Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

30. Juni 2020

Logik und Komplexität

Sommersemester 2020

Übungsblatt 10

Zu bearbeiten bis 7. Juli 2020

Aufgabe 1:

(a) Sei σ eine endliche Signatur und sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Struktur. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ eine vollständige Theorie ist.

(b) Beweisen Sie Lemma 4.39', d.h. beweisen Sie:

Jede vollständige, effektiv axiomatisierbare Theorie ist entscheidbar.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie:

(a) Es gibt Abbildungen, die weder monoton noch inflationär sind.

(b) Es gibt Abbildungen, die monoton, aber nicht inflationär sind.

(c) Es gibt Abbildungen, die inflationär, aber nicht monoton sind.

(d) Es gibt Abbildungen, die keinen Fixpunkt besitzen.

(e) Es gibt Abbildungen, die induktiv, aber weder monoton noch inflationär sind.

Aufgabe 3: **Diese Aufgabe ist zur Abgabe vorgesehen**

Sei $\sigma = \{E\}$.

(a) Welche Klasse gerichteter endlicher Graphen wird von folgendem LFP[σ]-Satz φ definiert?

$$\varphi \ := \ \forall x \ \Big[\mathbf{lfp}_{P,x} \ \forall y \ \Big(P(y) \vee \neg E(y,x)\Big)\Big](x).$$

(b) Geben Sie einen LFP[σ]-Satz an, der von genau denjenigen endlichen ungerichteten Graphen erfüllt wird, die bipartit sind.

Hinweis: Ein ungerichteter Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

(c) Wir erhalten die Logik MLFP („Monadische kleinste Fixpunktlogik“), indem wir in LFP-Formeln die Verwendung von Formeln der Form $[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t}\,)$ auf einstellige Relationen R beschränken. Sei $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Geben Sie eine MLFP[$<$]-Formel $\varphi_m(x)$ an, die in einer endlichen geordneten Struktur besagt, dass der Rang von x ein Vielfaches von m ist.

Aufgabe 4:

Beweisen Sie Proposition 4.15, d.h. zeigen Sie, dass für jede Signatur σ, jede LFP[σ]-Formel $\varphi(R,\vec{x})$, die positiv in R ist, und jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $F_{\varphi,\mathcal{A}}$ ist monoton.