

# Logik und Komplexität

Sommersemester 2020

## Übungsblatt 5

*Zu bearbeiten bis 2. Juni 2020*

### Bemerkung:

Aufgabe 1 von Blatt 5 ergibt zusammen mit Aufgabe 4 von Blatt 4 einen Beweis des Satzes von Grädel („ESO-HORN beschreibt P auf  $\text{FIN}_{<}$ “).

### Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass für jede endliche, funktionenfreie Signatur  $\sigma$ , die das zweistellige Relationssymbol  $<$  enthält, und jede unter Isomorphie abgeschlossene Klasse  $\mathcal{C}$  von endlichen geordneten  $\sigma$ -Strukturen gilt: Falls es eine deterministische Turingmaschine gibt, die bei Eingabe einer endlichen geordneten  $\sigma$ -Struktur  $\mathcal{A}$  (repräsentiert durch  $\text{enc}_{<\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ ) in Polynomialzeit entscheidet, ob  $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ , dann gibt es auch einen ESO-HORN[ $\sigma$ ]-Satz  $\Phi$ , so dass für alle endlichen geordneten  $\sigma$ -Strukturen  $\mathcal{A}$  gilt:  $\mathcal{A} \models \Phi \iff \mathcal{A} \in \mathcal{C}$ .

### Aufgabe 2:

Beweisen Sie die Richtung “ $\implies$ ” von Satz 3.7, d.h. zeigen Sie:

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  endliche lineare Ordnungen, sei  $k := 2$ , und sei  $\bar{a} := a_1, a_2$  und  $\bar{b} := b_1, b_2$ , wobei  $a_1, b_1$  die kleinsten und  $a_2, b_2$  die größten Elemente in  $A$  und  $B$  bezüglich  $\leq^{\mathcal{A}}$  und  $\leq^{\mathcal{B}}$  sind.

Falls  $|A| < |B|$  und  $|A| \leq 2^m$ , so hat *Spoiler* eine Gewinnstrategie im  $m$ -Runden EF-Spiel auf  $(\mathcal{A}, \bar{a})$  und  $(\mathcal{B}, \bar{b})$ .

### Aufgabe 3:

**Diese Aufgabe ist zur Abgabe vorgesehen**

Beweisen Sie Korollar 3.16(b), d.h. zeigen Sie:

Für jede endliche relationale Signatur  $\sigma$  und alle  $k, m \in \mathbb{N}$  gilt:

Bis auf logische Äquivalenz gibt es nur endlich viele verschiedene FO[ $\sigma$ ]-Formeln mit  $\leq k$  freien Variablen und Quantortiefe  $\leq m$ .

Geben Sie eine möglichst kleine obere Schranke  $f(\sigma, k, m)$  für die Anzahl der verschiedenen, paarweise nicht äquivalenten Formeln an.

#### Aufgabe 4:

- (a) Sei  $\sigma$  eine relationale Signatur, seien  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  zwei disjunkte  $\sigma$ -Strukturen und seien  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  zwei disjunkte  $\sigma$ -Strukturen. Beweisen Sie Lemma 3.18, d.h. zeigen Sie, dass für jedes  $m \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\mathcal{A}_1 \approx_m \mathcal{B}_1 \text{ und } \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_2 \implies \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2.$$

- (b) Arbeiten Sie die Details zu Beispiel 3.19 aus, d.h.:

Die Signatur  $\sigma := \{R, B\}$  bestehe aus zwei einstelligen Relationssymbolen  $R$  (für „rote Knoten“) und  $B$  (für „blaue Knoten“). Für  $k, \ell \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{A}_{k,\ell}$  eine  $\sigma$ -Struktur, die aus  $k$  roten und  $\ell$  blauen Knoten besteht, d.h.  $\mathcal{A}_{k,\ell}$  ist die disjunkte Vereinigung der  $k$ -elementigen Menge  $R^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$  und der  $\ell$ -elementigen Menge  $B^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$ . Zeigen Sie, dass für alle Zahlen  $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2 \in \mathbb{N}$  und alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\left. \begin{array}{l} (k_1 = k_2 \text{ oder } k_1, k_2 \geq m) \\ \text{und} \\ (\ell_1 = \ell_2 \text{ oder } \ell_1, \ell_2 \geq m) \end{array} \right\} \iff \mathcal{A}_{k_1, \ell_1} \approx_m \mathcal{A}_{k_2, \ell_2}.$$