

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2022

Übungsblatt 4

Zu bearbeiten bis 24. Mai 2022

Aufgabe 1:

(20 Punkte)

Arbeiten Sie das folgende Detail aus dem Beweis von Lemma 1.40' aus:

Sei K eine Kette in (M, \subseteq) , sei n eine natürliche Zahl ≥ 1 und seien $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ Elemente aus K . Beweisen Sie, dass es eine Permutation $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $\Theta_{\pi(1)} \subseteq \Theta_{\pi(2)} \subseteq \dots \subseteq \Theta_{\pi(n)}$ ist.

Aufgabe 2:

(15 + 15 = 30 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom aus dem Wohlordnungssatz folgt.
- (b) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom aus dem Zornschen Lemma folgt.

Aufgabe 3:

(18 + 7 = 25 Punkte)

- (a) Beweisen Sie den absteigenden Satz von Löwenheim und Skolem (Satz 2.15).
- (b) Gilt auch die verschärfte Variante des absteigenden Satzes von Löwenheim und Skolem, die besagt, dass die Mächtigkeit des Modells höchstens so groß wie die Mächtigkeit von Φ ist?

Aufgabe 4:

(18 + 7 = 25 Punkte)

Beweisen Sie Bemerkung 2.17, das heißt zeigen Sie Folgendes: Sei σ eine beliebige Signatur und sei \mathcal{A} eine beliebige σ -Struktur. Dann gilt:

- (a) Ist \mathcal{A} endlich, so gilt für alle σ -Strukturen \mathcal{B} : $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
- (b) Ist \mathcal{A} unendlich, so gibt es eine σ -Struktur \mathcal{B} mit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ und $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{A}$.

Hinweis: Für (a) können Sie folgendermaßen vorgehen: Zeigen Sie zunächst, dass (a) für *endliche* Signaturen gilt. Folgern Sie daraus, dass für *beliebige* Signaturen gilt: Falls $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, so ist $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|$. Folgern Sie daraus, dass (a) für abzählbare Signaturen gilt. Folgern Sie dann, dass (a) auch für beliebige Signaturen gilt.