,
- für jede Variable $x \in \text{VAR}$ die Aussage $\mathbb{A}(\forall x \varphi)$ gilt,
- die Aussage $\mathbb{A}(\neg \varphi)$ gilt,
- die Aussage $\mathbb{A}((\varphi \wedge \psi))$ gilt,
- die Aussage $\mathbb{A}((\varphi \vee \psi))$ gilt,
- die Aussage $\mathbb{A}((\varphi \rightarrow \psi))$ gilt.

Mit dieser Vorgehensweise beweisen wir nun Teil (b) des Isomorphielemmas.

Das Koinzidenzlemma

Ähnlich wie für die Aussagenlogik gilt auch für die Logik erster Stufe ein **Koinzidenzlemma**, das besagt, dass der Wert $\llbracket t \rrbracket^{\mathcal{I}}$ eines Terms t bzw. der Wert $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}}$ einer Formel φ nur abhängt von

- denjenigen Bestandteilen von \mathcal{A} , die explizit in t bzw. φ vorkommen, und
- den Belegungen $\beta(x)$ derjenigen Variablen x , die in t vorkommen bzw. die in φ vorkommen und **nicht im Wirkungsbereich eines Quantors** stehen.

Um diese Aussage präzise zu formulieren, sind folgende Begriffe nützlich.

Definition 3.25

- (a) Ist ξ ein Term oder eine Formel der Logik erster Stufe, so schreiben wir
- $\sigma(\xi)$, um die Menge aller Relations-, Funktions- und Konstantensymbole zu bezeichnen, die in ξ vorkommen,
 - $\text{var}(\xi)$, um die Menge aller in ξ vorkommenden Variablen zu bezeichnen.
- (b) Ist φ eine Formel und x eine Variable, so heißt jedes Vorkommen von x in einer Subformel von φ , die von der Form $\exists x\psi$ oder $\forall x\psi$ ist, **gebunden**. Jedes andere Vorkommen von x in φ heißt **frei**.

Beispiel:

$$\varphi := (f(v_0, c) = v_3 \wedge \exists v_0 f(v_0, v_1) = c)$$

Das erste Vorkommen von v_0 in φ ist frei, das zweite und dritte Vorkommen von v_0 in φ ist gebunden. Die Vorkommen von v_1 und v_3 in φ sind frei.

Freie Variablen

Definition 3.26

Die Menge $\text{frei}(\varphi)$ aller **freien Variablen** einer Formel φ besteht aus allen Variablen, die mindestens ein freies Vorkommen in φ haben.

Die Menge $\text{frei}(\varphi)$ lässt sich rekursiv über den Aufbau von Formeln wie folgt definieren:

$$\text{frei}(R(t_1, \dots, t_k)) := \text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_k)$$

$$\text{frei}(t_1 = t_2) := \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2)$$

$$\text{frei}(\neg\varphi) := \text{frei}(\varphi)$$

$$\text{frei}(\varphi * \psi) := \text{frei}(\varphi) \cup \text{frei}(\psi) \quad \text{für alle } * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$$

$$\text{frei}(\exists x \varphi) := \text{frei}(\forall x \varphi) := \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\}.$$

Beispiele:

- $\text{frei}(f(v_0, c) = v_3) = \{v_0, v_3\}$
- $\text{frei}(\exists v_0 f(v_0, v_1) = c) = \{v_1\}$
- $\text{frei}(f(v_0, c) = v_3 \wedge \exists v_0 f(v_0, v_1) = c) = \{v_0, v_3, v_1\}$

Das Koinzidenzlemma

Satz 3.27 (Koinzidenzlemma für Terme)

Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ eine σ_1 -Interpretation und sei $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ eine σ_2 -Interpretation, wobei σ_1 und σ_2 Signaturen seien. Sei $t \in \mathsf{T}$ ein Term mit $\sigma(t) \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$, so dass gilt:

1. $\mathcal{A}_1|_{\sigma(t)} = \mathcal{A}_2|_{\sigma(t)}$
(d.h., die $\sigma(t)$ -Redukte von \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 sind identisch), und
2. $\beta_1(x) = \beta_2(x)$, für alle $x \in \text{var}(t)$.

Dann gilt: $\llbracket t \rrbracket^{\mathcal{I}_1} = \llbracket t \rrbracket^{\mathcal{I}_2}$.

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von Termen. Details: Übung. □

Satz 3.28 (Koinzidenzlemma für FO-Formeln)

Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ eine σ_1 -Interpretation und sei $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ eine σ_2 -Interpretation, wobei σ_1 und σ_2 Signaturen seien.

Sei $\varphi \in \text{FO}$ eine Formel der Logik erster Stufe mit $\sigma(\varphi) \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$, so dass gilt:

1. $\mathcal{A}_1|_{\sigma(\varphi)} = \mathcal{A}_2|_{\sigma(\varphi)}$, und
2. $\beta_1(x) = \beta_2(x)$, für alle $x \in \text{frei}(\varphi)$.

Dann gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Details: Übung. □

Notation für Terme

- Für einen Term $t \in T_\sigma$ schreiben wir $t(x_1, \dots, x_n)$, um anzudeuten, dass $\text{var}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Sei \mathcal{A} eine σ -Struktur und seien $a_1, \dots, a_n \in A$.
Auf Grund des Koinzidenzlemmas gilt

$$\llbracket t \rrbracket^{(\mathcal{A}, \beta)} = \llbracket t \rrbracket^{(\mathcal{A}, \beta')}$$

für alle Belegungen $\beta, \beta' : \text{VAR} \rightarrow A$, so dass $\beta(x_i) = a_i = \beta'(x_i)$ für alle $i \in [n]$ gilt. Wir schreiben oft

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n],$$

um das Element $\llbracket t \rrbracket^{(\mathcal{A}, \beta)}$ zu bezeichnen.

- Für Terme $t \in T_\sigma$, in denen keine Variable vorkommt, d.h. $\text{var}(t) = \emptyset$ (so genannte **Grundterme**), schreiben wir einfach $t^{\mathcal{A}}$.

Notation für Formeln

- Für eine FO[σ]-Formel φ schreiben wir $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, um anzudeuten, dass $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Ist \mathcal{A} eine σ -Struktur und sind $a_1, \dots, a_n \in A$, so schreiben wir

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

wenn $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ für eine Belegung $\beta : \text{VAR} \rightarrow A$ mit $\beta(x_i) = a_i$ für alle $i \in [n]$ gilt.

Auf Grund des Koinzidenzlemmas gilt dann auch für alle Belegungen $\beta' : \text{VAR} \rightarrow A$ mit $\beta'(x_i) = a_i$ für alle $i \in [n]$, dass $(\mathcal{A}, \beta') \models \varphi$.

Sätze der Logik erster Stufe

Definition 3.29

Sei σ eine Signatur.

- (a) Ein **FO[σ]-Satz** (kurz: **Satz**) ist eine FO[σ]-Formel φ mit $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$.
- (b) Wir schreiben S_σ , um **die Menge aller FO[σ]-Sätze** zu bezeichnen und setzen

$$S := \bigcup_{\sigma \text{ Signatur}} S_\sigma.$$

- (c) Für einen FO[σ]-Satz φ und eine σ -Struktur \mathcal{A} schreiben wir $\mathcal{A} \models \varphi$, um auszudrücken, dass $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ für eine (und gemäß Koinzidenzlemma daher für jede) Belegung β in \mathcal{A} gilt.
- (d) Für eine Menge $\Phi \subseteq S_\sigma$ von FO[σ]-Sätzen schreiben wir $\mathcal{A} \models \Phi$, falls $\mathcal{A} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in \Phi$ gilt.

Als direkte Folgerung aus dem Isomorphielemma erhalten wir, dass für **isomorphe** σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} und für alle FO[σ]-Sätze φ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi.$$

Modellklassen und Definierbarkeit

Definition 3.30

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq S_\sigma$ (d.h. Φ ist eine Menge von $\text{FO}[\sigma]$ -Sätzen).

- (a) Die **Modellklasse von Φ** ist die Klasse $\text{MOD}_\sigma(\Phi)$ aller σ -Strukturen \mathcal{A} für die gilt: $\mathcal{A} \models \Phi$.
- (b) Für eine Klasse \mathfrak{C} von σ -Strukturen sagen wir
 Φ **definiert** (oder **axiomatisiert**) \mathfrak{C} ,
 falls $\mathfrak{C} = \text{MOD}_\sigma(\Phi)$.
- (c) Für einen $\text{FO}[\sigma]$ -Satz φ setzen wir $\text{MOD}_\sigma(\varphi) := \text{MOD}_\sigma(\{\varphi\})$ und sagen, dass φ die Klasse $\mathfrak{C} := \text{MOD}_\sigma(\varphi)$ definiert (bzw. axiomatisiert).

Als direkte Folgerung aus dem Isomorphielemma erhalten wir:

Korollar 3.31

Für jede Signatur σ und jedes $\Phi \subseteq S_\sigma$ ist $\text{MOD}_\sigma(\Phi)$ **unter Isomorphie abgeschlossen**. D.h. für isomorphe σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} gilt:

$$\mathcal{A} \in \text{MOD}_\sigma(\Phi) \iff \mathcal{B} \in \text{MOD}_\sigma(\Phi).$$

Abschnitt 3.5:

Beispiele für Formeln der Logik erster
Stufe in verschiedenen
Anwendungsbereichen

Notation

- Ab jetzt verwenden wir für die Logik erster Stufe ähnliche **Klammerkonventionen** wie bei der Aussagenlogik.
- Für gewisse zweistellige Funktionssymbole wie $+$, \cdot und zweistellige Relationssymbole wie \leq verwenden wir **Infix-** statt Präfixnotation. Dabei setzen wir auf natürliche Weise Klammern, um die eindeutige Lesbarkeit zu gewährleisten.
- Wir schreiben $x < y$ als Abkürzung für die Formel $(x \leq y \wedge \neg x=y)$.

Ordnungen

Beispiel 3.32

Wir betrachten Strukturen und Formeln über der Signatur $\sigma := \{\leq\}$.

Zur Erinnerung: Eine σ -Struktur $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ ist eine **lineare Ordnung**, falls gilt:

(1) $\leq^{\mathcal{A}}$ ist **reflexiv**,

- d.h. für alle $a \in A$ gilt: $a \leq^{\mathcal{A}} a$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{\text{refl}}$, wobei

$$\varphi_{\text{refl}} := \forall x \ x \leq x$$

(2) $\leq^{\mathcal{A}}$ ist **transitiv**,

- d.h. für alle $a, b, c \in A$ gilt: Wenn $a \leq^{\mathcal{A}} b$ und $b \leq^{\mathcal{A}} c$, dann auch $a \leq^{\mathcal{A}} c$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{\text{trans}}$, wobei

$$\varphi_{\text{trans}} := \forall x \forall y \forall z \left((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z \right)$$

(3) $\leq^{\mathcal{A}}$ ist **antisymmetrisch**,

- d.h. für alle $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt: Wenn $a \leq^{\mathcal{A}} b$, dann $b \not\leq^{\mathcal{A}} a$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{\text{antisym}}$, wobei

$$\varphi_{\text{antisym}} := \forall x \forall y \left(\neg x = y \rightarrow (x \leq y \rightarrow \neg y \leq x) \right)$$

(4) $\leq^{\mathcal{A}}$ ist **konnex**,

- d.h. für alle $a, b \in A$ gilt: $a \leq^{\mathcal{A}} b$ oder $b \leq^{\mathcal{A}} a$ oder $a = b$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{\text{konnex}}$, wobei

$$\varphi_{\text{konnex}} := \forall x \forall y \left(x \leq y \vee y \leq x \vee x = y \right)$$

Insgesamt gilt für jede $\{\leq\}$ -Struktur $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$:

$\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ ist eine lineare Ordnung $\iff \mathcal{A} \models \varphi_{\text{lin.Ord}}$, wobei

$$\varphi_{\text{lin.Ord}} := \varphi_{\text{refl}} \wedge \varphi_{\text{antisym}} \wedge \varphi_{\text{trans}} \wedge \varphi_{\text{konnex}}$$

Der FO[σ]-Satz $\varphi_{\text{lin.Ord}}$ **definiert** (bzw. axiomatisiert) also die Klasse aller linearen Ordnungen.

Arithmetik

Beispiel 3.33

Wir betrachten Formeln über der Signatur $\sigma := \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$ und ihre Bedeutung im **Standardmodell** $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ der Arithmetik.

- **Gesucht:** Eine FO[σ]-Formel $\varphi_-(x, y, z)$, die besagt „ $x - y = z$ “.
Präzise: Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_-[a, b, c] \iff a - b = c.$$

Lösung:

$$\varphi_-(x, y, z) := x = z + y$$

- **Gesucht:** Eine FO[σ]-Formel $\varphi_|(x, y)$, die besagt „ x teilt y “.
Präzise: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_|[a, b] \iff \text{es gibt ein } c \in \mathbb{N}, \text{ so dass } a \cdot c = b.$$

Lösung:

$$\varphi_|(x, y) := \exists z \ x \cdot z = y$$

- **Gesucht:** Eine FO[σ]-Formel $\varphi_{\equiv}(x, y, z)$, die besagt „ $x \equiv y \pmod{z}$ “.

Präzise: Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{\equiv}[a, b, c] \iff a \equiv b \pmod{c} \quad \text{d.h.} \quad c \mid |a - b|$$

Lösung:

$$\varphi_{\equiv}(x, y, z) := \exists w \left(\underbrace{(\varphi_{-}(x, y, w) \vee \varphi_{-}(y, x, w))}_{\text{„}w = |x - y|\text{“}} \wedge \underbrace{\varphi_{|}(z, w)}_{\text{„}z \mid w\text{“}} \right)$$

- **Gesucht:** Eine FO[σ]-Formel $\varphi_{\text{prim}}(x)$, die besagt „ x ist eine Primzahl“.

Präzise: Für alle $a \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{\text{prim}}[a] \iff a \text{ ist eine Primzahl}$$

d.h. $a \geq 2$ und a ist nur durch sich selbst und durch 1 teilbar.

Lösung:

$$\varphi_{\text{prim}}(x) := \underbrace{\underline{1} + \underline{1} \leq x}_{\text{„}x \geq 2\text{“}} \wedge \forall z \left(\underbrace{\varphi_1(z, x)}_{\text{„}z \mid x\text{“}} \rightarrow (z = x \vee z = \underline{1}) \right)$$

- **Gesucht:** Ein FO[σ]-Satz φ_{∞} , der in $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ besagt
„Es gibt unendlich viele Primzahlen“.

Lösung:

$$\varphi_{\infty} := \forall y \exists x \left(y \leq x \wedge \varphi_{\text{prim}}(x) \right)$$

In $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ besagt dieser Satz, dass es für jede natürliche Zahl b eine natürliche Zahl $a \geq b$ gibt, die eine Primzahl ist.

Worte

Beispiel 3.34

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ und die Signatur $\sigma_\Sigma = \{\leq, P_a, P_b\}$.

Zur Erinnerung: Wir repräsentieren ein nicht-leeres Wort $w \in \Sigma^*$ durch die σ_Σ -Struktur \mathcal{A}_w , deren Universum aus der Menge $\{1, \dots, |w|\}$ aller Positionen in w besteht, und bei der $P_a^{\mathcal{A}_w}$ (bzw. $P_b^{\mathcal{A}_w}$) aus allen Positionen besteht, an denen der Buchstabe a (bzw. b) steht.

