

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2022

Übungsblatt 8

Zu bearbeiten bis 28. Juni 2022

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Sei \mathcal{Z} die σ_{Ar} -Struktur mit Universum \mathbb{Z} und Konstanten $0^{\mathcal{Z}} = 0$ und $1^{\mathcal{Z}} = 1$, für die $\leq^{\mathcal{Z}}$, $+^{\mathcal{Z}}$ und $\cdot^{\mathcal{Z}}$ die natürliche lineare Ordnung, Addition und Multiplikation auf \mathbb{Z} sind.

Zeigen Sie: $\text{Th}(\mathcal{Z})$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, seien $r, s \in \mathbb{N}$ und sei R ein r -stelliges Relationssymbol mit $R \notin \sigma$.

Eine $\text{FO}[\sigma \dot{\cup} \{R\}]$ -Formel $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ heißt *im Endlichen monoton in R* , wenn für alle endlichen σ -Strukturen \mathcal{A} und alle Relationen $R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}} \subseteq A^r$ gilt:

$$\text{Falls } R_1^{\mathcal{A}} \subseteq R_2^{\mathcal{A}}, \text{ so } \varphi(\mathcal{A}, R_1^{\mathcal{A}}) \subseteq \varphi(\mathcal{A}, R_2^{\mathcal{A}}),$$

wobei $\varphi(\mathcal{A}, R_i^{\mathcal{A}}) := \{\bar{a} \in A^s : (\mathcal{A}, R_i^{\mathcal{A}}) \models \varphi[\bar{a}]\}$.

Beweisen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist.

MONOTONIE IM ENDLICHEN:

Eingabe: Eine $\text{FO}[\sigma \dot{\cup} \{R\}]$ -Formel $\varphi(x_1, \dots, x_s)$.

Frage: Ist $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ im Endlichen monoton in R ?

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Trakhtenbrot.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Eine Signatur σ heißt *binär*, falls jedes Symbol in σ ein Relationssymbol der Stelligkeit 2 ist. Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Trakhtenbrot:

Es gibt eine endliche binäre Signatur $\hat{\sigma}$, so dass das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\hat{\sigma}]$ unentscheidbar ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation beliebiger σ -Strukturen durch kantengefärbte Graphen, repräsentiert durch Strukturen über einer geeigneten binären Signatur $\hat{\sigma}$. Benutzen Sie die in der Vorlesung für $\sigma := \tilde{\sigma}_{Ar} := \{\leq, R_+, R_., R_0, R_1\}$ bewiesene Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für $\text{FO}[\sigma]$ -Sätze, um die Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für $\text{FO}[\hat{\sigma}]$ -Sätze zu beweisen.

Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Beweisen Sie Satz 9.24 aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass gilt: Wenn σ eine relationale Signatur ist, die ausschließlich aus Relationssymbolen der Stelligkeit 1 besteht, so ist das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma]$ entscheidbar.