Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

7. Juli 2020

Logik und Komplexität

Sommersemester 2020

Übungsblatt 11

Zu bearbeiten bis 14. Juli 2020

Bemerkungen:

- In Aufgabe 2 wird der Satz von Büchi zu folgender Aussage verallgemeinert:

  Sei Σ ein endliches (nicht-leeres) Alphabet und sei $L \subseteq \Sigma^+$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

  (a) L ist regulär.
  (b) L ist MSO-definierbar.
  (c) L ist EMSO-definierbar.
  (d) L ist MLFP-definierbar.

- In Aufgabe 3 wird eine Variante des Satzes von Immerman und Vardi bewiesen, die besagt, dass LFP die Komplexitätsklasse P auf der Klasse aller Σ-Bäume beschreibt.

Aufgabe 1:
Sei $\sigma = \{E\}$.

(a) Geben Sie einen LFP$[\sigma]$-Satz an, der in einem ungerichteten Graph G aussagt, dass G 2-färbbar ist.

Hinweis: Konstruieren Sie zuerst eine LFP$[\sigma]$-Formel $\varphi(x,y)$, so dass für alle endlichen ungerichteten Graphen G, für die zugehörige σ-Struktur $\mathcal{A}_G$ und alle $v, w \in A$ gilt:

$$\mathcal{A}_G \models \varphi[v,w] \quad \text{genau dann, wenn in } G \text{ ein Pfad gerader Länge von } v \text{ nach } w \text{ existiert.}$$

(b) Sei $\Sigma := \{a,b,c\}$. Geben Sie einen LFP$[\sigma_\Sigma]$-Satz ψ an, so dass für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ und die dazugehörige σ_Σ-Struktur $\mathcal{A}_w$ gilt:

$$\mathcal{A}_w \models \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{es gibt ein } v \in \{a,b\}^*, \text{ so dass } w = vcv.$$

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 2: **Diese Aufgabe ist zur Abgabe vorgesehen**

(a) Zeigen Sie, dass für jedes endliche Alphabet Σ und jede Sprache $L \subseteq \Sigma^+$ gilt:
Wenn L MLFP-definierbar ist, dann ist L auch regulär.

(b) Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie:
Jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^+$ ist MLFP-definierbar.

Hinweis: Für einen gegebenen deterministischen endlichen Automaten $\mathfrak{A}$ mit Zustandsmenge $Q := \{0, \ldots, m-1\}$ wollen wir einen MLFP-Satz $\varphi_{\mathfrak{A}}$ angeben, der ausdrückt, dass der Lauf von $\mathfrak{A}$ auf einem Eingabewort w akzeptierend ist. Da es nicht ohne Weiteres möglich ist (im Gegensatz zum Beweis des Satzes von Büchi) jede Position von w mit dem Zustand zu markieren, den $\mathfrak{A}$ an der Position erreicht, müssen wir uns ein anderes Vorgehen überlegen. Wir zerlegen ein Wort w in zusammenhängende Teilwörter der Länge m und ein Suffix der Länge $< m$ (falls $|w|$ nicht durch m teilbar ist). D.h. $w = w_1 \ldots w_\ell w_{\ell+1}$, wobei $\ell := \lfloor \frac{|w|}{m} \rfloor$ und $|w_i| = m$ für alle $i \leqslant \ell$. Wir markieren nun jedes der Teilwörter w_i mit dem Zustand, den $\mathfrak{A}$ auf dem Präfix $w_1 \cdots w_{i-1}$ erreicht. D.h. wir definieren induktiv eine unäre Relation, die für jedes $i \leqslant \ell$ und $q \in Q$ aus dem Teilwort w_i genau dann die q-te Position enthält, wenn $\mathfrak{A}$ bei Eingabe von $w_1 \cdots w_{i-1}$ den Zustand q erreicht. Mit Hilfe dieser Relation kann man nun leicht den gesuchten Satz $\varphi_{\mathfrak{A}}$ konstruieren.

Aufgabe 3:
Sei Σ ein endliches Alphabet. Jeden Σ-Baum t identifizieren wir mit der auf Blatt 2 definierten τ_Σ-Struktur $\mathcal{A}_t$.

(a) Geben Sie eine LFP$[\tau_\Sigma]$-Formel $\varphi_{\text{Ord}}(x, y)$ an, die in jedem Σ-Baum t eine lineare Ordnung definiert (d.h. $[\![\varphi_{\text{Ord}}(x, y)]\!]^{\mathcal{A}_t}$ ist eine lineare Ordnung auf dem Universum von $\mathcal{A}_t$).

(b) Zeigen Sie: LFP beschreibt die Komplexitätsklasse P auf der Klasse alle Σ-Bäume.

Aufgabe 4:
Wir betrachten eine Variante des bekannten *Spiels des Lebens* von J. H. Conway, die auf gerichteten Graphen gespielt wird. Sei E ein zweistelliges und L ein einstelliges Relationssymbol und sei $\sigma := \{E, L\}$. Für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ definieren wir eine Abbildung $F_{\mathcal{A}} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, so dass $F_{\mathcal{A}}(\emptyset) = L^{\mathcal{A}}$ und so dass für jede nicht-leere Menge $M \subseteq A$ und alle $a \in A$ genau dann gilt, dass $a \in F_{\mathcal{A}}(M)$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $a \in M$ und es gibt genau zwei verschiedene $v \in M$ mit $(a, v) \in E^{\mathcal{A}}$.
- Es gibt genau drei verschiedene Knoten $v \in M$, so dass $(a, v) \in E^{\mathcal{A}}$.

Wir sagen, dass $\mathcal{A}$ *ausstirbt*, wenn eine der Induktionsstufen von $F_{\mathcal{A}}$ die leere Menge ist (d.h. es gibt ein $i \geqslant 1$, so dass $F^i_{\mathcal{A}}(\emptyset) = \emptyset$).

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion $F_{\mathcal{A}}$ hat für jede endliche σ-Struktur $\mathcal{A}$ einen Fixpunkt.

(b) Zeigen Sie: Die Klasse aller endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A}$, die aussterben, ist PFP$[\sigma]$-definierbar in der Klasse aller endlichen σ-Strukturen.