Gesucht: Ein FO[σ_Σ]-Satz φ , so dass für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\mathcal{A}_w \models \varphi \iff w \text{ ist von der Form } a^* b^*.$$

Lösung: Wir konstruieren eine Formel φ , die besagt, dass es eine Position x gibt, so dass alle Positionen links von x den Buchstaben a tragen und alle Positionen rechts von x den Buchstaben b tragen.

$$\varphi := \exists x \forall y \left((y < x \rightarrow P_a(y)) \wedge (x < y \rightarrow P_b(y)) \right)$$

Wie bereits vereinbart, schreiben wir hier „ $x < y$ “ als Abkürzung für die Formel $(x \leq y \wedge \neg x = y)$.

Abschnitt 3.6:

Logik und Datenbanken

Datenbanken

Zur Erinnerung: Wir repräsentieren eine Kinodatenbank, die Informationen über Kinos, Filme und das aktuelle Programm enthält, durch eine Struktur über der Signatur $\sigma_{\text{KINO}} :=$

$$\{ R_{\text{Kino}}/4, R_{\text{Film}}/3, R_{\text{Prog}}/3 \} \cup \{ 'c' : c \in \text{ASCII}^* \}$$

und können so z.B. die folgende Kinodatenbank als σ_{KINO} -Struktur \mathcal{D} auffassen, deren Universum D aus der Menge aller Worte über dem ASCII-Alphabet besteht.

Beispiel: Eine Kinodatenbank

<i>Kino</i>			
Name	Adresse	Stadtteil	Telefonnummer
Babylon	Dresdner Str. 126	Kreuzberg	030 61 60 96 93
Casablanca	Friedenstr. 12-13	Adlershof	030 67 75 75 2
Filmtheater am Friedrichshain	Bötzowstr. 1-5	Prenzlauer Berg	030 42 84 51 88
Kino International	Karl-Marx-Allee 33	Mitte	030 24 75 60 11
Moviemento	Kotbusser Damm 22	Kreuzberg	030 692 47 85
Urania	An der Urania 17	Schöneberg	030 21 89 09 1

<i>Film</i>		
Name	Regisseur	Schauspieler
Alien	Ridley Scott	Sigourney Weaver
Blade Runner	Ridley Scott	Harrison Ford
Blade Runner	Ridley Scott	Sean Young
Brazil	Terry Gilliam	Jonathan Pryce
Brazil	Terry Gilliam	Kim Greist
Casablanca	Michael Curtiz	Humphrey Bogart
Casablanca	Michael Curtiz	Ingrid Bergmann
Gravity	Alfonso Cuaron	Sandra Bullock
Gravity	Alfonso Cuaron	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	Matt Damon
Resident Evil	Paul Anderson	Milla Jovovich
Terminator	James Cameron	Arnold Schwarzenegger
Terminator	James Cameron	Linda Hamilton
Terminator	James Cameron	Michael Biehn
...

<i>Programm</i>		
Kino	Film	Zeit
Babylon	Casablanca	17:30
Babylon	Gravity	20:15
Casablanca	Blade Runner	15:30
Casablanca	Alien	18:15
Casablanca	Blade Runner	20:30
Casablanca	Resident Evil	20:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	20:00
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	21:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	23:00
Kino International	Casablanca	18:00
Kino International	Brazil	20:00
Kino International	Brazil	22:00
Movimiento	Gravity	17:00
Movimiento	Gravity	19:30
Movimiento	Alien	22:00
Urania	Monuments Men	17:00
Urania	Monuments Men	20:00

Die Kinodatenbank als Struktur

Signatur: $\sigma_{\text{KINO}} := \{ R_{\text{Kino}}/4, R_{\text{Film}}/3, R_{\text{Prog}}/3 \} \cup \{ 'c' : c \in \text{ASCII}^* \}$

Die Kinodatenbank wird dargestellt als σ_{KINO} -Struktur \mathcal{D} .

Universum:

$$\mathcal{D} := \text{ASCII}^* \supseteq \{ \text{Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93, Casablanca, \dots, 20:00} \}.$$

Relationen:

$$R_{\text{Kino}}^{\mathcal{D}} := \{ (\text{Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93}, \\ (\text{Casablanca, Friedenstr. 12-13, Adlershof, 030 67 75 75 2}), \\ \dots, \\ (\text{Urania, An der Urania 17, Schöneberg, 030 21 89 09 1}) \}$$

$$R_{\text{Film}}^{\mathcal{D}} := \{ (\text{Alien, Ridley Scott, Sigourney Weaver}), \\ (\text{Blade Runner, Ridley Scott, Harrison Ford}), \dots \}$$

$$R_{\text{Prog}}^{\mathcal{D}} := \{ (\text{Babylon, Casablanca, 17:30}), \\ (\text{Babylon, Gravity, 20:15}), \dots \}.$$

Konstanten: $'c'^{\mathcal{D}} := c$, für jedes $c \in \text{ASCII}^*$.

D.h.: jedes Konstantensymbol wird durch den zwischen den Hochkommas stehenden Text interpretiert.

Beispiel 3.35

(a) Die Anfrage

„Gib die Titel aller Filme aus, die um 22:00 Uhr beginnen.“

lässt sich durch folgende FO[σ_{KINO}]-Formel $\varphi_1(x_T)$ beschreiben:

$$\varphi_1(x_T) := \exists x_K R_{\text{Prog}}(x_K, x_T, '22:00')$$

(b) Die Anfrage

„Gib die Titel aller Filme aus, in denen George Clooney mitspielt oder Regie führt“

lässt sich durch folgende FO[σ_{KINO}]-Formel beschreiben: $\varphi_2(x_T) :=$

$$\exists x_R R_{\text{Film}}(x_T, x_R, 'George Clooney') \vee \exists x_S R_{\text{Film}}(x_T, 'George Clooney', x_S)$$

(c) Die Anfrage

*„Gib Name und Stadtteil aller Kinos aus, in denen ein Film läuft,
in dem George Clooney mitspielt oder Regie führt“*

lässt sich durch folgende FO[σ_{KINO}]-Formel beschreiben: $\varphi_3(x_K, x_{St}) :=$

$$\exists x_A \exists x_{Tel} R_{Kino}(x_K, x_A, x_{St}, x_{Tel}) \wedge$$

$$\exists x_T \exists x_Z \left(R_{Prog}(x_K, x_T, x_Z) \wedge \right.$$

$$\left. (\exists x_R R_{Film}(x_T, x_R, \text{'George Clooney'}) \vee \exists x_S R_{Film}(x_T, \text{'George Clooney'}, x_S)) \right)$$

Die erste Zeile der Formel stellt sicher, dass x_K ein Kino und x_S dessen Stadtteil ist; die Zeilen 2 und 3 stellen sicher, dass im Kino x_K ein Film läuft, in dem George Clooney mitspielt oder Regie führt.

Eine andere Sichtweise auf die Semantik

- Anstatt **Wahrheitswerte in Interpretationen** definieren Formeln der Logik der ersten Stufe auch **Relationen in Strukturen**.
- Junktoren und Quantoren entsprechen dann algebraischen Operatoren auf Relationen.
- Diese Sichtweise ist insbesondere in der Datenbanktheorie wichtig und bildet die Grundlage effizienter Algorithmen zur Auswertung von Datenbankabfragen.

Definition 3.36

Sei σ eine Signatur, sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine FO[σ]-Formel und sei \mathcal{A} eine σ -Struktur.

Die von $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ in \mathcal{A} definierte n -stellige Relation ist

$$\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{A}} := \{ (a_1, \dots, a_n) \in A^n : \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \}.$$

Vorsicht: Die Relation $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{A}}$ hängt nicht nur von der Formel φ ab, sondern auch von dem Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in \text{VAR}^n$.

Beispiel 3.37

Die FO[σ_{KINO}]-Formeln $\varphi_2(x_T)$ und $\varphi_3(x_K, x_{St})$ aus Beispiel 3.35 definieren in unserer Beispiel-Datenbank \mathcal{D} die Relationen

$$\llbracket \varphi_2(x_T) \rrbracket^{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{array}{l} (\text{Gravity}), \\ (\text{Monuments Men}) \end{array} \right\}$$

und

$$\llbracket \varphi_3(x_K, x_{St}) \rrbracket^{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{array}{l} (\text{Babylon, Kreuzberg}), \\ (\text{Movimiento, Kreuzberg}), \\ (\text{Urania, Schöneberg}) \end{array} \right\}$$

Ändern der Variablen

Lemma 3.38

Sei σ eine Signatur, sei \mathcal{A} eine σ -Struktur und sei $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \text{FO}[\sigma]$.

(a) Für jede Permutation² π von $[n]$ ist

$$\llbracket \varphi(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \rrbracket^{\mathcal{A}} = \left\{ (a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)}) : \right. \\ \left. (a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{A}} \right\}.$$

(b) Für jede Variable $y \in \text{VAR} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ ist

$$\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n, y) \rrbracket^{\mathcal{A}} = \llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{A}} \times A.$$

(c) Falls $x_n \notin \text{frei}(\varphi)$, so ist

$$\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \rrbracket^{\mathcal{A}} = \left\{ (a_1, \dots, a_{n-1}) : \right. \\ \left. \text{es gibt (mind.) ein } a \in A \text{ so dass } (a_1, \dots, a_{n-1}, a) \in \llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{A}} \right\}.$$

²Eine **Permutation einer Menge M** ist eine bijektive Abbildung von M nach M .

Rekursive Beschreibung von $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{A}}$

Beobachtung 3.39

Ist σ eine Signatur und \mathcal{A} eine σ -Struktur, so können wir für FO[σ]-Formeln φ und Variablentupel (x_1, \dots, x_n) mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ die Relation $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ rekursiv wie folgt beschreiben:

- Falls φ von der Form $t_1 = t_2$ für σ -Terme t_1, t_2 ist, so ist

$$\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{A}} = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in A^n : \right. \\ \left. t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] = t_2^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] \right\}$$

Zur Erinnerung: Für einen σ -Term $t(x_1, \dots, x_n)$ schreiben wir $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]$ um das Element $\llbracket t \rrbracket^{(\mathcal{A}, \beta)} \in A$ zu bezeichnen, wobei β eine Belegung mit $\beta(x_i) = a_i$, für alle $i \in [n]$, ist.

- Falls φ von der Form $R(t_1, \dots, t_k)$ für ein $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und für σ -Terme t_1, \dots, t_k ist, so ist

$$\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{A}} = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in A^n : \right. \\ \left. (t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n], \dots, t_k^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]) \in R^{\mathcal{A}} \right\}$$

- Falls φ von der Form $\neg\psi$ ist, so ist

$$\llbracket\varphi(x_1, \dots, x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}} = A^n \setminus \llbracket\psi(x_1, \dots, x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}}$$

- Falls φ von der Form $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ ist, so ist

$$\llbracket\varphi(x_1, \dots, x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}} = \llbracket\psi_1(x_1, \dots, x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}} \cap \llbracket\psi_2(x_1, \dots, x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}}$$

- Falls φ von der Form $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ist, so ist

$$\llbracket\varphi(x_1, \dots, x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}} = \llbracket\psi_1(x_1, \dots, x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}} \cup \llbracket\psi_2(x_1, \dots, x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}}$$

- Falls φ von der Form $(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ ist, so ist

$$\llbracket\varphi(x_1, \dots, x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}} = \llbracket\neg\psi_1(x_1, \dots, x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}} \cup \llbracket\psi_2(x_1, \dots, x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}}$$

- Falls φ von der Form $\exists y \psi$ ist, so ist

$$\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^A = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in A^n : \text{es gibt (mind.) ein } b \in A \text{ mit } (a_1, \dots, a_n, b) \in \llbracket \psi(x_1, \dots, x_n, y) \rrbracket^A \right\}$$

Somit ist $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^A$ die **Projektion** von $\llbracket \psi(x_1, \dots, x_n, y) \rrbracket^A$ auf die ersten n Stellen.

- Falls φ von der Form $\forall y \psi$ ist, so ist

$$\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^A = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in A^n : \text{für jedes } b \in A \text{ ist } (a_1, \dots, a_n, b) \in \llbracket \psi(x_1, \dots, x_n, y) \rrbracket^A \right\}$$

Das Auswertungsproblem für FO

Eingabe: Eine endliche Signatur σ ,
eine σ -Struktur \mathcal{A} , deren Universum A endlich ist,
eine FO[σ]-Formel φ ,
eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und
ein Variablentupel $(x_1, \dots, x_n) \in \text{VAR}^n$, so dass $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ ist.

Aufgabe: Berechne $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{A}}$.

Beobachtung 3.39 führt unmittelbar zu einem rekursiven Algorithmus, der das Auswertungsproblem für FO löst.

Eine Laufzeitanalyse zeigt, dass Folgendes gilt:

Satz 3.40

Es gibt einen *Algorithmus*, der das *Auswertungsproblem für FO* bei Eingabe einer Signatur σ , einer σ -Struktur \mathcal{A} , einer FO[σ]-Formel φ , einer Zahl n und eines Variablentupels (x_1, \dots, x_n) mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ in *Zeit*

$$O(\|\varphi\| + \|\mathcal{A}\| + \|\varphi\| \cdot w \cdot \|\mathcal{A}\|^w)$$

löst, wobei gilt:

- $\|\varphi\|$ ist die Länge von φ , aufgefasst als Wort über dem Alphabet $A_{\text{FO}[\sigma]}$
- w ist die maximale Anzahl freier Variablen in Subformeln von φ — die so genannte *Breite* (engl.: *width*) von φ
- $\|\mathcal{A}\|$ ist ein Maß für die Größe einer geeigneten Repräsentation von \mathcal{A} als Eingabe für einen Algorithmus; präzise:

$$\|\mathcal{A}\| := |\sigma| + \sum_{R \in \sigma} |R^{\mathcal{A}}| \cdot \text{ar}(R) + \sum_{f \in \sigma} |A|^{\text{ar}(f)} \cdot (\text{ar}(f) + 1)$$

(Hier ohne Beweis)

Abschnitt 3.7:

Äquivalenz von Formeln der Logik erster
Stufe

Äquivalenz

Definition 3.41

Sei σ eine Signatur.

- (a) Zwei FO[σ]-Formeln φ und ψ heißen **äquivalent** (kurz: $\varphi \equiv \psi$), wenn für jede σ -Interpretation \mathcal{I} gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi.$$

- (b) Zwei Formelmengen $\Phi, \Psi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ heißen **äquivalent** (kurz: $\Phi \equiv \Psi$), wenn für jede σ -Interpretation \mathcal{I} gilt:³

$$\mathcal{I} \models \Phi \iff \mathcal{I} \models \Psi.$$

³Zur Erinnerung: $\mathcal{I} \models \Phi$ bedeutet, dass $\mathcal{I} \models \varphi$ für jede Formel $\varphi \in \Phi$ gilt.

Beispiel 3.42

Welche der folgenden Formeln sind äquivalent, welche nicht?

- $\varphi_1 := \exists y E(x, y)$
- $\varphi_2 := \exists z E(x, z)$
- $\varphi_3 := \exists z E(y, z)$

Aussagenlogische Äquivalenzen

Lemma 3.43

Ersetzt man in äquivalenten *aussagenlogischen* Formeln alle Aussagenymbole durch FO[σ]-Formeln, so erhält man äquivalente FO[σ]-Formeln.

Beispiel

Aus der aussagenlogische Äquivalenz $(X \rightarrow Y) \equiv \neg X \vee Y$ folgt, dass

$$(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \neg\varphi \vee \psi$$

für alle FO[σ]-Formeln φ und ψ gilt.

Quantoren und Negation

Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

Lemma 3.44

Für alle FO[σ]-Formeln φ und alle Variablen $x \in \text{VAR}$ gilt:

$$\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi \quad \text{und} \quad \neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi.$$

Beweis: Folgt direkt aus der Definition der Semantik (Details: Übung). □

Das Ersetzungslemma

Lemma 3.45

Sei σ eine beliebige Signatur und sei φ eine $\text{FO}[\sigma]$ -Formel.

