Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

24. Mai 2022

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2022

Übungsblatt 5

Zu bearbeiten bis 31. Mai 2022

Aufgabe 1: **($8 + 8 + 8 + 8 = 32$ Punkte)**

Entscheiden Sie für jede der folgenden Klassen, ob sie

- endlich axiomatisierbar,
- erststufig axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar, oder
- nicht erststufig axiomatisierbar

ist und beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(a) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) gerichteten Graphen.

(b) Die Klasse aller nicht azyklischen (endlichen oder unendlichen) gerichteten Graphen.

(c) Die Klasse aller endlichen azyklischen gerichteten Graphen.

(d) Die Klasse aller endlichen nicht azyklischen gerichteten Graphen.

Zur Erinnerung: Ein (endlicher oder unendlicher) gerichteter Graph ist *azyklisch*, falls er keinen gerichteten Kreis endlicher Länge enthält.

Aufgabe 2: **($7 + 18 = 25$ Punkte)**

Seien A und B zwei Mengen. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Für jede Menge A gibt es eine Menge B mit $A \prec B$ (d.h. es gibt eine injektive Funktion von A nach B, aber keine bijektive).

(b) Für alle Mengen A und B mit $A \preccurlyeq B$ und $B \preccurlyeq A$ ist $A \sim B$. Das heißt, falls es Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ gibt, die jeweils injektiv sind, dann gibt es eine bijektive Funktion $h\colon A \to B$.

Aufgabe 3: **(5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25 Punkte)**

Sei A ein endliches Alphabet. Für eine Menge $L \subseteq A^*$ sei $\bar{L} := A^* \setminus L$.

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Eine Menge $L \subseteq A^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

(b) Jede entscheidbare Menge $L \subseteq A^*$ ist rekursiv aufzählbar.

(c) Eine Menge $L \subseteq A^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl L als auch $\bar{L}$ semi-entscheidbar sind.

(d) Wenn eine Menge $L \subseteq A^*$ semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar ist, dann ist $\bar{L}$ nicht semi-entscheidbar.

(e) Sind $L_1 \subseteq A^*$ und $L_2 \subseteq A^*$ rekursiv aufzählbare Mengen, so ist auch die Menge $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 4: **(18 Punkte)**

Sei $\mathcal{B}$ ein Nichtstandard-Modell der Arithmetik.

Zeigen Sie: Zwischen je zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ in $\mathcal{B}$ liegt eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$.