Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

27. Juni 2022

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2022

Übungsblatt 10

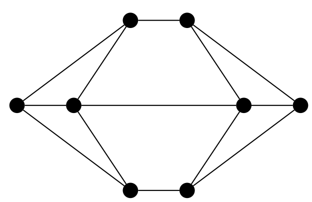
Abgabe: *bis 4. Juli 2022, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: **(40 Punkte)**

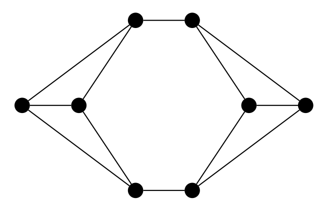
Sei $\sigma := \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. In der folgenden Darstellung von Graphen repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten u und v die beiden gerichteten Kanten (u, v) und (v, u).

Betrachten Sie die folgenden Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



Sei $\varphi := \exists x\, \exists y\, \forall z\, (E(x, z) \vee E(y, z))$. Dann gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

(a) Beschreiben Sie diejenige Gewinnstrategie für Spoiler im EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, welche nach Satz 3.51 aus dem $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ folgt. Geben Sie an, wie viele Runden Spoiler benötigt, wenn er dieser Strategie folgt.

(b) Existiert eine bessere Gewinnstrategie für Spoiler, d.h. eine Strategie, mit der er in weniger Runden das Spiel gewinnt? Wenn ja, dann beschreiben Sie eine solche Strategie. Wenn nein, dann begründen Sie dies.

(c) Welche der beiden folgenden Aussagen ist für jede Signatur σ und jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ korrekt, welche nicht? Beweisen Sie, dass ihre Antworten korrekt sind.

(i) $\exists x\, \forall y\, \varphi \ \models\ \forall y\, \exists x\, \varphi$ **(ii)** $\forall y\, \exists x\, \varphi \ \models\ \exists x\, \forall y\, \varphi$

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Nutzen Sie zur Lösung dieser Aufgabe die Methode der logischen Reduktion (ähnlich wie im Beweis von Satz 3.58).

Sei 2-*COL* die Klasse aller gerichteten zweifärbbaren Graphen, d.h. aller $\{E/2\}$-Strukturen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ für die gilt:

> Es gibt eine Funktion $f : A \to \{rot, blau\}$, so dass für jede Kante (a, b) in $E^{\mathcal{A}}$ gilt: $f(a) \neq f(b)$.

Zeigen Sie: Die Klasse 2-*COL* ist *nicht FO-definierbar*.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(35 Punkte)**

Sei $\sigma = \{\leqslant\}$ und $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ eine σ-Struktur.

- $\mathcal{A}$ ist eine *dichte* lineare Ordnung, wenn $\leqslant^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist und es zwischen je zwei Elementen $a, b \in A$ mit $a <^{\mathcal{A}} b$ ein $c \in A$ mit $a <^{\mathcal{A}} c <^{\mathcal{A}} b$ gibt.
- $\mathcal{A}$ ist eine *lokal endliche* lineare Ordnung, wenn $\leqslant^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist und für alle $a, b \in A$ die Menge $\{c \mid a <^{\mathcal{A}} c <^{\mathcal{A}} b\}$ endlich ist.

(Wir verwenden hier $a <^{\mathcal{A}} b$ als Abkürzung für „$a \leqslant^{\mathcal{A}} b$ und $a \neq b$“. Wie in der Vorlesung dürfen Sie in Formeln $x < y$ als Abkürzung für $(x \leqslant y \land \neg\, x{=}y)$ verwenden.)

(a) Geben Sie eine dichte lineare Ordnung $\mathcal{A}$ und eine lokal endliche, lineare Ordnung $\mathcal{B}$ an.

(b) Geben Sie eine lineare Ordnung $\mathcal{C}$ an, die weder dicht noch lokal endlich ist. Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(c) Die Klasse aller dichten linearen Ordnungen ist FO-definierbar.

(d) Die Klasse aller lokal endlichen linearen Ordnungen ist FO-definierbar.