Ist φ' eine $\text{FO}[\sigma]$ -Formel, die aus φ entsteht, indem man eine Subformel ψ von φ durch eine zu ψ äquivalente $\text{FO}[\sigma]$ -Formel ψ' ersetzt, so ist $\varphi \equiv \varphi'$.

Beweis: Übung.

Satz 3.46

Jede $\text{FO}[\sigma]$ -Formel ist äquivalent zu einer $\text{FO}[\sigma]$ -Formel, in der

- (a) keiner der Junktoren $\{\wedge, \rightarrow\}$ vorkommt
(d.h., es kommen nur die Junktoren \neg, \vee und die Quantoren \exists, \forall vor).
- (b) nur Existenzquantoren und die Junktoren \neg, \vee vorkommen.
- (c) nur Existenzquantoren und die Junktoren \neg, \wedge vorkommen.
- (d) nur Allquantoren und die Junktoren \neg, \vee vorkommen.
- (e) nur Allquantoren und die Junktoren \neg, \wedge vorkommen.

Daher genügt es, bei Beweisen per Induktion über den Aufbau von Formeln von nun an im Induktionsschritt i.d.R. nur noch die Fälle für \exists, \neg, \vee zu betrachten.

Abschnitt 3.8:

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

In diesem Abschnitt werden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (kurz: EF-Spiele) eingeführt. Diese liefern ein Werkzeug, mit dessen Hilfe man zeigen kann, dass bestimmte Anfragen oder Klassen von Strukturen nicht in Logik erster Stufe definiert werden können.

Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur Signaturen, die keine Funktionssymbole und keine Konstantensymbole enthalten. Solche Signaturen werden im Folgenden **relationale Signaturen** genannt.

Außerdem werden wir im Folgenden bei zwei gegebenen Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} immer o.B.d.A. annehmen, dass ihre Universen disjunkt sind, d.h. $A \cap B = \emptyset$.

Das m -Runden EF-Spiel

Sei σ eine relationale Signatur und seien \mathcal{A}, \mathcal{B} zwei σ -Strukturen.

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A$ und $\bar{b} := b_1, \dots, b_k \in B$ Folgen der Länge k von Elementen aus A bzw. B .

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Das m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) (bzw. auf \mathcal{A} und \mathcal{B} , falls $k = 0$ ist) wird gemäß folgender Spielregeln gespielt:

Spielregeln des m -Runden EF-Spiels auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b})

- Es gibt 2 Spieler, genannt **Spoiler** (kurz: Sp) und **Duplicator** (kurz: $Dupl$).
- Das **Spielbrett** besteht aus (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .
- Eine **Partie** des Spiels besteht aus m Runden.

In jeder Runde $i \in \{1, \dots, m\}$ geschieht Folgendes:

1. Zunächst wählt **Spoiler** entweder ein Element in A , das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B , das im Folgenden mit b_{k+i} bezeichnet wird.
Beachte: Insbes. kann Spoiler in jeder Runde neu entscheiden, in welcher der beiden Strukturen er ein Element wählen möchte.
2. Danach antwortet **Duplicator** mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur, d.h. er wählt ein $b_{k+i} \in B$, falls Spoiler ein $a_{k+i} \in A$ gewählt hat, bzw. ein Element $a_{k+i} \in A$, falls Spoiler ein $b_{k+i} \in B$ gewählt hat.

Nach Runde m ist die Partie beendet und der Gewinner wird wie folgt ermittelt:

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Für alle $j, j' \in \{1, \dots, k+m\}$ gilt: $a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.
- (2) Die Abbildung $\pi : \{a_1, \dots, a_{k+m}\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_{k+m}\}$ mit

$$\pi(a_j) := b_j, \quad \text{für jedes } j \in \{1, \dots, k+m\}$$

ist ein **partieller Isomorphismus** von \mathcal{A} nach \mathcal{B} (siehe Definition 3.47).

Spoiler hat gewonnen, falls mindestens eine der beiden obigen Bedingungen verletzt ist.

Definition 3.47 (partieller Isomorphismus)

Sei σ eine relationale Signatur, seien \mathcal{A}, \mathcal{B} zwei σ -Strukturen, sei $X \subseteq A$. Eine Abbildung $\pi : X \rightarrow B$ heißt **partieller Isomorphismus** von \mathcal{A} nach \mathcal{B} , falls gilt:

- (1) π ist injektiv und
- (2) für jedes $R \in \sigma$, für $r := \text{ar}(R)$ und für alle $(x_1, \dots, x_r) \in X^r$ gilt:

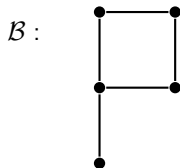
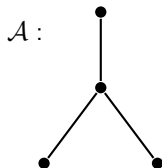
$$(x_1, \dots, x_r) \in R^{\mathcal{A}} \iff (\pi(x_1), \dots, \pi(x_r)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beispiel 3.48

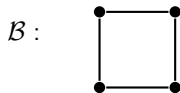
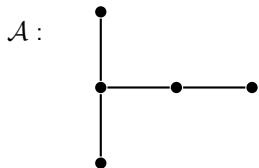
Sei $\sigma := \{E/2\}$ und sei $k := 0$.

In den folgenden Darstellungen von Graphen repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen Knoten x, y die beiden gerichteten Kanten (x, y) und (y, x) .

(a) Betrachte die folgenden beiden Graphen \mathcal{A}, \mathcal{B} .



(b) Betrachte die beiden folgenden Graphen \mathcal{A} , \mathcal{B} .



Die Ziele von Spoiler und Duplicator

Die Gewinnbedingung im EF-Spiel ist so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:

- **Spoilers Ziel** ist es, zu zeigen, dass die beiden Strukturen (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) verschieden sind.
- **Duplicators Ziel** ist es, einen etwaigen Unterschied zwischen den beiden Strukturen zu vertuschen.

Gewinnstrategien

Eine **Strategie** für einen der beiden Spieler im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als Nächstes machen soll. Formal:

- Eine **Strategie für Spoiler** ist eine Abbildung

$$f_{Sp} : \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \longrightarrow A \cup B.$$

Sind $a_{k+1}, \dots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \dots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente, so gibt

$$f_{Sp}(a_{k+1}, b_{k+1}, \dots, a_{k+i}, b_{k+i})$$

an, welches Element Spoiler in der $(i+1)$ -ten Runde wählen soll.

- Eine **Strategie für Duplicator** ist eine Abbildung

$$f_{Dupl} : \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \times (A \cup B) \longrightarrow B \cup A,$$

so dass für alle $i \in \{0, \dots, m-1\}$, alle $a_{k+1}, \dots, a_{k+i} \in A$, alle $b_{k+1}, \dots, b_{k+i} \in B$ und alle $c_{k+i+1} \in A \cup B$ gilt:

$$c_{k+i+1} \in A \iff f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \dots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1}) \in B.$$

Sind $a_{k+1}, \dots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \dots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden und ist $c_{k+i+1} \in A \cup B$ das von Spoiler in Runde $i+1$ gewählte Element, so gibt

$$f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \dots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1})$$

an, welches Element Duplicator in der $(i+1)$ -ten Runde wählen soll.

- Eine **Gewinnstrategie** ist eine Strategie für einen der beiden Spieler, mit der er jede Partie des m -Runden EF-Spiels auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) gewinnt.

Der Satz von Ehrenfeucht

Sei σ eine relationale Signatur, seien \mathcal{A}, \mathcal{B} zwei σ -Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ und $\bar{b} = b_1, \dots, b_k \in B$.

Der Satz von Ehrenfeucht besagt, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1) Duplicator hat eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .
- (2) Für jede FO[σ]-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ der Quantorentiefe $\leq m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k] \iff \mathcal{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_k].$$

Anschaulich bedeutet dies, dass (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) aus Perspektive von FO[σ]-Formeln der Quantorentiefe $\leq m$ „gleich“ aussehen, d.h. dass (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) von solchen Formeln nicht unterschieden werden können.

Die Quantorentiefe einer Formel φ ist dabei die maximale Anzahl von ineinander geschachtelten Quantoren, die in φ vorkommen:

Definition 3.49

Die **Quantorentiefe** (bzw. der **Quantorenrang**, engl.: **quantifier rank**) $qr(\varphi)$ einer FO[σ]-Formel φ ist rekursiv wie folgt definiert:

- Ist φ **atomar**, so ist $qr(\varphi) := 0$.
- Ist φ von der Form $\neg\psi$, so ist $qr(\varphi) := qr(\psi)$.
- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, so ist $qr(\varphi) := \max\{qr(\psi_1), qr(\psi_2)\}$.
- Ist φ von der Form $\exists x \psi$ oder $\forall x \psi$, so ist $qr(\varphi) := qr(\psi) + 1$.

Beispiele:

- $qr(\exists x \forall y (x=y \vee E(x, y))) = 2$.
- $qr(\exists x (E(x, x) \vee \forall y \neg E(x, y))) = 2$.
- $qr((\exists x E(x, x) \vee \forall y \neg E(x, y))) = 1$.

Bemerkung 3.50

Gemäß Satz 3.46 ist jede FO[σ]-Formel φ äquivalent zu einer FO[σ]-Formel φ' , in der nur Existenzquantoren und die Junktoren \neg, \vee vorkommen (d.h.: in φ' kommt keins der Symbole $\forall, \wedge, \rightarrow$ vor). Man sieht leicht, dass φ' sogar so gewählt werden kann, dass gilt: $qr(\varphi') = qr(\varphi)$ und $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$.

Wir beweisen hier nur die Richtung „(1) \implies (2)“ des Satzes von Ehrenfeucht, deren Kontraposition in folgendem Satz formuliert wird.

Satz 3.51 (Satz von Ehrenfeucht, einfache Version)

Sei σ eine relationale Signatur und seien \mathcal{A}, \mathcal{B} zwei σ -Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ und sei $\bar{b} = b_1, \dots, b_k \in B$.

Falls es eine FO[σ]-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ und $\text{qr}(\varphi) \leq m$ gibt, so dass

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k] \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \dots, b_k],$$

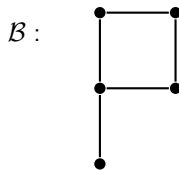
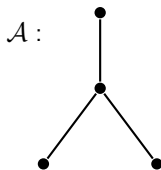
so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .

Beweisidee

Zunächst illustrieren wir die Beweisidee an einem Beispiel. Betrachte dazu die Formel

$$\varphi := \exists x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \vee E(x_1, x_2))$$

und die beiden Graphen \mathcal{A}, \mathcal{B} aus Beispiel 3.48(a).



Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$, d.h. $\mathcal{B} \models \neg\varphi$.

Beweis von Satz 3.51:

Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle FO[σ]-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

Für alle $m, k \in \mathbb{N}$, alle $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ und alle $\bar{b} = b_1, \dots, b_k \in B$ gilt:

Falls $qr(\varphi) \leq m$ und $|\text{frei}(\varphi)| \leq k$ und

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \dots, b_k],$$

so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .

Um $\mathbb{A}(\varphi)$ für eine gegebene Formel φ zu beweisen, seien im Folgenden $m, k \in \mathbb{N}$, $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ und $\bar{b} = b_1, \dots, b_k \in B$ beliebig gewählt. Es genügt, den Fall zu betrachten, in dem gilt:

$$(*) \quad m \geq qr(\varphi), \quad k \geq |\text{frei}(\varphi)| \quad \text{und} \quad \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\bar{b}],$$

denn andernfalls muss gemäß der Formulierung von $\mathbb{A}(\varphi)$ nichts gezeigt werden.

Folgerung aus dem Satz von Ehrenfeucht

Notation 3.52

Eine Klasse \mathcal{C} von σ -Strukturen heißt **FO-definierbar**, falls es einen FO[σ]-Satz φ gibt, der \mathcal{C} definiert.

Zur Erinnerung:

Für einen FO[σ]-Satz φ und eine Klasse \mathcal{C} von σ -Strukturen sagen wir „ φ definiert \mathcal{C} “, falls für jede σ -Struktur \mathcal{A} gilt: $\mathcal{A} \in \mathcal{C} \iff \mathcal{A} \models \varphi$.

Um für eine gegebene Klasse \mathcal{C} von σ -Strukturen zu zeigen, dass sie nicht FO-definierbar ist, können wir das folgende Korollar nutzen, das wir als eine einfache Folgerung aus Satz 3.51 erhalten.

Korollar 3.53

Sei σ eine relationale Signatur und sei \mathcal{C} eine Klasse von σ -Strukturen. Falls es für jedes $m \geq 1$ zwei σ -Strukturen \mathcal{A}_m und \mathcal{B}_m gibt, so dass gilt:

1. $\mathcal{A}_m \in \mathcal{C}$ und
2. $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{C}$ und
3. **Duplicator** hat eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf \mathcal{A}_m und \mathcal{B}_m ,

dann ist \mathcal{C} **nicht** FO-definierbar.

Lineare Ordnungen gerader Kardinalität

Wir werden nun Korollar 3.53 anwenden, um folgenden Satz zu zeigen.

Satz 3.54

Die Klasse $EVEN_{\leq}$, die aus allen *linearen Ordnungen* $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ *gerader Kardinalität* besteht (d.h., A ist endlich und $|A|$ ist durch 2 teilbar), ist nicht FO-definierbar.

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es gemäß Korollar 3.53, für jede Rundenzahl $m \geq 1$ eine lineare Ordnung \mathcal{A}_m gerader Kardinalität und eine lineare Ordnung \mathcal{B}_m ungerader Kardinalität anzugeben, für die wir zeigen können, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf \mathcal{A}_m und \mathcal{B}_m hat.

Als Vorbereitung dazu betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 3.55

Betrachte die linearen Ordnungen $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, \leq^{\mathcal{B}})$ mit $A = \{1, \dots, 8\}$ und $B = \{1, \dots, 9\}$, wobei $\leq^{\mathcal{A}}$ und $\leq^{\mathcal{B}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf A und B sind.

Seien außerdem $k := 2$ und $\bar{a} := a_1, a_2$ und $\bar{b} := b_1, b_2$ mit $a_1 = b_1 = 1$ und $a_2 = 8$ und $b_2 = 9$ vorgegeben.

Frage: Was ist die größte Zahl m , so dass Duplicator eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) hat?

Die Gewinnstrategie für Duplicator lässt sich zu folgendem Resultat verallgemeinern.

Lemma 3.56

Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} endliche lineare Ordnungen, sei $k := 2$, und sei $\bar{a} := a_1, a_2$ und $\bar{b} := b_1, b_2$, wobei a_1, b_1 die kleinsten und a_2, b_2 die größten Elemente in \mathcal{A} und \mathcal{B} bezüglich $\leq^{\mathcal{A}}$ und $\leq^{\mathcal{B}}$ sind.

Für jedes $m \geq 1$ gilt: Falls $|A|, |B| > 2^m$ oder $|A| = |B|$, so hat Duplicator eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind a_{2+1}, \dots, a_{2+i} und b_{2+1}, \dots, b_{2+i} die in den Runden $1, \dots, i$ gewählten Elemente in A und B , so gilt für alle $j, j' \in \{1, \dots, 2+i\}$:

1. $a_j \leq^A a_{j'} \iff b_j \leq^B b_{j'}$ und
2. $Dist(a_j, a_{j'}) = Dist(b_j, b_{j'})$ oder $Dist(a_j, a_{j'}), Dist(b_j, b_{j'}) \geq 2^{m-i}$.

Der Beweis folgt per Induktion nach i .

Satz 3.54 folgt nun direkt aus Korollar 3.53 und Lemma 3.56.

Beweis von Satz 3.54.

