Übung *Logik und Komplexität*

Jens Keppeler

28. April 2020

Binärbäume

- Ein **gewurzelter Baum** G ist ein endlicher gerichteter Graph, der als ungerichteter Graph ein Baum ist (d.h. der ungerichtete Graph, der aus dem gerichteten Graphen G entsteht, indem jede Kante durch eine ungerichtete Kante ersetzt wird, ist ein Baum) und der einen **Wurzelknoten** enthält, von dem aus jeder andere Knoten über einen gerichteten Pfad erreichbar ist.

Binärbäume

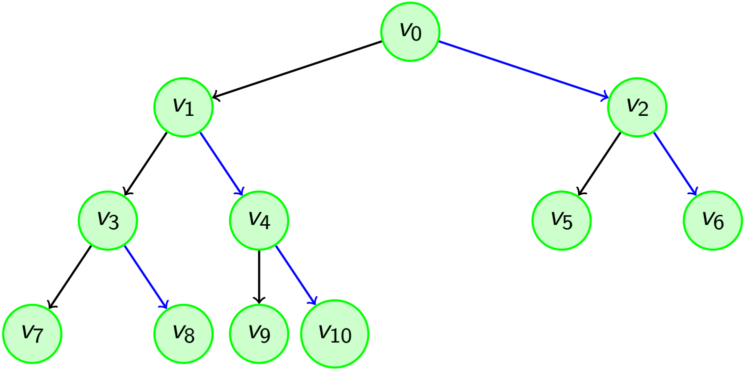
- Ein **gewurzelter Baum** G ist ein endlicher gerichteter Graph, der als ungerichteter Graph ein Baum ist (d.h. der ungerichtete Graph, der aus dem gerichteten Graphen G entsteht, indem jede Kante durch eine ungerichtete Kante ersetzt wird, ist ein Baum) und der einen **Wurzelknoten** enthält, von dem aus jeder andere Knoten über einen gerichteten Pfad erreichbar ist.
- Wenn jeder Knoten von G entweder ein Blatt ist oder genau zwei Kinder besitzt, so heißt G **voll**.

Binärbäume

- Ein **gewurzelter Baum** G ist ein endlicher gerichteter Graph, der als ungerichteter Graph ein Baum ist (d.h. der ungerichtete Graph, der aus dem gerichteten Graphen G entsteht, indem jede Kante durch eine ungerichtete Kante ersetzt wird, ist ein Baum) und der einen **Wurzelknoten** enthält, von dem aus jeder andere Knoten über einen gerichteten Pfad erreichbar ist.
- Wenn jeder Knoten von G entweder ein Blatt ist oder genau zwei Kinder besitzt, so heißt G **voll**.
- Ein voller Baum, dessen Kantenmenge E in $E_1 \dot\cup E_2$ partitioniert ist, so dass jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau ein Kind in E_1 (sein **erstes Kind**) und ein Kind in E_2 (sein **zweites Kind**) besitzt, heißt **geordneter Binärbaum**.

Binärbäume (Beispiel)

Ein geordneter Binärbaum:



E_1-Kanten: $\longrightarrow$

E_2-Kanten: $\longrightarrow$

Σ-Bäume

Sei Σ ein endliches (nicht-leeres) Alphabet.

- Ein Σ-**Baum** $t = (B, \lambda)$ besteht aus einem geordneten Binärbaum B und einer Abbildung λ, die jedem Knoten v von B eine **Beschriftung** $\lambda(v) \in \Sigma$ zuordnet.

Σ-Bäume

Sei Σ ein endliches (nicht-leeres) Alphabet.

- Ein Σ-**Baum** $t = (B, \lambda)$ besteht aus einem geordneten Binärbaum B und einer Abbildung λ, die jedem Knoten v von B eine **Beschriftung** $\lambda(v) \in \Sigma$ zuordnet.
- Die Menge aller Σ-Bäume bezeichnen wir mit T_Σ.

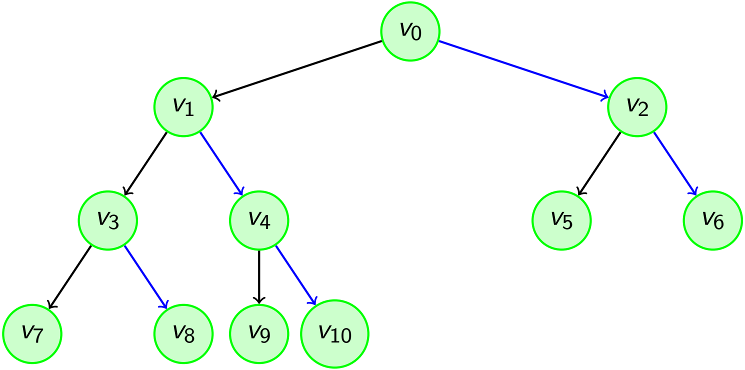
Σ-Bäume

Sei Σ ein endliches (nicht-leeres) Alphabet.

