Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

10. Mai 2022

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2022

Übungsblatt 3

Zu bearbeiten bis 17. Mai 2022

Aufgabe 1: **(20 Punkte)**

Beweisen Sie Satz 0.42, d.h. zeigen Sie:

Für jede σ-Substitution $\mathcal{S}$, jede σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\operatorname{var}(\mathcal{S}) \subseteq \operatorname{Def}(\beta)$ und jede $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ mit $\operatorname{frei}(\varphi) \subseteq \operatorname{Def}(\beta) \cup \operatorname{Def}(\mathcal{S})$ gilt

$$\mathcal{I} \models \varphi\mathcal{S} \quad\iff\quad \mathcal{I}\mathcal{S} \models \varphi$$

Hinweis: Das Substitutionslemma für Terme (Lemma 0.38) können Sie als gegeben voraussetzen.

Aufgabe 2: **($8 + (11 + 11) = 30$ Punkte)**

(a) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ widerspruchsvoll. Wie sieht die reduzierte Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$ aus?

(b) Zeigen Sie Folgendes (wobei σ eine geeignete Signatur sei, die mindestens ein Relationssymbol enthält):

- **(i)** Es gibt eine widerspruchsfreie, negationstreue Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.
  Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Formelmenge $\{\, \exists v_0\, P(v_0)\,\} \cup \{\, \neg P(t) \;:\; t \in T_\sigma \,\}$
- **(ii)** Es gibt eine widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, die Beispiele enthält, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

Zur Information: Mit dieser Aufgabe zeigen Sie, dass im Satz von Henkin die beiden Forderungen, dass Φ negationstreu ist und Beispiele enthält, unverzichtbar sind.

Aufgabe 3: **($10 + 15 = 25$ Punkte)**

Sei σ eine beliebige Signatur. Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Phi \quad := \quad \{\, v_0 = t \;:\; t \in T_\sigma \,\} \;\cup\; \{\, \exists v_0\, \exists v_1\, \neg\, v_0{=}v_1 \,\}\,.$$

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Φ ist widerspruchsfrei.

(b) Es gibt keine Menge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

Zur Information: Mit dieser Aufgabe zeigen Sie, dass in Lemma 1.39 die Forderung, dass $|\mathsf{VAR} \setminus \operatorname{frei}(\Phi)| \;=\; \infty$ ist, unverzichtbar ist.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Arbeiten Sie die Details im Beweis von Lemma 1.41 aus.