

# Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2022

## Übungsblatt 2

**Abgabe:** bis 9. Mai 2022, 10.00 Uhr über Moodle

### Aufgabe 1:

(35 Punkte)

(a) Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils die dualen Formeln an:

(i)  $A_{23}$

(ii)  $((\mathbf{1} \vee \mathbf{0}) \wedge \neg A_1)$

(iii)  $(\neg(\mathbf{1} \vee A_2) \wedge ((\neg \mathbf{0} \wedge A_5) \wedge (A_3 \wedge \neg((A_3 \wedge \neg \mathbf{1}) \wedge \neg A_4))))$

(b) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktor an. D.h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktor  $\tilde{\rightarrow}$ , so dass für alle  $X, Y \in \text{AS}$  und alle Interpretationen  $\mathcal{I}$  gilt:

$$\llbracket (X \tilde{\rightarrow} Y) \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 - \llbracket (X \rightarrow Y) \rrbracket^{\mathcal{I}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.27) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 2:

(30 Punkte)

(a) Finden Sie für die folgenden Formeln heraus, ob  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  bzw.  $\varphi_3 \equiv \varphi_4$  gilt.

$$\varphi_1 := (\neg A_0 \vee \neg A_1)$$

$$\varphi_3 := (A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_2))$$

$$\varphi_2 := ((A_0 \wedge A_1) \rightarrow \neg(A_0 \vee A_2))$$

$$\varphi_4 := (\neg(A_0 \rightarrow A_1) \wedge (\neg A_2 \vee A_0))$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Ist die folgende Behauptung korrekt?

Seien  $I$  und  $J$  beliebige endliche, nicht-leere Mengen und sei für jedes  $i \in I$  und  $j \in J$  eine aussagenlogische Formel  $\varphi_{i,j}$  gegeben. Dann gilt

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \equiv \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

### Aufgabe 3:

(35 Punkte)

Beweisen Sie das Koinzidenzlemma der Aussagenlogik. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Geben Sie die rekursive Definition einer Funktion  $\text{as} : \text{AL} \rightarrow \mathcal{P}(\text{AS})$  an, so dass für jedes  $\varphi \in \text{AL}$  gilt:  $\text{as}(\varphi)$  ist genau die Menge aller Aussagensymbole, die in  $\varphi$  vorkommen.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes  $\varphi \in \text{AL}$  gilt:

Für alle Interpretationen  $\mathcal{I}_1 : \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$  und  $\mathcal{I}_2 : \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $\mathcal{I}_1(X) = \mathcal{I}_2(X)$  für alle  $X \in \text{as}(\varphi)$  gilt:  $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$ .