Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

25. April 2022

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2022

Übungsblatt 1

Abgabe: *bis 2. Mai 2022, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

*Notieren Sie bitte ganz oben auf Ihrer Abgabe die Daten **aller** Personen Ihrer Kleingruppe. So könnte der Kopf Ihrer Abgabe aussehen:*

Blatt Nr. X	*Max Mustermann,*	*Matr.Nr. 0101010*
	Sabine Musterfrau	*Matr.Nr. 1001001*

*Jede Person erhält nur Punkte für diejenigen Abgaben, auf denen ihr Name angegeben ist. Sich in die Abgabegruppe in Moodle einzutragen ist **nicht** ausreichend.*

Aufgabe 1: Incognito Rex (50 Punkte)

Aufruhr in der Forschungsabteilung der „Dinopark GmbH & Co. KG“. Der Vorstand verlangt als Reaktion auf schwindende Besucherzahlen die Entwicklung eines neuen Dinosauriers. Er soll, wenn möglich, **G**rößer, **S**chrecklicher, und **I**ntelligenter sein, als alle bisherigen Saurier. Wie die Forscher schmerzlich lernen mussten, kann unvorsichtiges Basteln an den Genen eines Sauriers seltsame Folgen haben: Unter Umständen wird der Dinosaurier beispielsweise **U**nsichtbar (Was nicht nur ein Sicherheitsrisiko darstellt – es ist in einem Zoo schlichtweg unpraktisch). Insgesamt ergeben sich folgende Regeln für das Projekt:

Regel 1: Der Saurier soll **G**roß, oder **S**chrecklich, oder wenigstens **I**ntelligent werden.

Regel 2: Falls der Saurier **I**ntelligent wird, muss er auch **G**roß oder **S**chrecklich werden – auf keinen Fall darf er dann aber **U**nsichtbar sein.

Regel 3: **U**nsichtbarkeit ist ein Nebeneffekt der Kombination derjenigen Gene, die **G**röße und **S**chrecken erzeugen.

Regel 4: **S**chrecken ist eigentlich auch nur ein Nebenprodukt der Gene für **I**ntelligenz oder **G**röße.

(a) Übersetzen sie die obigen vier Regeln in aussagenlogische Formeln φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4, welche den Inhalt der jeweiligen Regel wiederspiegeln. Benutzen Sie dafür die Aussagensymbole G, I, S, und U mit der Bedeutung, dass der Saurier **G**roß, **I**ntelligent, **S**chrecklich oder **U**nsichtbar wird.

(b) Konstruieren Sie eine Formel φ, die nur die Aussagensymbole G, I, S und U benutzt und ausdrückt, dass alle vier Regeln eingehalten werden müssen.

(c) Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Formel φ auf.

(d) Das Parkmanagement hat aus einem vergangenen Vorfall gelernt, dass ein unsichtbarer Dinosaurier leicht ausreißt. Geben Sie daher, eine erfüllende Interpretation $\mathcal{I}$ der Formel φ an, für die $\mathcal{I}(U) = 0$ gilt, oder zeigen Sie, dass keine solche Interpretation existiert.

(e) Kann die vom Management befürchtete Situation eines unsichtbaren Dinosauriers überhaupt eintreten? Wenn ja, dann geben Sie eine erfüllende Interpretation $\mathcal{I}$ der Formel φ an, für die $\mathcal{I}(U) = 1$ gilt. Andernfalls zeigen Sie, dass keine solche Interpretation existiert.

Aufgabe 2: (50 Punkte)

(a) Entscheiden Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel ein Modell an und für jede nicht allgemeingültige Formel eine Interpretation, die die Formel nicht erfüllt.

(i) $\varphi_1 := (A_1 \vee \mathbf{1})$

(ii) $\varphi_2 := \big((A_0 \wedge A_1) \rightarrow (A_0 \vee A_1)\big)$

(iii) $\varphi_3 := \big((\mathbf{0} \rightarrow (\neg A_0 \vee \neg A_1)) \leftrightarrow \mathbf{0}\big)$

(iv) $\psi_n := \bigwedge_{i=1}^{n} (A_i \leftrightarrow A_{2i})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

(b) Seien φ_1, φ_2 und φ_3 wie in Aufgabenteil **(a)** definiert und sei $\Phi := \{\varphi_1, \varphi_2\}$.
Gilt nun, dass $\Phi \models \varphi_3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist *durch 3 teilbar*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 3 \cdot m$.
Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n \ := \begin{cases} (A_n \leftrightarrow \neg A_{n+1}), & \text{falls } n \text{ durch 3 teilbar ist} \\ ((A_n \leftrightarrow A_{n+1}) \leftrightarrow A_{n+2}), & \text{falls } n \text{ nicht durch 3 teilbar ist} \end{cases}$$

und $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$.
Es ist also beispw. $\varphi_1 = ((A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3)$, $\varphi_2 = ((A_2 \leftrightarrow A_3) \leftrightarrow A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_4)$, $\varphi_4 = ((A_4 \leftrightarrow A_5) \leftrightarrow A_6)$, $\varphi_5 = ((A_5 \leftrightarrow A_6) \leftrightarrow A_7)$ und $\varphi_6 = (A_6 \leftrightarrow \neg A_7)$.
Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und erklären Sie, warum $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.