Um nachzuweisen, dass die Klasse $EVEN_{\leq}$ nicht FO-definierbar ist, genügt es laut Korollar 3.53, für jede Zahl $m \geq 1$ eine endliche lineare Ordnung \mathcal{A}_m gerader Kardinalität und eine endliche lineare Ordnung \mathcal{B}_m ungerader Kardinalität zu finden, so dass Duplicator eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf \mathcal{A}_m und \mathcal{B}_m besitzt.

Wir wählen für \mathcal{A}_m die natürliche lineare Ordnung mit Universum $A_m := \{1, \dots, 2^m + 2\}$, und für \mathcal{B}_m die natürliche lineare Ordnung mit Universum $B_m := \{1, \dots, 2^m + 1\}$.

Gemäß Lemma 3.56 hat Duplicator eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}_m, \bar{a}) und (\mathcal{B}_m, \bar{b}) , wobei $\bar{a} = a_1, a_2$ und $\bar{b} = b_1, b_2$ jeweils aus dem kleinsten und dem größten Element der beiden linearen Ordnungen bestehen.

Offensichtlicherweise ist diese Gewinnstrategie auch eine Gewinnstrategie für Duplicator im m -Runden EF-Spiel auf \mathcal{A}_m und \mathcal{B}_m . □

Bemerkung 3.57

Der obige Beweis zeigt nicht nur, dass die Klasse $EVEN_{\leq}$ nicht FO-definierbar ist, sondern sogar die etwas stärkere Aussage:

*Es gibt keinen FO[$\{\leq\}$]-Satz ψ , so dass für jede **endliche lineare Ordnung** B gilt: $B \models \psi \iff |B|$ ist gerade.*

Graph-Zusammenhang und Erreichbarkeit sind nicht FO-definierbar

Wir können die Aussage von Bemerkung 3.57 nutzen, um Folgendes zu zeigen.

Satz 3.58

Sei $\sigma := \{E/2\}$.

(a) *„Graph-Zusammenhang ist nicht FO-definierbar.“*

*D.h.: Es gibt keinen FO[σ]-Satz φ_{Conn} , so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ und die zugehörige σ -Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{\text{Conn}} \iff \mathcal{G}$ ist **zusammenhängend**.*

(b) *„Erreichbarkeit ist nicht FO-definierbar.“*

*D.h.: Es gibt keine FO[σ]-Formel $\varphi_{\text{Reach}}(x, y)$, so dass für alle endlichen gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{\text{Reach}}[a, b] \iff$ **es gibt in \mathcal{A} einen Weg von Knoten a zu Knoten b .***

(b) folgt direkt aus (a), denn:

Angenommen $\varphi_{Reach}(x, y)$ wäre eine $FO[\sigma]$ -Formel, so dass für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ es gibt in \mathcal{A} einen Weg von Knoten a zu Knoten b .

Dann ist

$$\varphi_{Conn} := \forall x \forall y \varphi_{Reach}(x, y)$$

ein $FO[\sigma]$ -Satz, der in einem gerichteten Graphen \mathcal{A} genau dann erfüllt ist, wenn \mathcal{A} stark zusammenhängend ist.

Insbesondere gilt dann für jeden ungerichteten Graphen \mathcal{G} und die zu \mathcal{G} gehörende σ -Struktur \mathcal{A} : $\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ ist zusammenhängend.

Dies ist ein Widerspruch zu (a).

Logische Reduktionen

Bemerkung 3.59

Die im Beweis von Satz 3.58 benutzte Vorgehensweise ist unter dem Begriff **logische Reduktion** (oder **Transduktionen**) bekannt.

Im Beweis von Teil (b) wurde gezeigt: Falls es eine $\text{FO}\{E\}$ -Formel gibt, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist, dann gibt es auch eine $\text{FO}\{E\}$ -Formel, die Graph-Zusammenhang definiert.

Somit wurde das Problem, einen $\text{FO}\{E\}$ -Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert, auf das Problem reduziert, eine $\text{FO}\{E\}$ -Formel zu finden, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist.

Im Beweis von Teil (a) wurde das Problem, einen $\text{FO}\{\{\leq\}\}$ -Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine **gerade** Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen $\text{FO}\{\{E\}\}$ -Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine **gerade** Kardinalität“ FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen „simuliert“ (bzw. “interpretiert“), indem man die Kantenrelation des Graphen durch eine $\text{FO}\{\{\leq\}\}$ -Formel beschreibt.

Generell ist diese Methode der **logischen Reduktionen** oft nützlich, um bereits bekannte Nicht-Definierbarkeits-Resultate auf neue Nicht-Definierbarkeits-Resultate zu übertragen.

Abschnitt 3.9:

Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und die
Folgerungsbeziehung

Die im Folgenden eingeführten Begriffe der Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und der Folgerungsbeziehung sind für die Logik erster Stufe ähnlich definiert wie für die Aussagenlogik.

Im Folgenden sei σ stets eine beliebige Signatur.

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Definition 3.60

Eine FO[σ]-Formel φ (bzw. eine Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$) heißt **erfüllbar**, wenn es eine σ -Interpretation gibt, die φ (bzw. Φ) erfüllt.

Eine Formel oder Formelmenge, die **nicht erfüllbar** ist, nennen wir **unerfüllbar**.

Definition 3.61

Eine FO[σ]-Formel φ heißt **allgemeingültig**, wenn **jede** σ -Interpretation die Formel φ erfüllt.

Wir schreiben kurz $\models \varphi$ um auszudrücken, dass φ allgemeingültig ist.

Offensichtlicherweise gilt für alle FO[σ]-Formeln φ :

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig} \quad \iff \quad \neg\varphi \text{ ist unerfüllbar.}$$

Verum (\top) und Falsum (\perp)

Beispiele:

- Die FO[σ]-Formel $\forall v_0 v_0=v_0$ ist allgemeingültig.
- Die FO[σ]-Formel $\exists v_0 \neg v_0=v_0$ ist unerfüllbar.

Notation 3.62

Wir schreiben \top (in Worten: **Verum**), um die allgemeingültige FO-Formel $\forall v_0 v_0=v_0$ zu bezeichnen.

Wir schreiben \perp (in Worten: **Falsum**), um die unerfüllbare FO-Formel $\exists v_0 \neg v_0=v_0$ zu bezeichnen.

Die Folgerungsbeziehung

Definition 3.63

Eine FO[σ]-Formel ψ **folgt** aus einer Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ (wir schreiben: $\Phi \models \psi$), wenn für jede σ -Interpretation \mathcal{I} gilt:

Falls $\mathcal{I} \models \Phi$, so gilt auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Notation

Für zwei FO[σ]-Formeln φ, ψ schreiben wir kurz $\varphi \models \psi$ an Stelle von $\{\varphi\} \models \psi$ und sagen, dass die Formel ψ aus der Formel φ folgt.

Zusammenhänge

Es bestehen ähnliche Zusammenhänge wie bei der Aussagenlogik:

Lemma 3.64 (Allgemeingültigkeit, Unerfüllbarkeit und Folgerung)

Für jede FO[σ]-Formel φ gilt:

$$(a) \quad \varphi \text{ ist allgemeingültig} \iff \varphi \equiv \top \iff \top \models \varphi.$$

$$(b) \quad \varphi \text{ ist unerfüllbar} \iff \varphi \equiv \perp \iff \varphi \models \perp.$$

$$(c) \quad \models \varphi \iff \emptyset \models \varphi.$$

D.h.: φ ist allgemeingültig $\iff \varphi$ folgt aus der leeren Menge.

Lemma 3.65 (Erfüllbarkeit und die Folgerungsbeziehung)

(a) Für alle Formelmengen $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und alle FO[σ]-Formeln ψ gilt:

$$\Phi \models \psi \iff \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ ist unerfüllbar.}$$

(b) Für alle FO[σ]-Formeln φ, ψ gilt: $\varphi \equiv \psi \iff \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Beweis der beiden Lemmas: Analog zu den Beweisen der entsprechenden Resultate in der Aussagenlogik. Details: Übung.

Abschnitt 3.10:
Normalformen

Negationsnormalform

Die **Negationsnormalform** für Formeln der Logik erster Stufe ist ähnlich definiert wie die Negationsnormalform der Aussagenlogik.

Definition 3.66

Sei σ eine beliebige Signatur. Eine $\text{FO}[\sigma]$ -Formel φ ist in **Negationsnormalform** (kurz: **NNF**), wenn Negationszeichen in φ nur unmittelbar vor atomaren Subformeln auftreten und φ den Junktor „ \rightarrow “ nicht enthält.

Satz 3.67

Jede $\text{FO}[\sigma]$ -Formel φ ist äquivalent zu einer Formel in NNF.

Beweis.

Gemäß Satz 3.46 können wir o.B.d.A. annehmen, dass φ den Junktor „ \rightarrow “ nicht enthält.

Ähnlich wie für die Aussagenlogik definieren wir per Induktion über den Aufbau zu jeder $\text{FO}[\sigma]$ -Formel φ zwei $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln φ' und φ'' in **NNF**, so dass gilt:

$\varphi \equiv \varphi'$ und $\neg\varphi \equiv \varphi''$. Details: Übung. □

Pränexe Normalform

Definition 3.68

Sei σ eine beliebige Signatur.

- (a) Eine FO[σ]-Formel heißt **quantorenfrei**, falls in ihr keins der Symbole \exists, \forall vorkommt.

Die Menge aller quantorenfreien FO[σ]-Formeln bezeichnen wir mit QF_σ .

- (b) Eine FO[σ]-Formel φ ist in **pränexer Normalform** (bzw. **Pränex-Normalform**, kurz: **PNF**), wenn sie von der Form

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \chi$$

ist, wobei $n \geq 0$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$, $x_1, \dots, x_n \in \text{VAR}$ und $\chi \in QF_\sigma$.

$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n$ wird **Quantoren-Präfix von φ** genannt;

χ heißt **Kern** (bzw. **Matrix**) von φ .

Satz 3.69

Jede FO[σ]-Formel φ ist äquivalent zu einer FO[σ]-Formel φ' in pränexer Normalform mit $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$.

Bevor wir Satz 3.69 beweisen, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 3.70

Sei

$$\varphi(y) := \forall x \neg (\exists y E(x, y) \rightarrow \exists x E(x, y)).$$

Umformung in eine äquivalente Formel in Pränex-Normalform:

Beweis von Satz 3.69:

Wir zeigen zunächst drei Lemmas und schließen danach den Beweis ab.

Lemma 3.71

Sei $\psi := Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \chi$, wobei $n \geq 0$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$ und $\chi \in \text{FO}[\sigma]$. Für jedes $Q \in \{\exists, \forall\}$ sei

$$\tilde{Q} := \begin{cases} \forall & \text{falls } Q = \exists, \\ \exists & \text{falls } Q = \forall. \end{cases}$$

Dann gilt: $\neg \psi \equiv \tilde{Q}_1 x_1 \cdots \tilde{Q}_n x_n \neg \chi$.

Beweis.

Einfaches Nachrechnen per Induktion nach n unter Verwendung der Tatsache, dass $\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$ und $\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$ (Lemma 3.44).

Details: Übung. □

Lemma 3.72

Für alle FO[σ]-Formeln φ und ψ und für alle Variablen $x \in \text{VAR} \setminus \text{frei}(\varphi)$ gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \exists x \psi) &\equiv \exists x (\varphi \wedge \psi) & , & & (\varphi \wedge \forall x \psi) &\equiv \forall x (\varphi \wedge \psi) , \\ (\varphi \vee \exists x \psi) &\equiv \exists x (\varphi \vee \psi) & , & & (\varphi \vee \forall x \psi) &\equiv \forall x (\varphi \vee \psi) . \end{aligned}$$

Beweis. Die Beweise aller vier Äquivalenzen sind ähnlich. Wir beweisen hier nur die erste:

$$(\varphi \wedge \exists x \psi) \equiv \exists x (\varphi \wedge \psi) . \tag{1}$$

Lemma 3.73

Seien

$$\psi_1 := Q_1 x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \chi_1 \quad \text{und} \quad \psi_2 := Q'_1 y_1 \cdots Q'_m y_m \chi_2 ,$$

wobei $\ell, m \geq 0$, $Q_1, \dots, Q_\ell, Q'_1, \dots, Q'_m \in \{\exists, \forall\}$,
 $x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_m \in \text{VAR}$, $\chi_1, \chi_2 \in \text{FO}[\sigma]$.

Es gelte: $\{x_1, \dots, x_\ell\} \cap \text{frei}(\psi_2) = \emptyset$ und $\{y_1, \dots, y_m\} \cap \text{frei}(\chi_1) = \emptyset$.

Dann gilt für $* \in \{\wedge, \vee\}$, dass

$$(\psi_1 * \psi_2) \equiv Q_1 x_1 \cdots Q_\ell x_\ell Q'_1 y_1 \cdots Q'_m y_m (\chi_1 * \chi_2).$$

Beweis.

Zwei Induktionen über ℓ bzw. m unter Verwendung von Lemma 3.72.

Details: Übung. □

Abschluss des Beweises von Satz 3.69:

Sei φ eine FO[σ]-Formel.

Gemäß Satz 3.46 können wir o.B.d.A. annehmen, dass φ den Junktor „ \rightarrow “ nicht enthält.

Per Induktion über den Aufbau von φ zeigen wir, dass es eine zu φ äquivalente Formel φ' in PNF gibt mit $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$.

Induktionsanfang: Atomare Formeln sind quantorenfrei und daher insbesondere in PNF.

Induktionsschritt:

Kapitel 4:

Grundlagen des automatischen Schließens

Ziel: Automatisches Schließen

- In typischen Anwendungen der Logik beschreibt man mit Hilfe einer Formelmenge das Wissen über ein Anwendungsszenario und will aus diesem Wissen dann, möglichst automatisch, Folgerungen ziehen.
- In diesem Kapitel werden wir untersuchen, inwieweit sich für die Logik erster Stufe das Folgern automatisieren lässt.
- Wir werden einen syntaktischen Beweisbegriff einführen, der genau dem semantischen Folgerungsbegriff entspricht (**Vollständigkeitssatz**).
- Dadurch werden wir einen Algorithmus erhalten, der nach und nach alle allgemeingültigen Sätze der Logik erster Stufe aufzählt.
- Andererseits werden wir zeigen, dass es keinen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines beliebigen Satzes der Logik erster Stufe entscheidet, ob der Satz allgemeingültig ist.
- Als Folgerung aus dem Vollständigkeitssatz werden wir auch den **Endlichkeitssatz** für die Logik erster Stufe erhalten.

Abschnitt 4.1:

Kalküle und Ableitungen

Ableitungsregeln und Kalküle

Definition 4.1

Sei M eine beliebige Menge.

- (a) Eine **Ableitungsregel über M** (kurz: **Regel**) hat die Form

$$\frac{a_1 \cdots a_n}{b}$$

wobei $n \geq 0$ und $a_1, \dots, a_n, b \in M$.

Wir bezeichnen a_1, \dots, a_n als die **Voraussetzungen** der Regel und b als die **Konsequenz**.

Ableitungsregeln ohne Voraussetzungen (also mit $n = 0$) bezeichnen wir als **Axiome**.

- (b) Ein **Kalkül** über M ist eine Menge von Ableitungsregeln über M .

Ableitungen

Definition 4.2

Sei \mathfrak{K} ein Kalkül über einer Menge M , sei $V \subseteq M$ und sei $a \in M$.

(a) Eine **Ableitung von a aus V in \mathfrak{K}** ist eine endliche Folge $(a_1, \dots, a_\ell) \in M^\ell$, so dass $\ell \geq 1$, $a_\ell = a$ und für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$ gilt:

- $a_i \in V$ oder
- $\frac{\quad}{a_i}$ ist ein Axiom in \mathfrak{K} oder
- es gibt in \mathfrak{K} eine Ableitungsregel $\frac{b_1 \cdots b_n}{a_i}$ so dass $b_1, \dots, b_n \in \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$.

