Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

16. Mai 2022

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2022

Übungsblatt 4v2

Abgabe: *bis 23. Mai 2022, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: (60 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir einen *Baum* $\mathcal{B}$ mit der *abzählbar unendlichen Knotenmenge* $V := \mathbb{N}$. Die Wurzel von $\mathcal{B}$ ist dabei der Knoten $w := 0$. Die Kanten von $\mathcal{B}$ repräsentieren wir durch eine Funktion *Kinder*, die jedem Knoten $v \in V$ die Menge $\mathit{Kinder}(v)$ all seiner Kinder zuordnet. Wir nehmen an, dass $\mathcal{B}$ *endlich verzweigend* ist. Damit meinen wir, dass für jeden Knoten $v \in V$ die Menge $\mathit{Kinder}(v)$ endlich ist.

(a) Ein *Pfad* in $\mathcal{B}$ ist eine (endliche oder unendliche) Folge $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ von Knoten aus V, so dass gilt: $v_0 = w$ ist die Wurzel von $\mathcal{B}$, und für alle v_i, v_{i+1} auf dem Pfad ist $v_{i+1} \in \mathit{Kinder}(v_i)$. Eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ *repräsentiert einen Pfad* $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots)$, falls für jedes $v \in V$ und das zugehörige Aussagensymbol $A_v \in \mathsf{AS}$ gilt:

$$\mathcal{I}(A_v) = 1 \quad\iff\quad v \in \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}.$$

Das Aussagensymbol A_v repräsentiert also die Aussage *„Der Knoten v gehört zum Pfad P“*.

Geben Sie eine unendliche Formelmenge Φ an, so dass für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \quad\iff\quad \mathcal{I} \text{ repräsentiert einen Pfad unendlicher Länge in } \mathcal{B}.$$

(b) Ein endlicher Pfad $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ hat die Länge n. Wir sagen, dass der Baum $\mathcal{B}$ *Pfade beliebiger endlicher Länge* enthält, wenn $\mathcal{B}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Pfad der Länge n enthält.

Beweisen Sie mit Hilfe des *Endlichkeitssatzes* das folgende Lemma von Dénes Kőnig (1936):

Kőnigs Lemma. *Wenn $\mathcal{B}$ Pfade beliebiger endlicher Länge enthält, dann enthält $\mathcal{B}$ einen Pfad unendlicher Länge.*

Aufgabe 2: (40 Punkte)

(a) Wandeln Sie analog zu Beispiel 2.52 die Formel

$$\varphi \;:=\; \neg\Big((Q \wedge R) \to (\neg S \vee T)\Big)$$

mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ_K in 3-KNF um.

Achtung: Halten Sie sich strikt an die Art der Notation und Zeilenaufteilung von Beispiel 2.52. Dies beinhaltet folgende Eigenschaften:

- Die Subformeln ψ (beginnend mit ψ_1) werden aufsteigend in der Reihenfolge ihres Vorkommens als Teilwort von φ nummeriert. Hierbei werden die Subformeln in φ wie in Beispiel 2.52 markiert.
- Negierte Aussagensymbole bilden keine eigene Subformel. Im Gegensatz dazu bilden aber negierte Formeln, die aus mehr als nur einem Aussagensymbol bestehen, eine eigene Subformel.

- Die neuen Aussagensymbole sind entsprechend aus der Menge $\{X_\varphi, X_{\psi_1}, X_{\psi_2}, \ldots\}$ zu wählen. Für jede Subformel wird in φ' eine neue Zeile begonnen und rechtsseitig die passende Begründung angegeben.
- In φ_K entspricht die Zeilenaufteilung der Zeilenaufteilung von φ'.

Lösungen, die sich nicht an obige Formregeln halten, werden nicht korrigiert. Bei fehlerhaften Zeilen in φ' können eventuell die entsprechenden Zeilen in φ_K nicht korrigiert werden.

(b) Auf Blatt 5 verschoben.

(c) Auf Blatt 5 verschoben.