- Ein Σ-**Baum** $t = (B, \lambda)$ besteht aus einem geordneten Binärbaum B und einer Abbildung λ, die jedem Knoten v von B eine **Beschriftung** $\lambda(v) \in \Sigma$ zuordnet.
- Die Menge aller Σ-Bäume bezeichnen wir mit T_Σ.
- Eine **Baumsprache** ist eine Teilmenge L von T_Σ.

Σ-Bäume (Beispiel)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Sei $t = (B, \lambda)$ ein Σ-Baum mit
dem Binärbaum B**:**

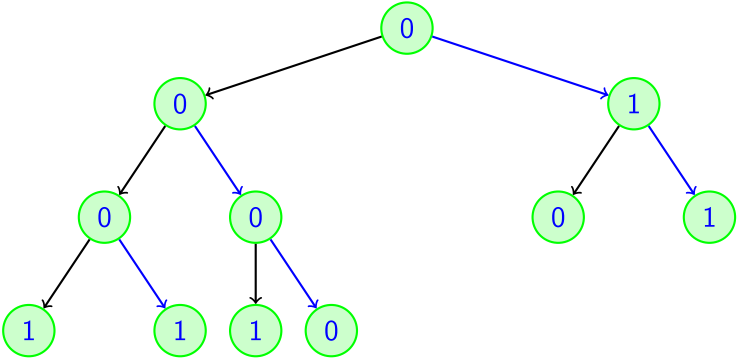


und

$\lambda(v_1) := \lambda(v_3) := \lambda(v_4) := \lambda(v_5) := \lambda(v_{10}) = 0$ und
$\lambda(v_0) := \lambda(v_2) := \lambda(v_6) := \lambda(v_7) := \lambda(v_8) := \lambda(v_9) := 1$

Σ-Bäume (Beispiel)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Sei $t = (B, \lambda)$ ein Σ-Baum mit **dem Binärbaum** B**:**



und

$\lambda(v_1) := \lambda(v_3) := \lambda(v_4) := \lambda(v_5) := \lambda(v_{10}) = 0$ und
$\lambda(v_0) := \lambda(v_2) := \lambda(v_6) := \lambda(v_7) := \lambda(v_8) := \lambda(v_9) := 1$

Baumautomaten

Ein (bottom-up) **Baumautomat** ist ein Tupel $\mathbb{A} := (Q, \Sigma, \Delta, F)$, wobei

- Q eine endliche Menge, **Zustandsmenge**
- Σ ein endliches Alphabet,
- $F \subseteq Q$ **Menge der akzeptierenden Zustände**
- $\Delta \subseteq (Q^2 \cup \{\perp\}) \times \Sigma \times Q$ eine Relation **Überführungsrelation**

ist.

Baumautomaten

Ein (bottom-up) **Baumautomat** ist ein Tupel $\mathbb{A} := (Q, \Sigma, \Delta, F)$, wobei

- Q eine endliche Menge, **Zustandsmenge**
- Σ ein endliches Alphabet,
- $F \subseteq Q$ **Menge der akzeptierenden Zustände**
- $\Delta \subseteq (Q^2 \cup \{\perp\}) \times \Sigma \times Q$ eine Relation **Überführungsrelation**

ist.

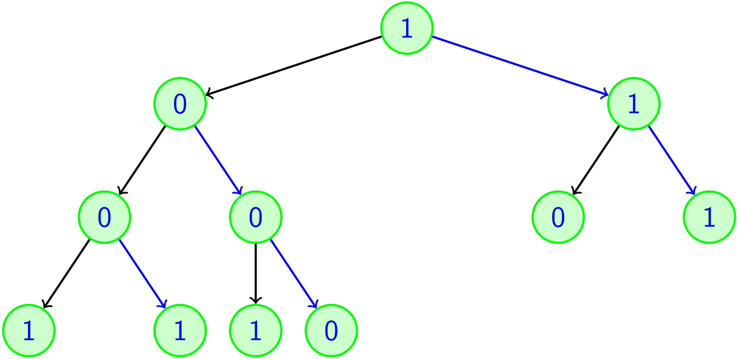
Falls Δ der Graph einer Abbildung ist, die auf ganz $(Q^2 \cup \{\perp\}) \times \Sigma$ definiert ist, so heißt $\mathbb{A}$ **deterministisch**, ansonsten heißt $\mathbb{A}$ **nichtdeterministisch**.

