

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Sommersemester 2022

Übungsblatt 1

Zu bearbeiten bis 03. Mai 2022

Aufgabe 1:

(15 + 15 = 30 Punkte)

Sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und R, E zweistellige Relationensymbole. Berechnen Sie

- (a) $\varphi \frac{f(v_1, v_2), v_0}{v_0, v_3}$ für $\varphi := \exists v_1 (R(v_0, v_2) \wedge \forall v_0 R(v_1, f(v_4, v_0)))$ und
(b) $\psi \frac{v_1}{v_0}$ für $\psi := \exists v_1 (E(v_0, v_1) \wedge \exists v_0 (E(v_1, v_0) \wedge \exists v_1 E(v_0, v_1)))$

Aufgabe 2:

(20 + 20 = 40 Punkte)

Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{E\}$ und $\sigma_{\text{Ar}} = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$

- (a) Geben Sie FO[σ_{Graph}]-Formeln an, die in einem endlichen gerichteten Graphen G folgende intuitive Bedeutung haben:
- (i) G enthält keine isolierten Knoten. (*Zur Erinnerung:* Ein isolierter Knoten ist ein Knoten, der keinen Nachbarn besitzt)
 - (ii) G enthält einen Kreis der Länge drei.
- (b) Geben Sie FO[σ_{Ar}]-Formeln an, die im Standardmodell \mathcal{N} der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:
- (i) Es gibt unendlich viele pythagoreische Tripel, also Tupel $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, die den Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks entsprechen, d.h. die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.
 - (ii) Jede Primzahl ist die Summe zweier Quadratzahlen.

Aufgabe 3:

(10 + 20 = 30 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Regeln des Sequenzenkalküls \mathfrak{K}_S korrekt sind.

(a)

$$(\wedge S) : \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

(b)

$$(\exists A) : \frac{\Gamma, \varphi \frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x \varphi, \psi)$$