

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2022

Übungsblatt 2

Zu bearbeiten bis 10. Mai 2022

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Beweisen Sie das Lemma 0.43 aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie:

Für jeden σ -Term t , jede FO[σ]-Formel φ und jede Variable $x \in \text{VAR}$ gilt: $t \stackrel{x}{=} t$ und $\varphi \stackrel{x}{=} \varphi$.

Aufgabe 2: (10 + 15 = 25 Punkte)

Leiten Sie die folgenden Sequenzen im Sequenzkalkül \mathfrak{K}_S ab. Hierbei sind x, y, z paarweise verschiedene Elemente aus VAR .

(a) $\forall x f(x, x) = x \vdash \forall x (P(x) \vee \neg P(f(x, x)))$

(b) $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)) \wedge \forall x \neg R(x, x) \vdash \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$

Zur Erinnerung:

Im Rahmen des Vollständigkeitsatzes betrachten wir Formeln der Art $(\varphi \rightarrow \psi)$ stets als abkürzende Schreibweise für die Formel $(\neg\varphi \vee \psi)$.

Aufgabe 3: (10 + 15 = 25 Punkte)

Betrachten Sie die Regel

$$(\forall\exists) \frac{}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \forall x \varphi}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Regel $(\forall\exists)$ korrekt ist.

(b) Sei \mathfrak{K}'_S der Kalkül, der aus dem Sequenzkalkül \mathfrak{K}_S durch Hinzufügen der Regel $(\forall\exists)$ entsteht. Prüfen Sie, ob jede Sequenz in \mathfrak{K}'_S ableitbar ist.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

Berechnen Sie die reduzierte Termstruktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ für die Formelmenge

$$\Phi := \{v_i = v_{i+2} : i \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \cup \left\{ E(v_0, v_7), E(v_1, v_4), E(v_6, v_0), \forall v_2 \forall v_3 \forall v_5 \left((E(v_2, v_3) \wedge E(v_3, v_5)) \rightarrow E(v_2, v_5) \right) \right\}.$$