Baumautomaten (Beispiel)

Sei $\mathbb{A} := (Q, \Sigma, \Delta, F)$ ein Baumautomat mit

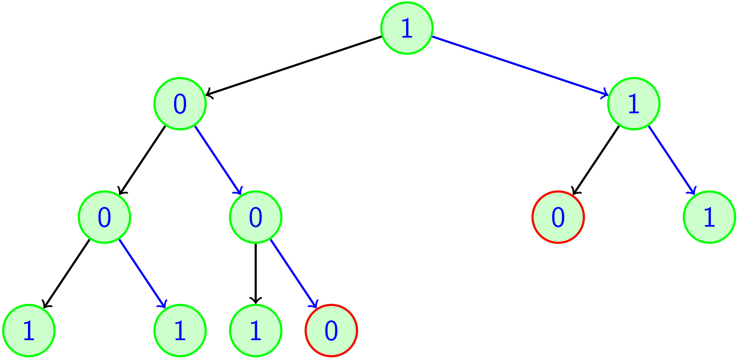
- $Q = \{q_0, q_1\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $F = \{q_0\}$
- $$\begin{aligned}\Delta = \{&(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),\\ &(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),\\ &(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}\end{aligned}$$

Baumautomaten (Beispiel)



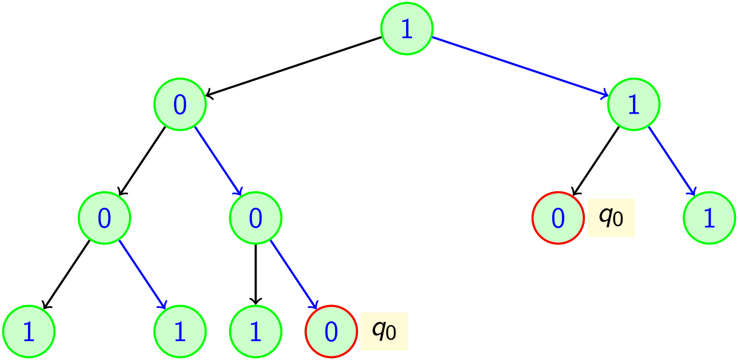
$$\Delta = \{(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



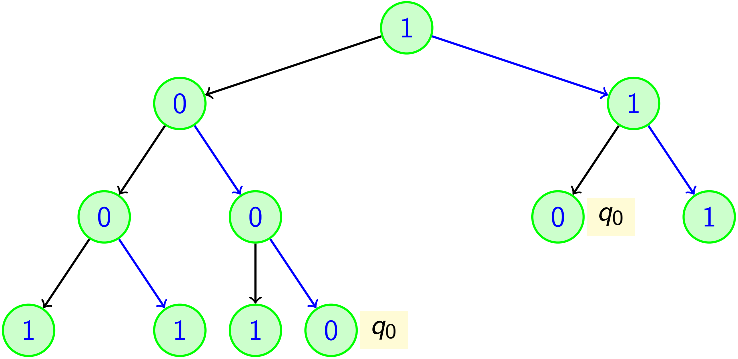
$$\Delta = \{(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



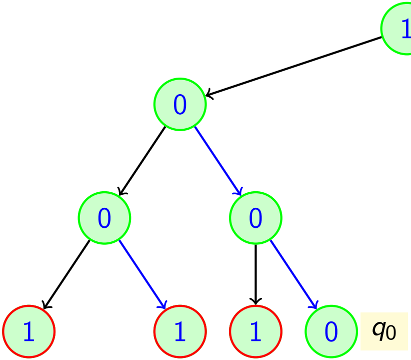
$$\Delta = \{(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



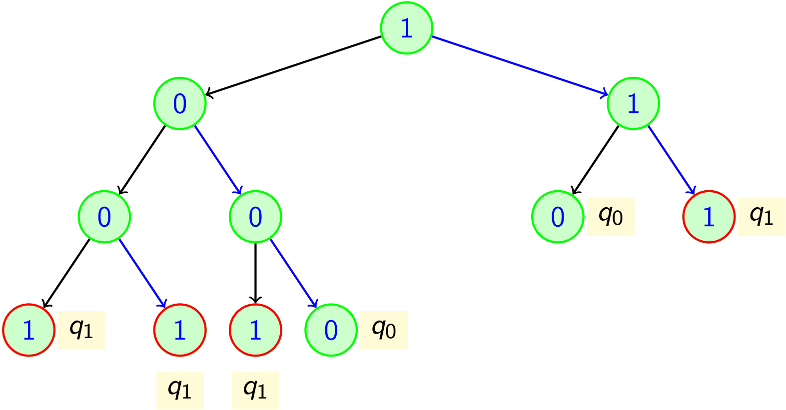
$$
\begin{aligned}
\Delta = \{&(\bot, 0, q_0), (\bot, 1, q_1),\\
&(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),\\
&(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}
\end{aligned}
$$

Baumautomaten (Beispiel)



