Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

13. Juni 2022

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2022

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis 20. Juni 2022, 10.00 Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: (40 Punkte)

Sei $\sigma := \{f, c\}$ die Signatur, die aus dem 1-stelligen Funktionssymbol f und dem Konstantensymbol c besteht und sei $\sigma' := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

(a) Wir betrachten die σ-Struktur $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, wobei $A := \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}, \text{Echse}, \text{Spock}\}$ und $c^{\mathcal{A}} := \text{Spock}$.

Der Wert $f^{\mathcal{A}}(x, y)$ für $x, y \in A$ findet sich in Zeile x und Spalte y der folgenden Tabelle:

$f^{\mathcal{A}}$	Stein	Schere	Papier	Echse	Spock
Stein	Stein	Stein	Papier	Stein	Spock
Schere	Stein	Schere	Schere	Schere	Spock
Papier	Papier	Schere	Papier	Echse	Papier
Echse	Stein	Schere	Echse	Echse	Echse
Spock	Spock	Spock	Papier	Echse	Spock

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \mathsf{VAR} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = \text{Stein}, \ \beta(v_1) = \text{Spock}, \ \beta(v_2) = \text{Schere} \text{ und } \beta(v_i) = \text{Papier} \ \text{ für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$ und $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden σ-Terme:

(i) $t_1 := f(v_1, f(v_0, v_2))$

(ii) $t_2 := f(f(f(v_0, v_0), c), f(v_3, f(v_4, v_5)))$

(b) Geben Sie an, ob es sich bei den folgenden Ausdrücken um $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln, σ-Terme, oder keines von beidem handelt.

(i) $\omega_1 := f(c, f(v_3, v_4))$

(ii) $\omega_2 := f^{\mathcal{A}}(c^{\mathcal{A}}, v_7)$

(iii) $\omega_3 := f(v_1, f(c, v_3)) = f(v_1, v_2)$

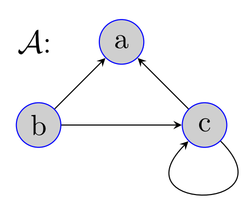
(iv) $\omega_4 := \exists v_1 (v_1 = v_1)$

(v) $\omega_5 := (v_1 \wedge v_2)$

(vi) $\omega_6 := \exists v_2 \forall v_2 (f(c, c) = v_3 \to \forall v_2 \ v_5 = v_6)$

(c) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ an, der die σ'-Struktur $\mathcal{A}$, die durch den Graphen in der Abbildung rechts repräsentiert wird, bis auf Isomorphie genau beschreibt. Das heißt es soll für alle σ'-Strukturen $\mathcal{B}$ gelten:

$$\mathcal{B} \models \varphi \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$$



— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 2: **(40 Punkte)**

Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Formeln der Logik erster Stufe (Satz 3.28). Sie dürfen dafür das Koinzidenzlemma für Terme (Satz 3.27) benutzen. *Zur Erinnerung*:

Satz 3.28 (Koinzidenzlemma für FO-Formeln)**.** *Sei* $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ *eine* σ_1*-Interpretation und sei* $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ *eine* σ_2*-Interpretation, wobei* σ_1 *und* σ_2 *Signaturen seien.*

Sei $\varphi \in \mathsf{FO}$ *eine Formel der Logik erster Stufe mit* $\sigma(\varphi) \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$*, so dass gilt:*

1. $\mathcal{A}_1|_{\sigma(\varphi)} = \mathcal{A}_2|_{\sigma(\varphi)}$*, und*
2. $\beta_1(x) = \beta_2(x)$*, für alle* $x \in \mathrm{frei}(\varphi)$*.*

Dann gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$*.*

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Sei $\sigma := \{+, \cdot, \leqslant, \underline{0}, \underline{1}\}$.

(a) Geben Sie eine Formel $\varphi_{\text{prim}}(x) \in \mathsf{FO}[\sigma]$ an, für die im Standardmodell der Arithmetik $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{\text{prim}}[a] \iff a \text{ ist eine Primzahl.}$$

(b) Eine Sophie-Germain-Primzahl ist eine Primzahl p, bei der $2p + 1$ ebenfalls eine Primzahl ist. Es ist eine offene Frage, ob es unendlich viele Sophie-Germain-Primzahlen gibt. Geben Sie einen Satz $\varphi_{\text{SG}} \in \mathsf{FO}[\sigma]$ an, sodass gilt:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{\text{SG}} \iff \text{Es gibt unendlich viele Sophie-Germain-Primzahlen}$$

Begründen Sie, warum Ihre Antwort korrekt ist.