Der besseren Lesbarkeit halber schreiben wir in konkreten Beispielen Ableitungen der Form (a_1, \dots, a_ℓ) oft zeilenweise, also

$$\begin{array}{l} (1) \ a_1 \\ (2) \ a_2 \\ \vdots \\ (\ell) \ a_\ell \end{array}$$

und geben am Ende jeder Zeile eine kurze Begründung an.

- (b) Ein Element $a \in M$ ist **aus V in \mathfrak{K} ableitbar**, wenn es eine Ableitung von a aus V in \mathfrak{K} gibt.
- (c) Wir schreiben $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$, um die Menge aller aus V in \mathfrak{K} ableitbaren Elemente zu bezeichnen.
- (d) Für $V = \emptyset$ nutzen wir folgende Notationen:

Eine **Ableitung von a in \mathfrak{K}** ist eine Ableitung von a aus \emptyset in \mathfrak{K} .

Ein Element $a \in M$ heißt **ableitbar aus \mathfrak{K}** , falls es eine Ableitung von a in \mathfrak{K} gibt.

Die Menge aller in \mathfrak{K} ableitbaren Elemente bezeichnen wir mit $\text{abl}_{\mathfrak{K}}$, d.h.:
 $\text{abl}_{\mathfrak{K}} := \text{abl}_{\mathfrak{K}}(\emptyset)$.

Wir werden Kalküle nutzen, um auf elegante Art **rekursive Definitionen** bestimmter Mengen anzugeben:

Um eine bestimmte Teilmenge A einer Menge M rekursiv zu definieren, genügt es, einen Kalkül \mathfrak{K} über M anzugeben, für den gilt: $\text{abl}_{\mathfrak{K}} = A$.

Beispiel: Mengen natürlicher Zahlen

Beispiel 4.3

Sei \mathcal{R} der Kalkül über $M := \mathbb{N}$ mit folgenden Ableitungsregeln:

- Axiom: $\frac{}{1}$
- Weitere Regeln: $\frac{n}{2n}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Fragen:

- Was ist $\text{abl}_{\mathcal{R}}$?
- Was ist $\text{abl}_{\mathcal{R}}(V)$ für $V := \{3\}$?

Beispiel: Aussagenlogik

Beispiel 4.4

Sei $\Sigma := A_{AL}$ das Alphabet der Aussagenlogik, d.h.

$$\Sigma = AS \cup \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}, (,) \},$$

wobei $AS = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Aussagensymbole ist.

Gesucht: Ein **Kalkül \mathfrak{K} über $M := \Sigma^*$** , aus dem genau die syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln ableitbar sind, d.h. **$abl_{\mathfrak{K}} = AL$** .

Beispiel: Resolution

Die Kalkül-Schreibweise lässt sich auch dazu nutzen, eine elegante Darstellung der **Resolutionswiderlegungen** zu angeben.

Zur Erinnerung:

- Eine **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen.
Ein **Literal** ist eine aussagenlogische Formel der Form X oder $\neg X$, wobei $X \in AS$.
- Wir haben in Satz 2.58 gezeigt, dass für jede Menge Γ von Klauseln gilt:

$$\Gamma \text{ ist unerfüllbar} \iff \Gamma \vdash_R \emptyset.$$

Hierbei ist \emptyset die **leere Klausel**.

„ $\Gamma \vdash_R \emptyset$ “ bedeutet, dass es eine **Resolutionswiderlegung von Γ** gibt.

Zur Erinnerung hier die Definition des Begriffs der Resolutionswiderlegungen:

Resolutionsableitungen und -widerlegungen

Definition

Sei Γ eine Klauselmeng.

- (a) Eine **Resolutionsableitung** einer Klausel δ aus Γ ist ein Tupel $(\delta_1, \dots, \delta_\ell)$ von Klauseln, so dass gilt: $\ell \geq 1$, $\delta_\ell = \delta$, und für alle $i \in [\ell]$ ist
- $\delta_i \in \Gamma$, oder
 - es gibt $j, k \in [i-1]$, so dass δ_i eine Resolvente von δ_j und δ_k ist.
- (b) Eine **Resolutionswiderlegung** von Γ ist eine Resolutionsableitung der leeren Klausel aus Γ .

Zur Erinnerung:

Eine Klausel δ ist genau dann eine **Resolvente** zweier Klauseln γ_1 und γ_2 , wenn es ein Literal λ gibt, so dass gilt:

$$\lambda \in \gamma_1, \quad \bar{\lambda} \in \gamma_2 \quad \text{und} \quad \delta = (\gamma_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (\gamma_2 \setminus \{\bar{\lambda}\}).$$

Der Resolutionskalkül der Aussagenlogik

Gesucht: Ein Kalkül \mathfrak{K}_R über der Menge aller Klauseln, so dass für jede Klauselmengemenge Γ und jede Klausel δ gilt:

$$\delta \in \text{abl}_{\mathfrak{K}_R}(\Gamma) \iff \Gamma \vdash_R \delta$$

d.h.: δ ist genau dann aus Γ in \mathfrak{K}_R ableitbar, wenn es eine Resolutionsableitung von δ aus Γ gibt.

Der Kalkül \mathcal{K}_R wird **Resolutionskalkül der Aussagenlogik** genannt.

Kalküle und abgeschlossene Mengen

Definition 4.5

Sei \mathcal{R} ein Kalkül über einer Menge M .

Eine Menge $A \subseteq M$ heißt **abgeschlossen unter \mathcal{R}** , wenn für jede Ableitungsregel

$$\frac{a_1 \cdots a_n}{b}$$

in \mathcal{R} gilt: Falls $a_1, \dots, a_n \in A$, so ist auch $b \in A$.

Satz 4.6

Sei \mathcal{R} ein Kalkül über einer Menge M und sei $V \subseteq M$.

Dann ist $\text{abl}_{\mathcal{R}}(V)$ die bzgl. „ \subseteq “ kleinste unter \mathcal{R} abgeschlossene Menge, die V enthält.

D.h. es gilt:

- (a) $V \subseteq \text{abl}_{\mathcal{R}}(V)$.
- (b) $\text{abl}_{\mathcal{R}}(V)$ ist abgeschlossen unter \mathcal{R} .
- (c) Für jede Menge A mit $V \subseteq A \subseteq M$ gilt:
Falls A abgeschlossen ist unter \mathcal{R} , so ist $\text{abl}_{\mathcal{R}}(V) \subseteq A$.

$$(d) \quad \text{abl}_{\mathcal{R}}(V) = \bigcap_{V \subseteq A \subseteq M, \substack{A \text{ abgeschlossen unter } \mathcal{R}}} A.$$

Induktionsprinzip für die ableitbaren Elemente eines Kalküls

Sei \mathfrak{K} ein Kalkül über einer Menge M und sei $V \subseteq M$. Um zu zeigen, dass eine bestimmte Aussage $\mathbb{A}(a)$ für alle aus V in \mathfrak{K} ableitbaren Elemente a gilt, können wir das Induktionsprinzip nutzen und einfach Folgendes zeigen:

- (1) Die Aussage $\mathbb{A}(a)$ gilt für jedes $a \in V$, und
- (2) für jede Ableitungsregel

$$\frac{a_1 \cdots a_n}{b}$$

in \mathfrak{K} gilt: Falls $\mathbb{A}(a_i)$ für jedes $i \in [n]$ gilt, so gilt auch $\mathbb{A}(b)$.

Daraus folgt laut dem nächsten Lemma dann, dass $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ gilt.

Lemma 4.7

Sei \mathfrak{K} ein Kalkül über einer Menge M und sei $V \subseteq M$. Falls

- (1) eine Aussage $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in V$ gilt und
- (2) für jede Ableitungsregel

$$\frac{a_1 \cdots a_n}{b}$$

in \mathfrak{K} gilt: falls $\mathbb{A}(a_i)$ für jedes $i \in [n]$ gilt, so gilt auch $\mathbb{A}(b)$,

dann gilt die Aussage $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

Beweis.

Es seien (1) und (2) erfüllt.

Betrachte die Menge

$$A := \{ a \in M : \text{die Aussage } \mathbb{A}(a) \text{ gilt} \} .$$

Wegen (1) ist $V \subseteq A$.

Wegen (2) ist A abgeschlossen unter \mathfrak{R} .

Aus Satz 4.6 folgt daher: $\text{abl}_{\mathfrak{R}}(V) \subseteq A$.

Somit gilt die Aussage $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in \text{abl}_{\mathfrak{R}}(V)$. □

Abschnitt 4.2:

Ein Beweiskalkül für die Logik erster
Stufe — der Vollständigkeitssatz

Notation

- In diesem Kapitel sei σ eine beliebige fest gewählte Signatur.
- Der Einfachheit halber werden wir o.B.d.A. in diesem Kapitel nur $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln betrachten, in denen das Symbol „ \rightarrow “ nicht vorkommt.
- $t, u, t_1, t_2, t', u', u'', \dots$ bezeichnen immer σ -Terme.
- $\varphi, \psi, \chi, \dots$ bezeichnen immer $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln.
- $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi', \dots$ bezeichnen immer Mengen von $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln.
- $\Gamma, \Delta, \Gamma', \Delta_1, \Delta_2, \dots$ bezeichnen immer **endliche** Mengen von $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln.
- Für $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ ist $\text{frei}(\Phi) := \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{frei}(\varphi)$.

Manchmal schreiben wir auch **frei**(Φ, φ) an Stelle von $\text{frei}(\Phi \cup \{\varphi\})$.

- Ist M eine Menge, so schreiben wir $L \subseteq_e M$, um auszudrücken, dass L eine **endliche** Teilmenge von M ist.

Sequenzen

Definition 4.8

- (a) Eine **Sequenz** ist ein Ausdruck der Form

$$\Gamma \vdash \psi$$

wobei $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ und $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$ (d.h., Γ ist eine **endliche** Menge von $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln).

Wir bezeichnen Γ als das **Antezedens** und ψ als das **Sukzedens** der Sequenz $\Gamma \vdash \psi$.

- (b) Wir schreiben M_S um die Menge aller Sequenzen zu bezeichnen, d.h.:

$$M_S := \{ \Gamma \vdash \psi \mid \Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma], \psi \in \text{FO}[\sigma] \}.$$

Korrektheit einer Sequenz

Definition 4.9

Eine Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ heißt **korrekt**, falls gilt: $\Gamma \models \psi$.

Zur Erinnerung: $\Gamma \models \psi$ bedeutet:

Für jede σ -Interpretation \mathcal{I} gilt: Falls $\mathcal{I} \models \Gamma$, so auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Beispiel:

Welche der folgenden Sequenzen sind korrekt für alle $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$ und alle $x, y \in \text{VAR}$; welche sind nicht korrekt?

- (1) $\{ (\neg\varphi \vee \psi), \varphi \} \vdash \psi$
- (2) $\emptyset \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$
- (3) $\{ \exists x \forall y \varphi \} \vdash \forall y \exists x \varphi$
- (4) $\{ \forall y \exists x x=y \} \vdash \exists x \forall y x=y$

Ziel

Wir wollen im Folgenden einen Kalkül \mathfrak{K} über M_5 angeben, so dass gilt:

- (1) \mathfrak{K} ist **korrekt**, d.h. jede in \mathfrak{K} ableitbare Sequenz ist korrekt.
- (2) \mathfrak{K} ist **vollständig**, d.h. jede korrekte Sequenz ist in \mathfrak{K} ableitbar.
- (3) \mathfrak{K} ist **effektiv**, d.h. es gibt einen Algorithmus, der nach und nach genau die aus \mathfrak{K} ableitbaren Sequenzen aufzählt.

Dies liefert dann insbesondere einen Algorithmus, der nach und nach alle allgemeingültigen $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln aufzählt: Dazu lasse den gemäß (3) existierenden Algorithmus laufen, und immer wenn dieser eine Sequenz der Form $\Gamma \vdash \psi$ mit $\Gamma = \emptyset$ ausgeben will, gib ψ aus.

Wegen (1) ist die Sequenz dann korrekt, d.h. es gilt $\emptyset \models \psi$, und daher ist ψ allgemeingültig.

Wegen (2) werden tatsächlich alle allgemeingültigen $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln aufgezählt.

Notationen für Sequenzen

Wir schreiben kurz

- $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, um die Sequenz $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ zu bezeichnen.
- $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, um die Sequenz $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \psi$ zu bezeichnen.
- $\vdash \psi$, um die Sequenz $\emptyset \vdash \psi$ zu bezeichnen.

Sequenzenregeln

Eine **Sequenzenregel** ist eine Ableitungsregel über M_S .

Sequenzenregeln der Form

$$\frac{a_1 \cdots a_n}{b}$$

schreiben wir meistens zeilenweise, als

$$\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \hline b \end{array}$$

wobei jedes a_i eine Sequenz der Form $\Gamma_i \vdash \psi_i$ ist,
und b eine Sequenz der Form $\Delta \vdash \varphi$ ist.

Definition 4.10

Eine **Sequenzenregel**

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \vdash \psi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_n \vdash \psi_n \end{array}}{\Delta \vdash \varphi}$$

heißt **korrekt**, wenn Folgendes gilt: Sind die Sequenzen $\Gamma_i \vdash \psi_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ korrekt, so ist auch die Sequenz $\Delta \vdash \varphi$ korrekt.

Aus dem Induktionsprinzip für Kalküle (Lemma 4.7) folgt direkt:

Lemma 4.11

Ein Kalkül \mathfrak{K} über M_S ist korrekt, falls jede Sequenzenregel in \mathfrak{K} korrekt ist.

Wir werden nun eine Reihe von korrekten Sequenzenregeln zusammentragen, die alle zusammen dann den von uns gesuchten korrekten, vollständigen und effektiven Kalkül über M_S bilden werden.

Grundregeln:

Für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- Voraussetzungsregel (V):

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

- Erweiterungsregel (E):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi} \quad \text{falls } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

Lemma 4.12

Jede der Grundregeln (V) bzw. (E) ist korrekt.

Ausagenlogische Regeln:

Für alle $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi, \psi, \chi \in \text{FO}[\sigma]$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- Fallunterscheidungsregel (FU):

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma, \psi \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi \end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$$

- Widerspruchsregel (W):

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi \end{array}}{\Gamma \vdash \varphi} \quad (\text{für alle } \varphi \in \text{FO}[\sigma])$$

- \wedge -Einführung im Antezedens ($\wedge A_1$), ($\wedge A_2$):

$$\frac{\Gamma, \varphi \quad \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi}$$

$$\frac{\Gamma, \psi \quad \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi}$$

- \wedge -Einführung im Sukzedens ($\wedge S$):

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \psi \end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

- \vee -Einführung im Antezedens ($\vee A$):

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma, \varphi \quad \vdash \chi \\ \Gamma, \psi \quad \vdash \chi \end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

- \vee -Einführung im Sukzedens ($\vee S_1$), ($\vee S_2$):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$$

Lemma 4.13

Jede der aussagenlogischen Regeln (FU), (W), ($\wedge A_1$), ($\wedge A_2$), ($\wedge S$), ($\vee A$), ($\vee S_1$), ($\vee S_2$) ist korrekt.

Substitutionen

Um weitere wichtige Sequenzenregeln einführen zu können, benötigen wir eine Möglichkeit, für eine Variable $x \in \text{VAR}$ und einen σ -Term $t \in T_\sigma$ eine FO[σ]-Formel φ so zu einer FO[σ]-Formel φ_x^t abzuändern, dass gilt:

Die Formel φ_x^t sagt über den Term t dasselbe aus, wie die Formel φ über die Variable x .