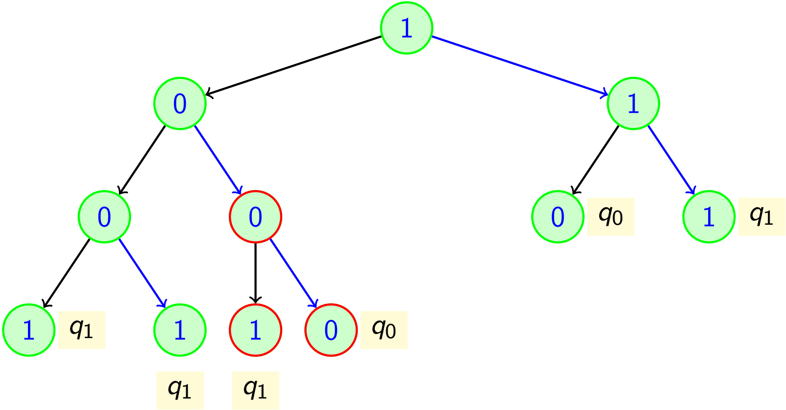
$$\begin{aligned}\Delta = \{&(\bot, 0, q_0), {\color{red}(\bot, 1, q_1)},\\ &(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),\\ &(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}\end{aligned}$$

Baumautomaten (Beispiel)



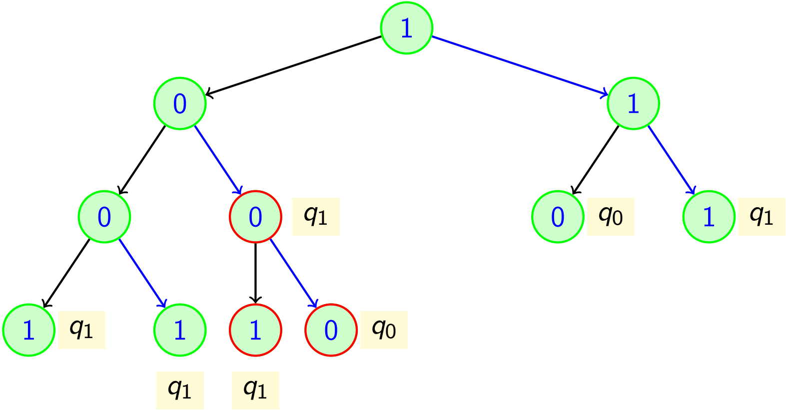
$$\Delta = \{(\perp, 0, q_0), {\color{red}(\perp, 1, q_1)},$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



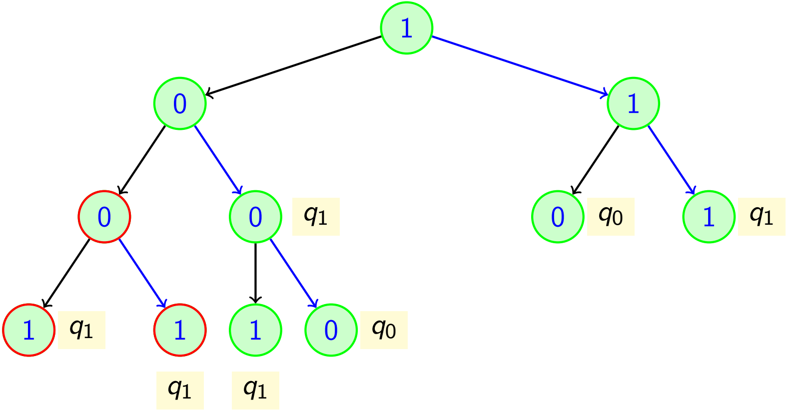
$$
\begin{aligned}
\Delta = \{&(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),\\
&(q_0, q_0, 0, q_0), {\color{red}(q_1, q_0, 0, q_1)}, (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),\\
&(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}
\end{aligned}
$$

Baumautomaten (Beispiel)



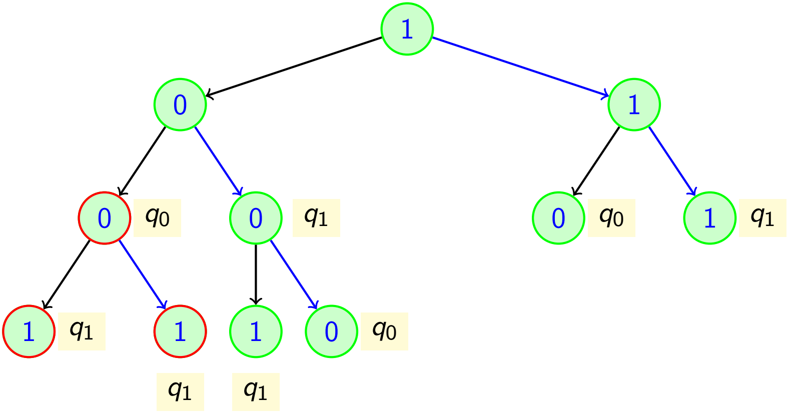
$$\Delta = \{(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



