Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

9. Juni 2020

Logik und Komplexität

Sommersemester 2020

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten bis 16. Juni 2020

Aufgabe 1: **Diese Aufgabe ist zur Abgabe vorgesehen**

(a) Für $k, \ell \geqslant 0$ sei $\sigma_{k,\ell}$ die Signatur mit k unären Relationssymbolen $P_1, \ldots, P_k$ und ℓ Konstantensymbolen $c_1, \ldots, c_\ell$. Für jede $\sigma_{k,\ell}$-Struktur $\mathcal{A}$ und jedes $a \in A$ sei $\text{Farbe}^{\mathcal{A}}(a) \subseteq \sigma_{k,\ell}$ definiert als

$$\text{Farbe}^{\mathcal{A}}(a) \ := \ \{P_i \ : \ i \in \{1, \ldots, k\}, \ \ a \in P_i^{\mathcal{A}}\} \ \cup \ \{c_j \ : \ j \in \{1, \ldots, \ell\}, \ \ a = c_j^{\mathcal{A}}\}.$$

Für jede Farbe $F \subseteq \sigma_{k,\ell}$ sei

$$M_F^{\mathcal{A}} \ := \ \{a \in A \ : \ \text{Farbe}^{\mathcal{A}}(a) = F\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $k, \ell, m \geqslant 0$ und alle $\sigma_{k,\ell}$-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gilt:
Wenn für alle Farben $F \subseteq \sigma_{k,\ell}$ gilt, dass

$$|M_F^{\mathcal{A}}| = |M_F^{\mathcal{B}}| \quad \text{oder} \quad |M_F^{\mathcal{A}}|, |M_F^{\mathcal{B}}| \geqslant 2^m,$$

dann hat Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden MSO-Spiel auf $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Der Begriff "m-Runden MSO-Spiel" bezieht sich hier auf die Lösung von Aufgabe 4 auf Blatt 6.

(b) Folgern Sie, dass es für jeden MSO$[\sigma_{k,\ell}]$-Satz einen auf der Klasse aller $\sigma_{k,\ell}$-Strukturen äquivalenten FO$[\sigma_{k,\ell}]$-Satz gibt.

Aufgabe 2:

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse C $\subseteq$ S gilt: [1]

$$\text{C ist FO-definierbar in S} \quad \Rightarrow \quad \text{C ist Hanf-lokal in S.}$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse C $\subseteq$ S:

$$\text{C ist Hanf-lokal in S} \quad \Rightarrow \quad \text{C ist FO-definierbar in S ?}$$

Belegen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder beweisen, dass die Umkehrung gilt, oder indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

[1] Wir sagen "C ist FO definierbar in S", falls es einen FO$[\sigma]$-Satz φ gibt, s.d. f.a. $\mathcal{A} \in$ S gilt: $\mathcal{A} \in$ C $\iff$ $\mathcal{A} \models \varphi$

Aufgabe 3:
Sei $\sigma := \{E\}$.

(a) Gibt es eine EMSO[σ]-Formel $\varphi(x, y)$, so dass für alle ungerichteten endlichen Graphen $G = (V^G, E^G)$, die zugehörige σ-Struktur $\mathcal{A}_G$ und für alle Knoten $a, b \in V^G$ gilt:

$$\mathcal{A}_G \models \varphi[a, b] \quad \iff \quad \text{in } G \text{ gibt es einen Weg von Knoten } a \text{ zu Knoten } b \text{ ?}$$

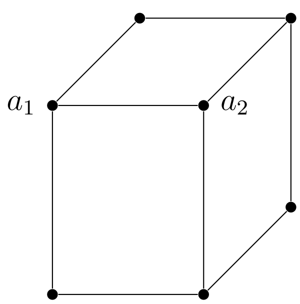
(b) Gibt es einen EMSO[σ]-Satz ψ, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen $G = (V^G, E^G)$ und die zugehörige σ-Struktur $\mathcal{A}_G$ gilt:

$$\mathcal{A}_G \models \psi \quad \iff \quad \text{Jeder Knoten von } G \text{ hat einen geraden Grad ?}$$

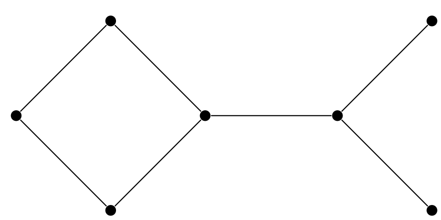
Beweisen Sie, dass Ihre Antworten korrekt sind.

Aufgabe 4:
Betrachten Sie die $\{E\}$-Strukturen $\mathcal{A} := (A, E^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, E^{\mathcal{B}})$, die durch folgende Skizze dargestellt werden, wobei jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten u und v die beiden gerichteten Kanten (u, v) und (v, u) repräsentieren:

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



(a) Finden Sie $b_1, b_2 \in B$, so dass $(a_1, a_2 \mapsto b_1, b_2) \in \text{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(b) Was ist das größte m, so dass es $b_1, b_2 \in B$ mit $(\mathcal{A}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{B}, b_1, b_2)$ gibt ? Belegen Sie Ihre Aussage, indem Sie für Ihre Zahl m geeignete Elemente $b_1, b_2 \in B$ und ein Hin- und Her-System $(I_j)_{j \leqslant m}$: $(\mathcal{A}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{B}, b_1, b_2)$ angeben.

(c) Beweisen Sie, dass ein größeres als das von Ihnen angegebene m nicht möglich ist.