Präzise: Es soll für jede σ -Interpretation \mathcal{I} gelten:

$$\mathcal{I} \models \varphi_x^t \iff \mathcal{I}_x^t \models \varphi. \quad (2)$$

Dabei ist die σ -Interpretation \mathcal{I}_x^t für $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{I}_x^t := (\mathcal{A}, \beta_x^a), \text{ für } a := \llbracket t \rrbracket^{\mathcal{I}}.$$

Außerdem soll gelten:

$$\varphi_x^x = \varphi. \quad (3)$$

Um zu gewährleisten, dass (2) und (3) gilt, wählen wir zu gegebenem φ , t und x die Formel φ_x^t wie folgt:

- Falls $t = x$, so setze $\varphi_x^t := \varphi$. Andernfalls gehe wie folgt vor:
- Sei y_1, \dots, y_ℓ eine Liste aller Variablen aus $\text{var}(t) \cup \{x\}$, die gebundene Vorkommen in φ besitzen.
- Sei z_1, \dots, z_ℓ eine Liste von Variablen $\neq x$, die *nicht* in φ oder t vorkommen.
- Sei φ' die Formel, die aus φ entsteht, indem für jedes $i \in \{1, \dots, \ell\}$ jedes *gebundene* Vorkommen der Variablen y_i ersetzt wird durch die Variable z_i .
- Sei φ_x^t die Formel, die aus φ' entsteht, indem jedes Vorkommen der Variablen x durch den Term t ersetzt wird.

Lemma 4.14 (Substitutionslemma)

Für jede FO[σ]-Formel φ , jeden σ -Term t , jede Variable $x \in \text{VAR}$ und jede σ -Interpretation \mathcal{I} gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi_x^t \iff \mathcal{I}_x^t \models \varphi.$$

Beweis.

Übung. □

Wir können nun weitere wichtige Sequenzenregeln formulieren:

Quantorenregeln:

Für alle $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$, alle $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$, alle $x, y \in \text{VAR}$ und alle $t \in \text{T}_\sigma$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- \forall -Einführung im Antezedens ($\forall A$):

$$\frac{\Gamma, \varphi_x^t \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \psi}$$

- \forall -Einführung im Sukzedens ($\forall S$):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_x^y}{\Gamma \vdash \forall x \varphi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x \varphi)$$

- \exists -Einführung im Antezedens ($\exists A$):

$$\frac{\Gamma, \varphi_x^y \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x \varphi, \psi)$$

- \exists -Einführung im Sukzedens ($\exists S$):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_x^t}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$$

Lemma 4.15

Jede der Quantorenregeln $(\forall A)$, $(\forall S)$, $(\exists A)$, $(\exists S)$ ist korrekt.

Gleichheitsregeln:

Für alle $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$, alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, alle $x \in \text{VAR}$ und alle $t, u \in T_\sigma$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- Reflexivität der Gleichheit (G):

$$\frac{}{\Gamma \vdash t=t}$$

- Substitutionsregel (S):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \frac{t}{x}}{\Gamma, t=u \vdash \varphi \frac{u}{x}}$$

Lemma 4.16

Jede der Gleichheitsregeln (G) bzw. (S) ist korrekt.

Der Sequenzenkalkül \mathfrak{R}_S für die Logik erster Stufe

Definition 4.17

Der **Sequenzenkalkül** \mathfrak{R}_S ist der Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen, der für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$, alle $\varphi, \psi, \chi \in \text{FO}[\sigma]$, alle $t, u \in T_\sigma$ und alle $x, y \in \text{VAR}$ aus

- den Grundregeln (V), (E),
- den aussagenlogischen Regeln
(FU), (W), ($\wedge A_1$), ($\wedge A_2$), ($\wedge S$), ($\vee A$), ($\vee S_1$), ($\vee S_2$),
- den Quantorenregeln ($\forall A$), ($\forall S$), ($\exists A$), ($\exists S$)
- und den Gleichheitsregeln (G), (S)

besteht.

Aus der Korrektheit der Regeln des Sequenzenkalküls (Lemmas 4.12, 4.13, 4.15, 4.16) folgt mit Lemma 4.11:

Satz 4.18

Der Sequenzenkalkül \mathfrak{R}_S ist *korrekt*,
d.h. jede in \mathfrak{R}_S ableitbare Sequenz ist korrekt.

Außerdem sieht man anhand der Definition der einzelnen Regeln leicht, dass es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe einer Zahl $\ell \geq 1$ und einer Folge $(a_1, \dots, a_\ell) \in M_S^\ell$ entscheidet, ob (a_1, \dots, a_ℓ) eine Ableitung in \mathfrak{R}_S ist.

Für *abzählbare* Signaturen σ kann man außerdem einen Algorithmus angeben, der nach und nach alle Folgen in $\{(a_1, \dots, a_\ell) \in M_S^\ell : \ell \geq 1\}$ ausgibt.

Beides zusammen liefert für abzählbare Signaturen σ , dass der Sequenzkalkül \mathfrak{R}_S **effektiv** ist.

Details: Übung.

Unser nächstes **Ziel** ist, zu zeigen, dass der Sequenzkalkül \mathfrak{R}_S auch **vollständig** ist, d.h. dass es für jede *korrekte* Sequenz eine Ableitung in \mathfrak{R}_S gibt.

Dazu betrachten wir zunächst einige Beispiele für Ableitungen im Sequenzkalkül \mathfrak{R}_S .

Darstellung von Ableitungen

Am Anfang des Kapitels haben wir bereits vereinbart, dass wir ähnlich wie bei Resolutionsableitungen auch allgemein für einen Kalkül \mathfrak{K} über einer Menge M Ableitungen (a_1, \dots, a_ℓ) der besseren Lesbarkeit halber oft zeilenweise schreiben, also

$$\begin{array}{l} (1) \ a_1 \\ (2) \ a_2 \\ \vdots \\ (\ell) \ a_\ell \end{array}$$

und am Ende jeder Zeile eine kurze Begründung angeben.

Im Folgenden betrachten wir einige Beispiele für Ableitungen im Sequenzkalkül \mathfrak{K}_S .

Beispiele 4.19

- (a) Für jedes $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$ und jedes $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ ist die Sequenz $\Gamma \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ ableitbar in \mathfrak{K}_S :

Beweisbarkeit: $\Phi \vdash_{\mathfrak{R}_S} \varphi$

Definition 4.20

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und sei $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$.

Die Formel φ heißt **beweisbar** aus Φ (kurz: $\Phi \vdash_{\mathfrak{R}_S} \varphi$), wenn es ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in \mathfrak{R}_S ableitbar ist.

Ein **Beweis** von φ aus Φ ist eine Ableitung einer Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in \mathfrak{R}_S , wobei $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist.

Notation

An Stelle von $\emptyset \vdash_{\mathfrak{R}_S} \varphi$ schreiben wir auch kurz: $\vdash_{\mathfrak{R}_S} \varphi$.

Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls \mathfrak{R}_S (Satz 4.18) folgt:

Korollar 4.21

Für jede FO[σ]-Formel φ und für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{R}_S} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \Phi \models \varphi.$$

Widerspruchsfreiheit

In der Mathematik nennen wir eine Menge von Aussagen **widerspruchsvoll**, falls sich daraus ein Widerspruch (d.h. eine bestimmte Aussage und deren Negat) herleiten lässt.

Wenn wir unter „herleiten“ einen Beweis im Sequenzenkalkül \mathfrak{R}_S verstehen, ergibt sich folgender Begriff:

Definition 4.22

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

- (a) Φ heißt **widerspruchsvoll**, falls es eine $\text{FO}[\sigma]$ -Formel φ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{R}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{R}_S} \neg\varphi$.
- (b) Φ heißt **widerspruchsfrei**, falls Φ **nicht widerspruchsvoll** ist.

Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls folgt, dass erfüllbare Formelmengen widerspruchsfrei sind:

Korollar 4.23

Für alle $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ gilt: Φ erfüllbar \implies Φ widerspruchsfrei.

Eigenschaften widerspruchsvoller Mengen

Lemma 4.24

Für jede Formelmeng $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Φ ist widerspruchsvoll.
- (b) Für jede $\text{FO}[\sigma]$ -Formel ψ gilt: $\Phi \vdash_{\mathcal{R}_S} \psi$.

Der Vollständigkeitsatz

Satz 4.25

Für alle Signaturen σ , alle Formelmengen $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und alle Formeln $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ gilt:

- (1) $\Phi \vdash_{\mathcal{R}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi.$
- (2) Φ ist widerspruchsfrei $\iff \Phi$ ist erfüllbar.

Die Richtung „ \implies “ von (1) und die Richtung „ \impliedby “ von (2) haben wir bereits in Korollar 4.21 und Korollar 4.23 bewiesen.

Die Richtung „ \implies “ von (2) wird von dem folgenden, schwer zu beweisenden **Erfüllbarkeitslemma** bereitgestellt:

Lemma 4.26 (Erfüllbarkeitslemma)

Jede **widerspruchsfreie** Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ ist **erfüllbar**.

Beweis des Vollständigkeitssatzes unter Verwendung des Erfüllbarkeitslemmas:

Unter Verwendung des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 4.26) erhalten wir zusammen mit Korollar 4.23, dass Teil (2) des Vollständigkeitssatzes korrekt ist. D.h. für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ gilt:

$$(2) \quad \Phi \text{ ist widerspruchsfrei} \iff \Phi \text{ ist erfüllbar.}$$

Die Richtung „ \implies “ von (1) haben wir bereits in Korollar 4.21 gezeigt.

Die Richtung „ \impliedby “ von Teil (1) des Vollständigkeitssatzes lässt sich wie folgt beweisen:

Zum Beweis des Erfüllbarkeitslemmas:

Zur Erinnerung: Das Erfüllbarkeitslemma besagt:

Jede widerspruchsfreie Formelmengemenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ ist erfüllbar.

Beweisidee:

Konstruiere eine σ -Interpretation $\mathcal{I}_\Phi = (\mathcal{A}, \beta)$, so dass gilt:

- Das **Universum** A von \mathcal{A} ist die Menge T_σ aller σ -Terme.
- Für jeden σ -Term t gilt: $\llbracket t \rrbracket^{\mathcal{I}} = t$.
- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$, und für alle σ -Terme t_1, \dots, t_k gilt:

$$(t_1, \dots, t_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff \Phi \vdash_{\mathcal{R}_S} R(t_1, \dots, t_k)$$

Diese Interpretation \mathcal{I}_Φ wird **Termininterpretation von Φ** genannt.

Gemäß Definition erfüllt \mathcal{I}_Φ alle atomaren Formeln der Form $R(t_1, \dots, t_k)$ in Φ .

Im Allgemeinen gilt jedoch noch nicht $\mathcal{I}_\Phi \models \Phi$ (betrachte dazu beispielsweise die Formelmengemenge $\Phi := \{v_0 = v_1\}$, die offensichtlich erfüllbar ist, für die aber gilt: $\mathcal{I}_\Phi \not\models \Phi$).

Aber nach einigen anspruchsvollen Modifikationen von \mathcal{I}_Φ erhält man eine Interpretation \mathcal{I}'_Φ mit $\mathcal{I}'_\Phi \models \Phi$.

Abschnitt 4.3:
Der Endlichkeitssatz

Zur Erinnerung:

Wir haben bereits den **Endlichkeitssatz der Aussagenlogik** kennen gelernt, der besagt, dass Folgendes für jede Menge $\Phi \subseteq AL$ und jede Formel $\psi \in AL$ gilt:

- (1) Φ ist erfüllbar \iff Jede endliche Teilmenge von Φ ist erfüllbar.
- (2) $\Phi \models \psi$ \iff Es gibt eine endliche Teilmenge Γ von Φ , so dass $\Gamma \models \psi$.

Der Endlichkeitssatz gilt auch für die Logik erster Stufe, d.h. die Aussagen (1) und (2) gelten auch für alle Mengen $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und alle $\psi \in FO[\sigma]$.

Zum Beweis der Endlichkeitssatzes der Logik erster Stufe nutzen wir den Vollständigkeitssatz sowie das folgende Lemma.

Das syntaktische Endlichkeitslemma

Lemma 4.27

Für jede Signatur σ und jede Formelmeng $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ gilt:

Φ ist widerspruchsfrei \iff Jede endliche Teilmenge von Φ ist widerspruchsfrei.

Der Endlichkeitssatz (auch bekannt als Kompaktheitssatz)

Satz 4.28

Für jede Signatur σ , jede Formelmengende $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und jede Formel $\psi \in \text{FO}[\sigma]$ gilt:

- (1) Φ ist erfüllbar \iff Jede endliche Teilmenge von Φ ist erfüllbar.
- (2) $\Phi \models \psi \iff$ Es gibt eine endliche Teilmenge Γ von Φ , so dass $\Gamma \models \psi$.

Beachte: Die Aussage des Endlichkeitssatzes ist nur für **unendliche** Formelmengen Φ interessant (für endliche Mengen Φ ist sie trivial).

Erststufige Axiomatisierbarkeit

Definition 4.29

Eine Klasse \mathcal{C} von σ -Strukturen heißt **erststufig axiomatisierbar**, falls es eine Menge Φ von FO[σ]-Sätzen gibt, so dass gilt: $\mathcal{C} = \text{MOD}_\sigma(\Phi)$.

Zur Erinnerung:

$\text{MOD}_\sigma(\Phi)$ ist die Klasse aller σ -Strukturen \mathcal{A} , für die gilt: $\mathcal{A} \models \Phi$.

Definition 4.30

Die **Mächtigkeit** einer σ -Struktur ist die Mächtigkeit ihres Universums.

Eine σ -Struktur heißt endlich, unendlich, abzählbar, bzw. überabzählbar, wenn ihr Universum die entsprechende Mächtigkeit besitzt.

Beispiel 4.31

Die Klasse aller unendlichen σ -Strukturen ist erststufig axiomatisierbar.

Wir können den Endlichkeitssatz anwenden, um zu zeigen, dass bestimmte Klassen von Strukturen **nicht** erststufig axiomatisierbar sind.

Im Folgenden betrachten wir dazu zwei Beispiele: die Nicht-Axiomatierbarkeit der „Endlichkeit“ von Strukturen und die Nicht-Axiomatisierbarkeit von „Graph-Zusammenhang“.

Nicht-Axiomatisierbarkeit der „Endlichkeit“ von Strukturen

Lemma 4.32

Sei Φ eine Menge von $\text{FO}[\sigma]$ -Sätzen. Falls Φ beliebig große endliche Modelle besitzt (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine endliche σ -Struktur \mathcal{A} mit $|\mathcal{A}| \geq n$ und $\mathcal{A} \models \Phi$), so besitzt Φ ein unendliches Modell.

Satz 4.33

Die Klasse aller endlichen σ -Strukturen ist nicht erststufig axiomatisierbar.

Korollar 4.34

Es gibt keine endliche Menge von $\text{FO}[\sigma]$ -Sätzen, die die Klasse aller unendlichen σ -Strukturen erststufig axiomatisiert.

Nicht-Axiomatisierbarkeit von „Graph-Zusammenhang“

Satz 4.35

Die Klasse aller zusammenhängenden Graphen ist nicht erststufig axiomatisierbar.

Der Satz von Löwenheim und Skolem

Unter Verwendung von Teilergebnissen, die beim (in dieser Vorlesung nicht im Detail behandelten) Beweis des Erfüllbarkeitslemmas anfallen, erhält man das folgende Resultat.

Satz 4.36 (Der Satz von Löwenheim und Skolem)

Sei σ eine abzählbare Signatur. Dann hat jede erfüllbare Formelmengemenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ ein höchstens abzählbares Modell.