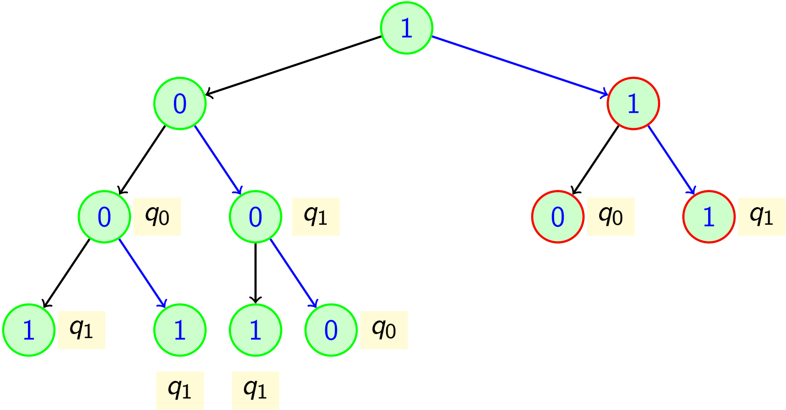
$$\Delta = \{(\bot, 0, q_0), (\bot, 1, q_1),$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), {\color{red}(q_1, q_1, 0, q_0)},$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



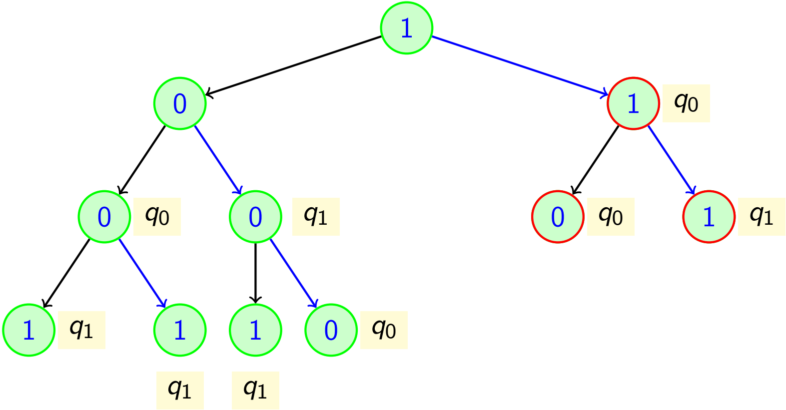
$$\Delta = \{(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), {\color{red}(q_1, q_1, 0, q_0)},$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



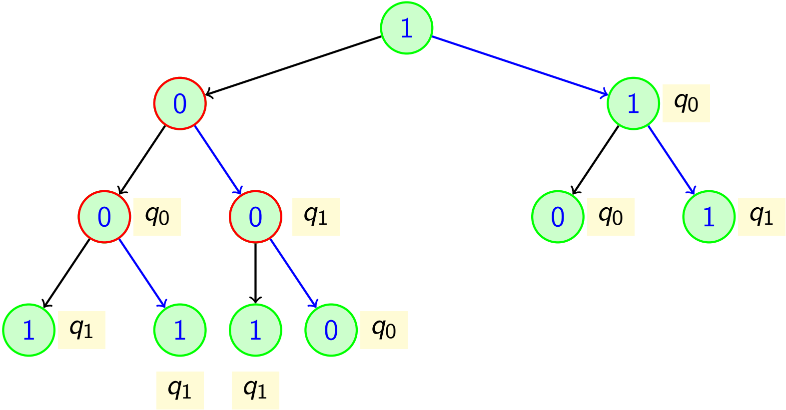
$$
\begin{aligned}
\Delta = \{&(\bot, 0, q_0), (\bot, 1, q_1),\\
&(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),\\
&(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), \color{red}{(q_0, q_1, 1, q_0)}, (q_1, q_1, 1, q_1)\}
\end{aligned}
$$

Baumautomaten (Beispiel)



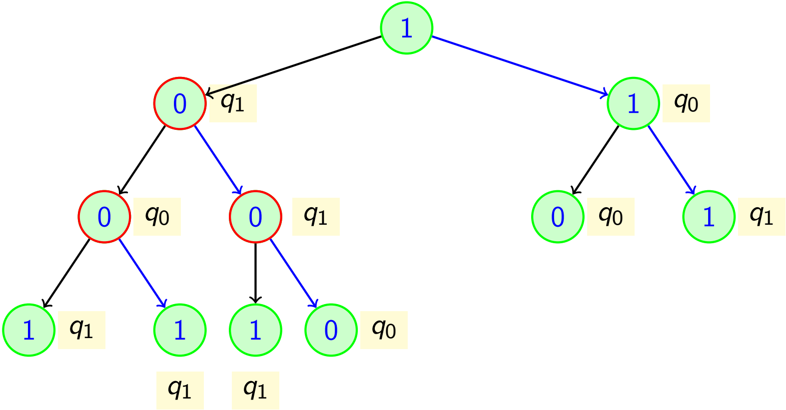
$$\Delta = \{(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), \color{red}{(q_0, q_1, 1, q_0)}, (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



