

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2022

Übungsblatt 9

Zu bearbeiten bis 5. Juli 2022

Aufgabe 1: (55 Punkte)

Zeigen Sie, dass in Definition 4.10 („Repräsentierbarkeit einer Funktion“) die Bedingung (1.2) bereits aus den Bedingungen (1.1) und (2) folgt, sofern $T \supseteq Q$ ist. D.h.:

Sei $T \supseteq Q$ eine Menge von $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$ -Sätzen, sei $k \geq 1$, sei $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ eine totale Funktion, und sei $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ eine $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$ -Formel, so dass gilt:

(1.1) Für alle $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \dots, m_k) = n$ gilt: $T \models \varphi(\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_k, \underline{n})$.

(2) Für alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$T \models \forall y_1 \forall y_2 \left(\left(\varphi(\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_k, y_1) \wedge \varphi(\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_k, y_2) \right) \rightarrow y_1 = y_2 \right).$$

Zeigen Sie, dass dann auch Folgendes gilt:

(1.2) Für alle $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \dots, m_k) \neq n$ gilt: $T \models \neg \varphi(\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_k, \underline{n})$.

Frage: An welcher Stelle benutzt Ihr Beweis, dass $T \supseteq Q$ ist?

Aufgabe 2: (0 Punkte)

(verschoben auf Blatt 10)

Aufgabe 3: (45 Punkte)

Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Trakhtenbrot:

Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{E\}$ die Signatur, die aus einem zweistelligen Relationssymbol E besteht. Das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma_{\text{Graph}}]$ ist unentscheidbar.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die in Aufgabe 3 von Blatt 8 bewiesene Aussage. Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation von Strukturen über einer binären Signatur σ durch gerichtete Graphen (d.h. σ_{Graph} -Strukturen).