(Hier ohne Beweis)

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Löwenheim und Skolem erhalten wir:

Korollar 4.37

Sei σ eine abzählbare Signatur. Dann ist die Klasse aller überabzählbaren σ -Strukturen nicht erststufig axiomatisierbar.

Abschnitt 4.4:

Die Grenzen der Berechenbarkeit

Zur Erinnerung:

Einige Begriffe zum Thema (Un)Entscheidbarkeit

Entscheidungsprobleme sind Probleme, die mit „ja“ oder „nein“ beantwortet werden können. Genauer:

- Sei M eine abzählbar unendliche Menge, zum Beispiel
 - die Menge Σ^* aller Worte über einem endlichen Alphabet Σ , oder
 - die Menge aller Graphen, deren Knotenmenge eine endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen ist.
- Das **Entscheidungsproblem für eine Menge $L \subseteq M$** ist das folgende Berechnungsproblem:

Das Entscheidungsproblem für $L \subseteq M$

Eingabe: Ein Element $m \in M$.

Frage: Ist $m \in L$?

Beispiele für Entscheidungsprobleme

- Graphzusammenhang ist das Entscheidungsproblem für $L \subseteq M$, wobei
 - M die Menge aller ungerichteten Graphen ist, deren Knotenmenge eine endliche Teilmenge von \mathbb{N} ist und
 - L die Menge aller zusammenhängenden Graphen aus M ist.

- Das Halteproblem ist das Entscheidungsproblem für $L \subseteq M$, wobei
 - M die Menge aller Worte $w\#x$ mit $w, x \in \{0, 1\}^*$ ist und
 - L die Menge aller Worte $w\#x$ ist, so dass w eine deterministische Turingmaschine beschreibt, die bei Eingabe x nach endlich vielen Schritten anhält.

Entscheidungsprobleme für die Logik erster Stufe

Allgemeingültigkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$

Eingabe: Eine $\text{FO}[\sigma]$ -Formel φ

Frage: Ist φ allgemeingültig?

Formal:

M ist die Menge aller Worte über dem Alphabet $A_{\text{FO}[\sigma]}$ und

L ist die Menge $\{\varphi \in \text{FO}[\sigma] : \varphi \text{ ist allgemeingültig}\}$

Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$

Eingabe: $\text{FO}[\sigma]$ -Formel φ

Frage: Ist φ erfüllbar?

Unerfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$

Eingabe: $\text{FO}[\sigma]$ -Formel φ

Frage: Ist φ unerfüllbar?

Folgerungsproblem für $\text{FO}[\sigma]$

Eingabe: Zwei $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln φ, ψ

Frage: Gilt $\varphi \models \psi$?

Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit

Definition 4.38

Sei M eine abzählbar unendliche Menge.

- (a) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt **entscheidbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und
- „ja“ ausgibt, falls $m \in L$
 - „nein“ ausgibt, falls $m \notin L$.
- (b) $L \subseteq M$ heißt **semi-entscheidbar**, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$
- nach endlich vielen Schritten anhält und „ja“ ausgibt, falls $m \in L$
 - nie anhält, falls $m \notin L$.

Beispiele:

- **Graphzusammenhang** ist **entscheidbar** (z.B. durch Tiefen- oder Breitensuche).
- Das **Halteproblem** ist **semi-entscheidbar** (bei Eingabe von $w \# x$ konstruiere die von w repräsentierte deterministische Turingmaschine und lasse diese mit Eingabe x laufen).
Ist es auch **entscheidbar**? **Nein!** — Das Halteproblem ist das Paradebeispiel eines nicht entscheidbaren Problems.

Einfache Beobachtungen

- Jede entscheidbare Menge $L \subseteq M$ ist auch semi-entscheidbar (anstatt „nein“ auszugeben und anzuhalten, gehen wir einfach in eine Endlosschleife)
- Für jede entscheidbare Menge $L \subseteq M$ ist auch die Menge $\bar{L} := (M \setminus L) \subseteq M$ entscheidbar (vertausche einfach die Antworten „ja“ und „nein“)
- Wenn sowohl $L \subseteq M$ als auch $\bar{L} := (M \setminus L) \subseteq M$ semi-entscheidbar sind, dann ist $L \subseteq M$ sogar entscheidbar.

Semi-Entscheidbarkeit einiger Logik-Probleme

Satz 4.39

Sei σ eine höchstens abzählbare Signatur.

Jedes der folgenden Probleme ist semi-entscheidbar:

- (a) *das Allgemeingültigkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$,*
- (b) *das Unerfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$,*
- (c) *das Folgerungsproblem für $\text{FO}[\sigma]$.*

Unentscheidbarkeit einiger Logik-Probleme

Unser nächstes Ziel ist, zu zeigen, dass für bestimmte Signaturen σ gilt:

- Das Allgemeingültigkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$,
- das Unerfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$,
- das Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$ und
- das Folgerungsproblem für $\text{FO}[\sigma]$

ist **nicht entscheidbar**.

Wir werden dazu wie folgt vorgehen:

1. Wir nutzen das bekannte Resultat, das besagt, dass das **Postsche Korrespondenzproblem** unentscheidbar ist.
2. Wir zeigen, wie das Postsche Korrespondenzproblem unter Zuhilfenahme eines Entscheidungs-Algorithmus für das Allgemeingültigkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$ (für eine geeignete Signatur σ) gelöst werden könnte.
Dadurch erhalten wir, dass das Allgemeingültigkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$ unentscheidbar ist.
3. Die Unentscheidbarkeit des Unerfüllbarkeitsproblems, des Erfüllbarkeitsproblems und des Folgerungsproblems für $\text{FO}[\sigma]$ folgen dann leicht aus der Unentscheidbarkeit des Allgemeingültigkeitsproblems für $\text{FO}[\sigma]$.

Das Postsche Korrespondenzproblem

Das Postsche Korrespondenzproblem (PKP)

Eingabe: Eine Zahl $k \geq 1$ und k Paare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ mit $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k \in \{0, 1\}^*$.

Frage: Gibt es ein $n \geq 1$ und Indizes $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$, so dass gilt: $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$?

Beispiel:

Das PKP mit Eingabe $k = 3$ und

$$(x_1, y_1) = (1, 111), \quad (x_2, y_2) = (10111, 10), \quad (x_3, y_3) = (10, 0).$$

hat eine Lösung mit $n = 4$ und $i_1 = 2, i_2 = 1, i_3 = 1, i_4 = 3$, denn:

$$\begin{aligned} x_2 x_1 x_1 x_3 &= 10111 1 1 10 \\ y_2 y_1 y_1 y_3 &= 10 111 111 0. \end{aligned}$$

Bekannt:

- Das PKP ist semi-entscheidbar. (Dies sieht man leicht.)
- Das PKP ist nicht entscheidbar.

(Dies wurde in der „Einführung in die Theoretische Informatik“ bewiesen.)

Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe

Satz 4.40

Sei $\sigma := \{R, f_0, f_1, c\}$, wobei c ein Konstantensymbol, R ein 2-stelliges Relationssymbol und f_0, f_1 zwei 1-stellige Funktionssymbole sind.

Das Allgemeingültigkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$ ist nicht entscheidbar.

Beweis: Auf Grund der Unentscheidbarkeit des PKP reicht es, eine Reduktion vom PKP zum Allgemeingültigkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$ anzugeben. D.h. wir zeigen, dass bei Eingabe eines Tupels $I = (k, (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$, das eine Eingabe für's PKP repräsentiert, eine $\text{FO}[\sigma]$ -Formel φ_I konstruiert werden kann, die genau dann allgemeingültig ist, wenn I eine „ja“-Instanz für's PKP ist (d.h. es gibt $n \geq 1$ und $i_1, \dots, i_n \in [k]$, so dass $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n}$).

Wenn das Allgemeingültigkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$ entscheidbar wäre, wäre daher auch das PKP entscheidbar.

Zur Konstruktion der Formel φ_I gehen wir in mehreren Schritten vor.

Schritt 1: Für jede Eingabe $I = (k, (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$ für das PKP definiere eine σ -Struktur \mathcal{A}_I , so dass gilt:

$$\mathcal{A}_I \models \exists z R(z, z) \iff I \text{ ist eine „ja“-Instanz für's PKP, d.h. es gibt } n \geq 1 \text{ und } i_1, \dots, i_n \in [k], \text{ so dass } x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n}.$$

Dazu wählen wir \mathcal{A}_I wie folgt:

Schritt 2: Konstruiere FO[σ]-Formeln ψ_I^{Start} und ψ_I^{Schritt} , die \mathcal{A}_I hinreichend genau beschreiben.

Die Formel ψ_I^{Start} soll besagen, dass die Relation $R^{\mathcal{A}_I}$ die Tupel (x_j, y_j) für alle $j \in [k]$ enthält.

Die Formel ψ_I^{Schritt} soll besagen, dass die Relation $R^{\mathcal{A}_I}$ abgeschlossen ist unter Konkatenation mit (x_j, y_j) ; d.h.: Ist $(u, v) \in R^{\mathcal{A}_I}$ und $j \in [k]$, so ist auch $(ux_j, vy_j) \in R^{\mathcal{A}_I}$.

Um dies durch FO[σ]-Formeln zu formulieren, nutzen wir folgende Schreibweisen:

Schritt 3: Setze $\varphi_I := \left((\psi_I^{\text{Start}} \wedge \psi_I^{\text{Schritt}}) \rightarrow \exists z R(z, z) \right)$

Klar: Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe von I die Formel φ_I konstruiert.

Behauptung 1:

φ_I ist allgemeingültig $\iff I$ ist eine „ja“-Instanz für's PKP.

Behauptung 2: Für alle $(u, v) \in R^{A_I}$ gilt: $(h(u), h(v)) \in R^B$.

Aus Satz 4.39, Satz 4.40 und den bekannten Zusammenhängen zwischen semi-entscheidbaren und entscheidbaren Problemen, sowie den Korrespondenzen zwischen Allgemeingültigkeit, (Un)Erfüllbarkeit und logischer Folgerung, erhält man leicht:

Korollar 4.41

Sei σ die Signatur aus Satz 4.40. Dann gilt:

- (a) Das *Allgemeingültigkeitsproblem* für $\text{FO}[\sigma]$ ist *semi-entscheidbar* aber *nicht entscheidbar*.
- (b) Das *Folgerungsproblem* für $\text{FO}[\sigma]$ ist *semi-entscheidbar* aber *nicht entscheidbar*.
- (c) Das *Unerfüllbarkeitsproblem* für $\text{FO}[\sigma]$ ist *semi-entscheidbar* aber *nicht entscheidbar*.
- (d) Das *Erfüllbarkeitsproblem* für $\text{FO}[\sigma]$ ist *nicht semi-entscheidbar*.

Beweis: Übung.

Bemerkung 4.42

Man kann zeigen, dass

- (1) Korollar 4.41 für jede Signatur σ gilt, die mindestens ein Relationssymbol der Stelligkeit ≥ 2 enthält
- (2) für Signaturen σ , die ausschließlich aus Konstantensymbolen und Relationssymbolen der Stelligkeit 1 bestehen, jedes der in Korollar 4.41 betrachteten Probleme entscheidbar ist.

(Hier ohne Beweis)

Abschnitt 4.5:

Der Satz von Herbrand

- Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass es keinen Algorithmus gibt, der das Erfüllbarkeitsproblem und das Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe löst und stets terminiert.
- Trotzdem möchte man für verschiedene Anwendungsbereiche Verfahren haben, die das Erfüllbarkeits- oder das Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe „so gut wie möglich“ lösen.
- Einen Ansatz für die Entwicklung solcher, in der Praxis nutzbarer, Verfahren liefert die **Herbrand-Theorie**, die nach dem französischen Logiker Jacques Herbrand (1908–1931) benannt ist.
- Ziel dieses Abschnitts ist, den **Satz von Herbrand** vorzustellen, der das Allgemeingültigkeits- bzw. das Erfüllbarkeitsproblem der Logik erster Stufe auf das entsprechende Problem der Aussagenlogik zurückführt.

Notationen

- In diesem Abschnitt bezeichnet σ stets eine endliche oder abzählbare Signatur, die **mindestens ein Konstantensymbol** enthält.
- Die Menge aller **quantorenfreien** FO[σ]-Formeln bezeichnen wir mit QF_σ .
- Ein **Grundterm** über σ ist ein **variablenfreier σ -Term**, d.h., ein σ -Term, der keine Variable enthält.
Die **Menge aller Grundterme über σ** bezeichnen wir mit GT_σ .

Beispiele:

(a) Sei $\sigma := \{c, f/1, g/2, R/2\}$.

Grundterme über σ sind dann z.B.

$$c, f(c), g(c, c), f(f(c)), f(g(c, c)), g(c, f(c)), g(f(c), c), \dots$$

(b) Sei $\sigma := \{c, R/2\}$.

Dann ist c der einzige Grundterm über σ . D.h.

$$GT_\sigma = \{c\}.$$

Herbrandstrukturen

Definition 4.43

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält.

Eine σ -Herbrandstruktur ist eine σ -Struktur \mathcal{A} mit folgenden Eigenschaften:

- Das Universum A von \mathcal{A} ist genau die Menge GT_σ aller Grundterme über σ (d.h. aller variablenfreien σ -Terme).
- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c^{\mathcal{A}} = c$.
- Für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$, und für alle variablenfreien σ -Terme $t_1, \dots, t_k \in A$ ist

$$f^{\mathcal{A}}(t_1, \dots, t_k) = f(t_1, \dots, t_k).$$

Beachte: Alle σ -Herbrandstrukturen haben dasselbe Universum und dieselbe Interpretation der Konstanten- und Funktionssymbole.

Lediglich die Interpretation der Relationssymbole kann in σ -Herbrandstrukturen frei gewählt werden.

Zur Angabe einer konkreten σ -Herbrandstruktur \mathcal{A} genügt es also, die Interpretation der Relationssymbole anzugeben, d.h. für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ die Relation $R^{\mathcal{A}}$ anzugeben.

Beispiel

Sei $\sigma := \{c, R/2\}$.

Frage: Wie sehen σ -Herbrandstrukturen aus?

Antwort: Für jede σ -Herbrandstruktur \mathcal{A} gilt:

- Universum: $A = \{c\}$
- $c^{\mathcal{A}} = c$
- $R^{\mathcal{A}} \subseteq \{c\}^2$, d.h.

$$R^{\mathcal{A}} = \emptyset \quad \text{oder} \quad R^{\mathcal{A}} = \{(c, c)\}.$$

Somit gibt es genau 2 verschiedene σ -Herbrandstrukturen.

Bemerkung 4.44

Sei \mathcal{A} eine σ -Herbrandstruktur.

Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

- Für jeden variablenfreien σ -Term t (d.h. für jedes $t \in \text{GT}_\sigma = A$) gilt:

$$\llbracket t \rrbracket^{\mathcal{A}} = t.$$

- Für jede quantorenfreie FO[σ]-Formel ψ gilt:

Ist $\text{var}(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ und sind $t_1, \dots, t_n \in \text{GT}_\sigma$, so gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[t_1, \dots, t_n] \iff \mathcal{A} \models \psi \frac{t_1, \dots, t_n}{x_1, \dots, x_n}$$

Dabei ist $\psi \frac{t_1, \dots, t_n}{x_1, \dots, x_n}$ die Formel, die aus ψ entsteht, indem für jedes $i \in [n]$ jedes Vorkommen von x_i ersetzt wird durch den Grundterm t_i .