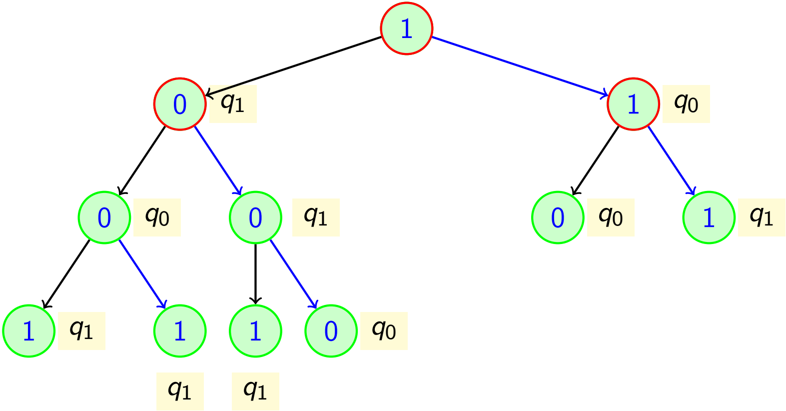
$$\Delta = \{(\bot, 0, q_0), (\bot, 1, q_1),$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), {\color{red}(q_0, q_1, 0, q_1)}, (q_1, q_1, 0, q_0),$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



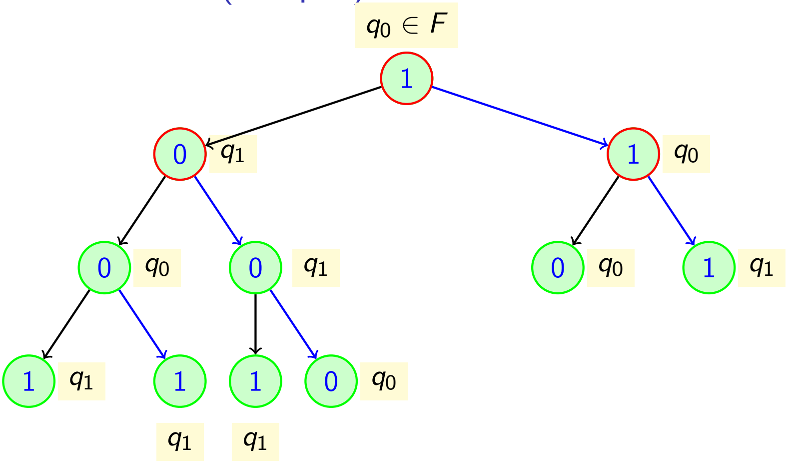
$$\Delta = \{(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), {\color{red}(q_0, q_1, 0, q_1)}, (q_1, q_1, 0, q_0),$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



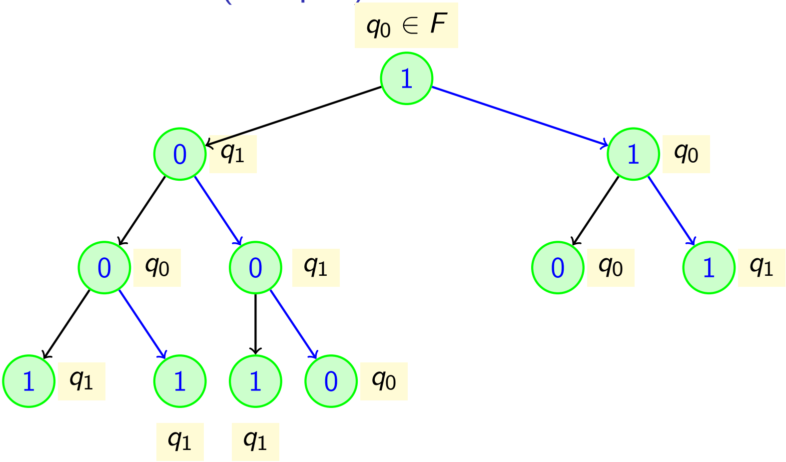
$$\Delta = \{(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), \color{red}{(q_1, q_0, 1, q_0)}, (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



$$\Delta = \{(\bot, 0, q_0), (\bot, 1, q_1),$$
$$(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),$$
$$(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}$$

Baumautomaten (Beispiel)



$$\begin{aligned}\Delta = \{&(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),\\ &(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),\\ &(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}\end{aligned}$$

Baumautomaten (Beispiel)

Hinweis: Oft kann es praktisch sein, die Zustandsrelation kompakt aufzuschreiben. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \Delta = & \{(\bot, i, q_i) : i \in \{0,1\}\} \cup \\ & \{(q_i, q_j, \ell, q_k) : i, j, \ell, k \in \{0,1\}, i + j + \ell \equiv k \bmod 2\} \end{aligned}$$

anstatt

$$\begin{aligned} \Delta = \{ & (\bot, 0, q_0), (\bot, 1, q_1), \\ & (q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0), \\ & (q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\} \end{aligned}$$

Baumautomaten

Sei $V(t)$ die Knotenmenge des Binärbaums von t.

