Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

7. Juni 2022

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2022

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 13. Juni 2022, 10.00 Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, r\}$.

(a) Geben Sie die Wortstruktur $\mathcal{A}_w$ für das Wort $w := logik \in \Sigma^*$ an.

(b) Sei $\mathcal{B}$ die σ_Σ-Struktur mit dem Universum $B := [10]$, in der $\leqslant^\mathcal{B}$ die natürliche lineare Ordnung auf $[10]$ ist und $P_e^\mathcal{B} := \{9\}$, $P_f^\mathcal{B} := \{5\}$, $P_h^\mathcal{B} := \{1\}$, $P_l^\mathcal{B} := \{10\}$, $P_m^\mathcal{B} := \{8\}$, $P_n^\mathcal{B} := \{4\}$,, $P_o^\mathcal{B} := \{2, 6\}$ $P_r^\mathcal{B} := \{3, 7\}$, und $P_g^\mathcal{B} = P_i^\mathcal{B} = P_k^\mathcal{B} = P_p^\mathcal{B} = \emptyset$. Welches Wort $w \in \Sigma^*$ wird durch $\mathcal{B}$ repräsentiert?

Aufgabe 2: (30 Punkte)

Sei $\sigma := \{f, R, S, c\}$ die Signatur, die aus einem 1-stelligen Funktionssymbol f, einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 3-stelligen Relationssymbol S und einem Konstantensymbol c, besteht.
Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, f^\mathcal{A}, R^\mathcal{A}, S^\mathcal{A}, c^\mathcal{A})$, $\mathcal{B} := (B, f^\mathcal{B}, R^\mathcal{B}, S^\mathcal{B}, c^\mathcal{B})$ und $\mathcal{C} := (C, f^\mathcal{C}, R^\mathcal{C}, S^\mathcal{C}, c^\mathcal{C})$ wobei

$$\begin{array}{llll}
A := \{1,2,3,4,5\}, & R^\mathcal{A} := \{(3,3),(5,4),(1,1)\}, & S^\mathcal{A} := \{(2,2,4),(5,3,1)\}, & c^\mathcal{A} := 2 \\
B := \{u,v,w,y,z\}, & R^\mathcal{B} := \{(v,v),(z,y),(u,u)\}, & S^\mathcal{B} := \{(w,w,y),(z,u,v)\}, & c^\mathcal{B} := w \\
C := \{\text{⚀},\text{⚁},\text{⚂},\text{⚃},\text{⚄}\}, & R^\mathcal{C} := \{(\text{⚄},\text{⚄}),(\text{⚂},\text{⚂}),(\text{⚀},\text{⚁})\}, & S^\mathcal{C} := \{(\text{⚀},\text{⚂},\text{⚄}),(\text{⚃},\text{⚃},\text{⚁})\}, & c^\mathcal{C} := \text{⚃}
\end{array}$$

und die Funktionen $f^\mathcal{A} \colon A \to A$, $f^\mathcal{B} \colon B \to B$ und $f^\mathcal{C} \colon C \to C$ definiert sind durch

x	1	2	3	4	5
$f^\mathcal{A}(x)$	2	1	2	5	4

x	u	v	w	y	z
$f^\mathcal{B}(x)$	z	w	v	u	y

x	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄
$f^\mathcal{C}(x)$	⚁	⚀	⚃	⚄	⚃

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

Aufgabe 3: (50 Punkte)

Im folgenden geben wir Ihnen eine allgemeine Beschreibung des ersten Schritts des Tseitin-Verfahrens für Formeln aus $\mathsf{AL}(\tau)$ für $\tau := \{\neg, \wedge\}$ an.

Dafür benötigen wir zunächst die folgenden Notationen:

- $\mathsf{Lit} := \mathsf{AS} \cup \{\neg X \mid X \in \mathsf{AS}\}$ ist die Menge aller Literale.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

- Zu jeder Formel $\varphi \in \mathsf{AL}(\tau)$ definieren wir die Menge $\mathrm{sub}(\varphi) \subseteq \mathsf{AL}(\tau)$ rekursiv wie folgt:
  Rekursionsanfang: Für alle $X \in \mathsf{AS}$ ist $\mathrm{sub}(X) := \{X\}$.