Herbrand-Modelle und gleichheitsfreie Formeln in Skolemform

Definition 4.45

- (a) Ein **Herbrand-Modell** eines FO[σ]-Satzes φ ist eine σ -Herbrandstruktur, die φ erfüllt.
- (b) Eine FO[σ]-Formel φ heißt **gleichheitsfrei**, falls das Symbol „=“ nicht in φ vorkommt.
- (c) Eine FO[σ]-Formel ist in **Skolemform** (auch: **Skolem-Normalform**), falls sie von der Form

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \psi$$

ist, wobei gilt: $n \geq 0$, x_1, \dots, x_n sind paarweise verschiedene Variablen, und ψ ist eine quantorenfreie FO[σ]-Formel.

Satz 4.46

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol besitzt.

Für jeden **gleichheitsfreien** FO[σ]-Satz φ in **Skolemform** gilt:

$$\varphi \text{ ist erfüllbar} \iff \varphi \text{ besitzt ein Herbrand-Modell.}$$

Die Herbrand-Expansion eines Satzes in Skolemform

Definition 4.47

Sei φ ein gleichheitsfreier FO[σ]-Satz in Skolemform, d.h. φ ist von der Form $\forall x_1 \cdots \forall x_n \psi$, wobei ψ quantorenfrei und gleichheitsfrei ist.

Die **Herbrand-Expansion** von φ ist die Formelmenge

$$\text{HE}(\varphi) := \left\{ \psi \frac{t_1, \dots, t_n}{x_1, \dots, x_n} : t_1, \dots, t_n \in \text{GT}_\sigma \right\}$$

D.h.: Jede Formel in $\text{HE}(\varphi)$ entsteht, indem in der quantorenfreien Formel ψ jede Variable x_i ersetzt wird durch einen Grundterm t_i .

Beispiel 4.48

Sei $\sigma = \{c, f/1, g/2, R/3\}$ und sei $\varphi := \forall x \forall y \forall z R(x, f(y), g(z, x))$.

Dann gehören z.B. die folgenden Formeln zur Herbrand-Expansion $\text{HE}(\varphi)$:

- $R(c, f(c), g(c, c))$ (dies erhält man, indem jede der Variablen x, y, z durch den Grundterm c ersetzt wird)
- $R(f(c), f(c), g(c, f(c)))$ (dies erhält man, indem x durch den Grundterm $f(c)$ und jede der Variablen y, z durch den Grundterm c ersetzt wird)
- $R(g(c, c), f(f(c)), g(c, g(c, c)))$ (dies erhält man, indem Variable x durch den Grundterm $g(c, c)$, Variable y durch den Grundterm $f(c)$ und Variable z durch den Grundterm c ersetzt wird)

Die aussagenlogische Version der Herbrand-Expansion

Für jeden gleichheitsfreien FO[σ]-Satz φ in Skolemform gilt:

Jede Formel $\xi \in \text{HE}(\varphi)$ ist quantorenfrei, gleichheitsfrei und variablenfrei, und jede atomare Subformel von ξ ist von der Form $R(t_1, \dots, t_k)$, wobei $R \in \sigma$, $k = \text{ar}(R)$ und $t_1, \dots, t_k \in \text{GT}_\sigma$.

Für jede solche atomare Formel stellen wir ein **Aussagensymbol**

$X_{R(t_1, \dots, t_k)} \in \text{AS}$ bereit.

Für jedes $\xi \in \text{HE}(\varphi)$ sei **al(ξ)** die **aussagenlogische** Formel, die aus ξ entsteht, indem jede atomare Subformel der Form $R(t_1, \dots, t_k)$ ersetzt wird durch das Aussagensymbol $X_{R(t_1, \dots, t_k)}$.

Die **aussagenlogische Version der Herbrand-Expansion von φ** ist die Menge

$$\text{AHE}(\varphi) := \{ \text{al}(\xi) : \xi \in \text{HE}(\varphi) \}.$$

Der Satz von Herbrand

Satz 4.49 (Satz von Gödel-Herbrand-Skolem)

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält.

Für jeden **gleichheitsfreien FO[σ]-Satz φ in Skolemform** gilt:

φ ist erfüllbar \iff die aussagenlogische Formelmeng $AHE(\varphi)$ ist erfüllbar.

In Verbindung mit dem Endlichkeitssatz der Aussagenlogik erhalten wir:

Satz 4.50 (Satz von Herbrand)

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält. Sei ψ eine **gleichheitsfreie und quantorenfreie FO[σ]-Formel** und sei $\{x_1, \dots, x_n\} = \text{frei}(\psi)$.

Dann gilt für die FO[σ]-Sätze $\varphi := \forall x_1 \cdots \forall x_n \psi$ und $\varphi' := \exists x_1 \cdots \exists x_n \psi$:

- (a) φ ist erfüllbar \iff jede endliche Teilmenge von $AHE(\varphi)$ ist erfüllbar.
- (b) φ ist unerfüllbar \iff es gibt eine endliche Teilmenge von $AHE(\varphi)$, die unerfüllbar ist.
- (c) φ' ist allgemeingültig \iff es gibt eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ und Grundterme $t_{i,1}, \dots, t_{i,n}$ für alle $i \in [m]$, so dass die folgende Formel allgemeingültig ist:

$$\bigvee_{i=1}^m \psi \frac{t_{i,1}, \dots, t_{i,n}}{x_1, \dots, x_n}$$

Anwendung des Satzes von Herbrand

Um nachzuweisen, dass ein gleichheitsfreier $\text{FO}[\sigma]$ -Satz φ in Skolemform unerfüllbar ist, kann man auf Grund des Satzes von Herbrand wie folgt vorgehen:

Für $i = 1, 2, 3, \dots$ tue Folgendes:

- (1) Sei ξ_i die i -te Formel in $\text{AHE}(\varphi)$
- (2) Teste, ob die aussagenlogische Formel $(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_i)$ unerfüllbar ist.
- (3) Falls ja, halte an mit Ausgabe „ φ ist unerfüllbar“

Man sieht leicht, dass dies ein Semi-Entscheidungsverfahren ist, das eine gegebene Formel φ auf Unerfüllbarkeit testet.

Durch die Einschränkung auf **gleichheitsfreie $\text{FO}[\sigma]$ -Sätze in Skolemform** scheint dieses Verfahren auf den ersten Blick nur sehr eingeschränkt anwendbar zu sein.

Im Folgenden zeigen wir jedoch, dass **jede** $\text{FO}[\sigma]$ -Formel in eine zu ihr erfüllbarkeitsäquivalente Formel der richtigen Form transformiert werden kann.

Definition 4.51

Seien σ_1, σ_2 Signaturen und φ_i eine $\text{FO}[\sigma_i]$ -Formel, für jedes $i \in \{1, 2\}$. Die Formel φ_2 heißt **erfüllbarkeitsäquivalent** zu φ_1 , falls gilt:

$$\varphi_2 \text{ ist erfüllbar} \iff \varphi_1 \text{ ist erfüllbar.}$$

Satz 4.52 (Skolemisierung)

Zu jeder Signatur σ gibt es eine Signatur $\hat{\sigma}$, so dass jede $\text{FO}[\sigma]$ -Formel φ in einen zu φ **erfüllbarkeitsäquivalenten gleichheitsfreien $\text{FO}[\hat{\sigma}]$ -Satz $\hat{\varphi}$ in Skolemform** transformiert werden kann.

Beispiel 4.53

Die Formel $\forall x \exists y \forall z \exists u R(x, y, z, u)$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zum folgenden gleichheitsfreien Satz in Skolemform:

$$\forall x \forall z R(x, f(x), z, g(x, z))$$

Abschnitt 4.6:

Automatische Theorembeweiser

Einfaches Verfahren (ohne Unifikation)

Seien φ und ψ zwei FO[σ]-Formeln.

Ziel: Automatischer Beweis, dass $\varphi \models \psi$ gilt.

Dazu reicht es, zu zeigen, dass die Formel $(\varphi \wedge \neg\psi)$ unerfüllbar ist.

Verfahren:

1. Erzeuge einen zu $(\varphi \wedge \neg\psi)$ erfüllbarkeitsäquivalenten gleichheitsfreien FO[$\hat{\sigma}$]-Satz χ in Skolemform (über der erweiterten Signatur $\hat{\sigma}$).
Nutze dazu das im Beweis von Satz 4.52 vorgestellte Verfahren.
2. Verwende das auf Folie 358 beschriebene Semi-Entscheidungsverfahren, um zu herauszufinden, ob χ unerfüllbar ist.

Beispiel 4.54

Sei $\sigma := \{R/1, c, f/1\}$,

$$\varphi := R(c) \wedge \forall x \exists y ((R(x) \rightarrow R(f(f(y)))) \vee R(f(x)))$$

$$\psi := \exists x R(f(f(x))).$$

Dann ist $(\varphi \wedge \neg\psi) =$

$$R(c) \wedge \forall x \exists y ((R(x) \rightarrow R(f(f(y)))) \vee R(f(x))) \wedge \neg \exists x R(f(f(x)))$$

ein gleichheitsfreier Satz. Eine Umformung in Pränex-Normalform liefert den dazu äquivalenten Satz

$$\forall x \exists y \left(R(c) \wedge (\neg R(x) \vee R(f(f(y))) \vee R(f(x))) \wedge \neg R(f(f(x))) \right).$$

Wir erweitern die Signatur um ein 1-stelliges Funktionssymbol g und erhalten den dazu erfüllbarkeitsäquivalenten gleichheitsfreien Satz in Skolemform $\chi =$

$$\forall x \left(R(c) \wedge (\neg R(x) \vee R(f(f(g(x)))) \vee R(f(x))) \wedge \neg R(f(f(x))) \right)$$

über der Signatur $\hat{\sigma} = \{R, c, f, g\}$.

$$\chi = \forall x \left(R(c) \wedge \left(\neg R(x) \vee R(f(f(g(x)))) \vee R(f(x)) \right) \wedge \neg R(f(f(x))) \right).$$

Für jeden Grundterm $t \in \text{GT}_{\hat{\sigma}}$ enthält die aussagenlogische Variante $\text{AHE}(\chi)$ der Herbrand-Expansion von χ die aussagenlogische Formel

$$\xi_t := X_{R(c)} \wedge \left(\neg X_{R(t)} \vee X_{R(f(f(g(t))))} \vee X_{R(f(t))} \right) \wedge \neg X_{R(f(f(t)))}.$$

Wir zählen die Grundterme in $\text{GT}_{\hat{\sigma}}$ in der folgenden Reihenfolge auf

$$t_1 = c, \quad t_2 = f(c), \quad t_3 = g(c), \quad t_4 = f(f(c)), \quad t_5 = g(f(c)), \quad \dots$$

und zählen die Formeln in $\text{AHE}(\chi)$ in derselben Reihenfolge auf, also

$$\xi_1 = \xi_{t_1}, \quad \xi_2 = \xi_{t_2}, \quad \xi_3 = \xi_{t_3}, \quad \dots$$

Bei dem auf Folie 358 beschriebenen Verfahren wird dann beispielsweise im Schleifendurchlauf für $i = 5$ getestet, ob die aussagenlogische Formel

$$\left(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5 \right)$$

unerfüllbar ist. Dazu können wir beispielsweise das Resolutionsverfahren oder den DPLL-Algorithmus anwenden.

In unserem Beispiel entspricht die Formel $(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_5)$ der Klauselmenge

$$\Gamma := \left\{ \begin{array}{l} \{ X_{R(c)} \} , \\ \{ \neg X_{R(c)}, X_{R(f(f(g(c))))}, X_{R(f(c))} \} , \{ \neg X_{R(f(f(c)))} \} , \\ \{ \neg X_{R(f(c))}, X_{R(f(f(g(f(c))))}), X_{R(f(f(c)))} \} , \{ \neg X_{R(f(f(f(c))))} \} , \\ \{ \neg X_{R(g(c))}, X_{R(f(f(g(g(c))))}), X_{R(f(g(c)))} \} , \{ \neg X_{R(f(f(g(c))))} \} \\ \{ \neg X_{R(f(f(c))}, X_{R(f(f(g(f(f(c))))}), X_{R(f(f(f(c))))} \} , \{ \neg X_{R(f(f(f(f(c))))} \} \\ \{ \neg X_{R(g(f(c))}, X_{R(f(f(g(g(f(c))))}), X_{R(f(g(f(c)))} \} , \{ \neg X_{R(f(f(g(f(c))))} \} \end{array} \right\}$$


Wir konstruieren eine Resolutionswiderlegung für Γ :


- | | | |
|------|--|---------------------|
| (1) | $\{ X_{R(c)} \}$ | in Γ |
| (2) | $\{ \neg X_{R(c)}, X_{R(f(f(g(c))))}, X_{R(f(c))} \}$ | in Γ |
| (3) | $\{ X_{R(f(f(g(c))))}, X_{R(f(c))} \}$ | Resolvente aus 1,2 |
| (4) | $\{ \neg X_{R(f(f(g(c))))} \}$ | in Γ |
| (5) | $\{ X_{R(f(c))} \}$ | Resolvente aus 3,4 |
| (6) | $\{ \neg X_{R(f(c))}, X_{R(f(f(g(f(c))))}), X_{R(f(f(c)))} \}$ | in Γ |
| (7) | $\{ X_{R(f(f(g(f(c))))}), X_{R(f(f(c)))} \}$ | Resolvente aus 5,6 |
| (8) | $\{ \neg X_{R(f(f(c)))} \}$ | in Γ |
| (9) | $\{ X_{R(f(f(g(f(c))))} \}$ | Resolvente aus 7,8 |
| (10) | $\{ \neg X_{R(f(f(g(f(c))))} \}$ | in Γ |
| (11) | \emptyset | Resolvente aus 9,10 |


Somit ist Γ unerfüllbar (gemäß Satz 2.58). Das auf Folie 358 angegebene Verfahren hält daher (spätestens) im Schleifendurchlauf für $i = 5$ mit der Ausgabe „ χ ist unerfüllbar“ an. Da χ erfüllbarkeitsäquivalent zur Formel $(\varphi \wedge \neg\psi)$ ist, wissen wir also, dass $\varphi \models \psi$ gilt. Dies beendet Beispiel 4.54.


Kapitel 5:
Literatur

 Patrick Blackburn, Johan Bos, and Kristina Striegnitz.
Learn PROLOG Now!
Kings College Publications, 2006.
Online Version: <http://www.learnprolognow.org/>.

 S. Burris.
Logic for Mathematics and Computer Science.
Prentice Hall, 1998.

 P. J. Cameron.
Sets, Logic and Categories.
Springer, 1998.

 Heinz-Dieter Ebbinghaus.
Einführung in die Mengenlehre.
Spektrum Akademischer Verlag, 2003.
4. Auflage.

 Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, and Wolfgang Thomas.
Einführung in die Mathematische Logik.
Spektrum Akademischer Verlag, 2007.
5. Auflage.



Jörg Flum and Martin Grohe.
Parameterized Complexity Theory.
Springer, 1998.



M. Huth and M. Ryan.
Logic in Computer Science — Modelling and Reasoning About Systems.
Cambridge University Press, 2004.



M. Kreuzer and S. Kühling.
Logik für Informatiker.
Pearson, 2006.



Leonid Libkin.
Elements of Finite Model Theory.
Springer, 2004.



Uwe Schöning.
Logik für Informatiker.
Spektrum Akademischer Verlag, 2000.
5. Auflage.



Nicole Schweikardt.

„Logik in der Informatik“, Skript zur gleichnamigen Vorlesung am Institut für Informatik der Humboldt-Universität zu Berlin, 2018.

Verfügbar unter [https:](https://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS19-20//Logik/)

[//www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS19-20//Logik/](https://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS19-20//Logik/).



Ehud Shapiro and Leon Sterling.

The Art of PROLOG: Advanced Programming Techniques.

MIT Press, 1994.

2. Auflage.



D. van Dalen.

Logic and Structure.

Springer, 2004.