- Der Baumautomat $\mathbb{A}$ baut eine Funktion $q : V(t) \to Q$ auf, die als **Lauf von $\mathbb{A}$ auf t** bezeichnet wird.

Baumautomaten

Sei $V(t)$ die Knotenmenge des Binärbaums von t.

- Der Baumautomat $\mathbb{A}$ baut eine Funktion $q : V(t) \to Q$ auf, die als **Lauf von** $\mathbb{A}$ **auf** t bezeichnet wird.
- Zunächst wird jedem Blatt v mit Beschriftung $a \in \Sigma$ ein Zustand $q(v) \in Q$ mit $(\perp, a, q(v)) \in \Delta$ zugewiesen.

Baumautomaten

Sei $V(t)$ die Knotenmenge des Binärbaums von t.

- Der Baumautomat $\mathbb{A}$ baut eine Funktion $q : V(t) \to Q$ auf, die als **Lauf von** $\mathbb{A}$ **auf** t bezeichnet wird.
- Zunächst wird jedem Blatt v mit Beschriftung $a \in \Sigma$ ein Zustand $q(v) \in Q$ mit $(\perp, a, q(v)) \in \Delta$ zugewiesen.
- Nun bestimmt $\mathbb{A}$ rekursiv den Zustand $q(v)$ eines mit $a \in \Sigma$ gefärbten Knotens v, der kein Blatt ist, aus den Zuständen seines ersten und zweiten Kindes u_1 und u_2. Dazu weist $\mathbb{A}$ dem Knoten v einen Zustand $q(v) \in Q$ mit $(q(u_1), q(u_2), a, q(v)) \in \Delta$ zu.

Baumautomaten

Sei $V(t)$ die Knotenmenge des Binärbaums von t.

- Der Baumautomat $\mathbb{A}$ baut eine Funktion $q : V(t) \to Q$ auf, die als **Lauf von $\mathbb{A}$ auf t** bezeichnet wird.
- Zunächst wird jedem Blatt v mit Beschriftung $a \in \Sigma$ ein Zustand $q(v) \in Q$ mit $(\perp, a, q(v)) \in \Delta$ zugewiesen.
- Nun bestimmt $\mathbb{A}$ rekursiv den Zustand $q(v)$ eines mit $a \in \Sigma$ gefärbten Knotens v, der kein Blatt ist, aus den Zuständen seines ersten und zweiten Kindes u_1 und u_2. Dazu weist $\mathbb{A}$ dem Knoten v einen Zustand $q(v) \in Q$ mit $(q(u_1), q(u_2), a, q(v)) \in \Delta$ zu.
- q ist ein **aktzeptierender Lauf** genau dann, wenn der Zustand der Wurzel zu F gehört.

Anmerkung: Wenn $\mathbb{A}$ deterministisch ist, ist q eindeutig bestimmt; ansonsten kann $\mathbb{A}$ viele Läufe auf t haben.

reguläre Baumsprachen

- Ein Σ-Baum t wird von $\mathbb{A}$ genau dann **akzeptiert**, wenn es (mindestens) einen akzeptierenden Lauf von $\mathbb{A}$ auf t gibt.

reguläre Baumsprachen

- Ein Σ-Baum t wird von $\mathbb{A}$ genau dann **akzeptiert**, wenn es (mindestens) einen akzeptierenden Lauf von $\mathbb{A}$ auf t gibt.
- Die vom Baumautomat $\mathbb{A}$ **erkannte** Baumsprache $L(\mathbb{A})$ ist die Menge aller Σ-Bäume t, die von $\mathbb{A}$ akzeptiert werden.

reguläre Baumsprachen

- Ein Σ-Baum t wird von $\mathbb{A}$ genau dann **akzeptiert**, wenn es (mindestens) einen akzeptierenden Lauf von $\mathbb{A}$ auf t gibt.
- Die vom Baumautomat $\mathbb{A}$ **erkannte** Baumsprache $L(\mathbb{A})$ ist die Menge aller Σ-Bäume t, die von $\mathbb{A}$ akzeptiert werden.
- Eine Baumsprache L heißt **regulär**, wenn es einen Baumautomaten $\mathbb{A}$ gibt, der L erkennt.

reguläre Baumsprachen

Frage: Welche Baumsprache wird von dem Baumautomaten $\mathbb{A} := (Q, \Sigma, \Delta, F)$ ein Baumautomat mit

- $Q = \{q_0, q_1\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $F = \{q_0\}$
- $$\begin{aligned}\Delta = \{&(\perp, 0, q_0), (\perp, 1, q_1),\\ &(q_0, q_0, 0, q_0), (q_1, q_0, 0, q_1), (q_0, q_1, 0, q_1), (q_1, q_1, 0, q_0),\\ &(q_0, q_0, 1, q_1), (q_1, q_0, 1, q_0), (q_0, q_1, 1, q_0), (q_1, q_1, 1, q_1)\}\end{aligned}$$

erkannt?

