Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

7. Juni 2022

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2022

Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis 14. Juni 2022

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Gödelnummern der σ_{Ar}-Terme $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$ und $\underline{3}$.

(b) Beweisen Sie Lemma 3.11(c), d.h.:
Sei Φ eine entscheidbare Menge von FO[σ_{Ar}]-Sätzen und sei $\varphi(x)$ eine FO[σ_{Ar}]-Formel.
Behauptung: Falls f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Phi \models \varphi\frac{n}{x} \quad \text{oder} \quad \Phi \models \neg\varphi\frac{n}{x}\ ,$$

dann ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \Phi \models \varphi\frac{n}{x}\}$ entscheidbar.

Aufgabe 2: **(20 Punkte)**

Beweisen Sie Behauptung 5 aus dem Beweis von Lemma 3.15, d.h. zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$g(y_1, y_2) \quad := \quad \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + 1)(y_1 + y_2) + y_2\ , \qquad \text{für alle } y_1, y_2 \in \mathbb{N},$$

bijektiv ist.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Definition: Die Menge Σ_1 besteht aus allen FO[σ_{Ar}]-Formeln der Form $\exists x\, \varphi$, wobei x eine Variable und φ eine Δ_0-Formel ist.

Definition: Für zwei FO[σ_{Ar}]-Formeln ψ und ψ' schreiben wir $\psi \equiv_{\leqslant\text{-ord}} \psi'$, falls für jede σ_{Ar}-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$, für die $\leqslant^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist, gilt: $\mathcal{I} \models \psi \iff \mathcal{I} \models \psi'$.

Seien φ_1 und φ_2 zwei Formeln in Σ_1.
Zeigen Sie, dass es Σ_1-Formeln $\varphi_\wedge$ und $\varphi_\vee$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi_\vee \ \equiv_{\leqslant\text{-ord}}\ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad \text{und} \qquad \varphi_\wedge \ \equiv_{\leqslant\text{-ord}}\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Lemma 3.8, d.h. zeigen Sie, dass die in Def. 3.6 und Def. 3.7 eingeführte Kodierung alle Eigenschaften aus Annahme 3.1 besitzt.