  Rekursionsschritt: Für $\varphi \in \mathsf{AL}(\tau) \setminus \mathsf{AS}$ gilt:

  - Falls φ von der Form $\neg\psi$ für ein $\psi \in \mathsf{AL}(\tau)$ ist, so ist $\mathrm{sub}(\varphi) := \mathrm{sub}(\psi) \cup \{\varphi\}$.
  - Falls φ von der Form $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{AL}(\tau)$ ist, so ist $\mathrm{sub}(\varphi) := \mathrm{sub}(\psi_1) \cup \mathrm{sub}(\psi_2) \cup \{\varphi\}$.

Sei nun $\varphi \in \mathsf{AL}(\tau)$ eine beliebige Formel, die nicht in KNF ist und die wir für den Rest dieser Aufgabe festhalten. Ebenso halten wir eine injektive Abbildung $f : \mathrm{sub}(\varphi) \to \mathsf{AS} \setminus \mathrm{as}(\varphi)$ fest. *Zur Erinnerung*: $\mathrm{as}(\varphi)$ ist die Menge aller Aussagensymbole, die in φ vorkommen.

Wir definieren den Repräsentanten $\mathrm{rep}(\psi)$ von ψ für jedes $\psi \in \mathrm{sub}(\varphi) \setminus \mathsf{Lit}$ als $\mathrm{rep}(\psi) := X_\psi := f(\psi)$ und für jedes $\lambda \in \mathrm{sub}(\varphi) \cap \mathsf{Lit}$ als $\mathrm{rep}(\lambda) := \lambda$.

Für alle $\psi \in \mathrm{sub}(\varphi) \setminus \mathsf{Lit}$ definieren wir die Formel $\mathrm{form}(\psi) \in \mathsf{AL}$ wie folgt:

- Falls ψ von der Form $\neg\psi'$ für ein $\psi' \in \mathsf{AL}(\tau)$ ist, so ist $\mathrm{form}(\psi) := \big(X_\psi \leftrightarrow \neg\,\mathrm{rep}(\psi')\big)$.
- Falls ψ von der Form $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{AL}(\tau)$ ist, so ist $\mathrm{form}(\psi) := \big(X_\psi \leftrightarrow (\mathrm{rep}(\psi_1) \wedge \mathrm{rep}(\psi_2))\big)$.

Wir setzen:

$$\varphi' := \Big(X_\varphi \wedge \bigwedge_{\psi \in \mathrm{sub}(\varphi) \setminus \mathsf{Lit}} \mathrm{form}(\psi)\Big)$$

(a) Geben Sie $\mathrm{sub}(\varphi)$ und φ' für die Formel $\varphi := \big(\neg(A_1 \wedge A_2) \wedge \neg A_3\big)$ an.

In den folgenden Teilaufgaben sei φ eine beliebige Formel in $\mathsf{AL}(\tau)$, die nicht in KNF ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \varphi'$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$.

(c) Für jede Interpretation $\mathcal{I}$ sei $\mathcal{I}'$ die Interpretation mit $\mathcal{I}'(Y) = \mathcal{I}(Y)$ für alle $Y \in \mathrm{as}(\varphi)$ und $\mathcal{I}'(X_\psi) = [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}}$ für alle $\psi \in \mathrm{sub}(\varphi) \setminus \mathsf{Lit}$.

  (i) Zeigen Sie, dass für alle $\psi \in \mathrm{sub}(\varphi) \setminus \mathsf{Lit}$ gilt: $\mathcal{I}' \models \mathrm{form}(\psi)$.

  (ii) Zeigen Sie, dass für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt: $\mathcal{I}' \models \varphi'$.

Beachten Sie, dass aus **(b)** und **(c)** folgt, dass φ und φ' erfüllbarkeitsäquivalent sind.