Weiteres Beispiele:

- Sei $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gesucht ist ein deterministischer Baumautomat $\mathbb{A}_0$, der die folgende Klasse von Σ-Bäumen akzeptiert:
  - Die Blätter sind jeweils mit einer Zahl aus Σ beschriftet.
  - Für alle anderen Knoten v gilt: Der Knoten v ist mit der Zahl aus Σ beschriftet, die sich aus der Summe der Beschriftungen seiner Kinder modulo 7 ergibt.

Σ-Bäume und Logik

Signatur: $\tau_\Sigma := \{E_1, E_2\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\}$ wobei

- E_1 und E_2 2-stellige und
- P_a 1-stellige Relationssymbole

sind.

Σ-Bäume und Logik

Signatur: $\tau_\Sigma := \{E_1, E_2\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\}$ wobei

- E_1 und E_2 2-stellige und
- P_a 1-stellige Relationssymbole

sind. Ist t ein Σ-Baum mit Knotenmenge $V(t)$, Kantenmengen $E_1(t)$ und $E_2(t)$ und Beschriftungsfunktion λ, so repräsentieren wir t durch die τ_Σ-Struktur $\mathfrak{A}_t$

- mit dem Universum $V(t)$
- und den Relationen $E_i^{\mathfrak{A}_t} := E_i(t)$ (für jedes $i \in \{1, 2\}$)
- und $P_a^{\mathfrak{A}_t} := \{v \in V(t) : \lambda(v) = a\}$ (für jedes $a \in \Sigma$).

Σ-Bäume und Logik

Signatur: $\tau_\Sigma := \{E_1, E_2\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\}$ wobei

- E_1 und E_2 2-stellige und
- P_a 1-stellige Relationssymbole

sind. Ist t ein Σ-Baum mit Knotenmenge $V(t)$, Kantenmengen $E_1(t)$ und $E_2(t)$ und Beschriftungsfunktion λ, so repräsentieren wir t durch die τ_Σ-Struktur $\mathfrak{A}_t$

- mit dem Universum $V(t)$
- und den Relationen $E_i^{\mathfrak{A}_t} := E_i(t)$ (für jedes $i \in \{1, 2\}$)
- und $P_a^{\mathfrak{A}_t} := \{v \in V(t) : \lambda(v) = a\}$ (für jedes $a \in \Sigma$).

Beispiel: siehe Tafel

Σ-Bäume und Logik

- Ein **SO**$[\tau_\Sigma]$-Satz φ **beschreibt** eine Baumsprache L, wenn gilt: $L = \{t \in T_\Sigma : \mathfrak{A}_t \models \varphi\}$.

Σ-Bäume und Logik

- Ein **SO**[τ_Σ]-Satz φ **beschreibt** eine Baumsprache L, wenn gilt: $L = \{t \in T_\Sigma : \mathfrak{A}_t \models \varphi\}$.
- Eine Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ heißt **MSO-definierbar**, wenn es einen **MSO**[τ_Σ]-Satz gibt, der L beschreibt.

Σ-Bäume und Logik

- Ein **SO**$[\tau_\Sigma]$-Satz φ **beschreibt** eine Baumsprache L, wenn gilt: $L = \{t \in T_\Sigma : \mathfrak{A}_t \models \varphi\}$.
- Eine Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ heißt **MSO-definierbar**, wenn es einen **MSO**$[\tau_\Sigma]$-Satz gibt, der L beschreibt.

Beispiele: Sei $\Sigma = \{0, 1\}$.

- Gesucht ist ein **SO**$[\tau_\Sigma]$-Satz φ, der die Klasse aller $\{0, 1\}$-Bäume beschreibt, für die gilt, dass jeder mit 1 beschriftete Knoten einen mit 0 beschrifteten Nachfolger hat.

Σ-Bäume und Logik

- Ein **SO**$[\tau_\Sigma]$-Satz φ **beschreibt** eine Baumsprache L, wenn gilt: $L = \{t \in T_\Sigma : \mathfrak{A}_t \models \varphi\}$.
- Eine Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ heißt **MSO-definierbar**, wenn es einen **MSO**$[\tau_\Sigma]$-Satz gibt, der L beschreibt.

Beispiele: Sei $\Sigma = \{0, 1\}$.

- Gesucht ist ein **SO**$[\tau_\Sigma]$-Satz φ, der die Klasse aller $\{0, 1\}$-Bäume beschreibt, für die gilt, dass jeder mit 1 beschriftete Knoten einen mit 0 beschrifteten Nachfolger hat.
- Welche Klasse aller $\{0, 1\}$-Bäume beschreibt der folgende Satz?

$$\forall x \Big(P_1(x) \rightarrow \forall Z \Big(\big(Z(x) \wedge \forall y \forall z ((Z(y) \wedge (E_1(y, z) \vee E_2(y, z))) \rightarrow Z(z)) \big) \rightarrow \exists y (Z(y) \wedge P_0(y)) \Big) \Big)$$