Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

19. Mai 2020

Logik und Komplexität

Sommersemester 2020

Übungsblatt 4

Zu bearbeiten bis 26. Mai 2020

Bemerkung: In Aufgabe 3 von Übungsblatt 3 und Aufgabe 1 von diesem Übungsblatt wird der Satz von Doner (1970) und Thatcher und Wright (1968) gezeigt, der Folgendes besagt:

> Sei Σ ein endliches, nicht-leeres Alphabet und sei $L \subseteq T_\Sigma$ eine Baumsprache.
> Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
>
> **(a)** L ist regulär.
>
> **(b)** L ist EMSO-definierbar.
>
> **(c)** L ist MSO-definierbar.

Aufgabe 1: **Diese Aufgabe ist zur Abgabe vorgesehen**

Sei Σ ein endliches, nicht-leeres Alphabet.
Zeigen Sie: Jede MSO-definierbare Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ ist regulär.

Aufgabe 2:

Diese Aufgabe bezieht sich auf den Begriff der Σ-*Bäume*, die auf Blatt 1 eingeführt wurden. Die *Höhe* eines Σ-Baumes ist die maximale Höhe seiner Blätter, d.h. die maximale Anzahl von Kanten auf einem gerichteten Pfad von der Wurzel zu einem Blatt.

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $L \subseteq T_\Sigma$ die Baumsprache, die aus allen Σ-Bäumen *gerader* Höhe besteht.

Zeigen Sie, dass L nicht MSO-definierbar ist.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 3:

Sei σ eine Signatur. Im Beweis von Theorem 2.24 wird gezeigt, wie man zu einem ESO[σ]-Satz Φ und einer endlichen σ-Struktur $\mathfrak{A}$ eine aussagenlogische Formel $\alpha_{\Phi,\mathfrak{A}}$ konstruiert, für die gilt:

$$\mathfrak{A} \models \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_{\Phi,\mathfrak{A}} \text{ hat eine erfüllende Belegung.}$$

(a) Konstruieren Sie $\alpha_{\Phi,\mathfrak{A}}$ für den ESO[$\{E\}$]-Satz

$$\Phi := \exists X \Big(\exists x X(x) \ \wedge \ \exists y \neg X(y) \ \wedge \ \forall u \forall v \big((X(u) \ \wedge \ \neg X(v)) \ \rightarrow \ (\neg E(u,v) \ \wedge \ \neg E(v,u)) \big) \Big)$$

und die $\{E\}$-Struktur

$$\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}}) \quad \text{mit} \quad A = \{1,2,3\} \quad \text{und} \quad E^{\mathfrak{A}} = \{(1,2),(3,3)\}.$$

(b) Hat die im Teil **(a)** konstruierte Formel $\alpha_{\Phi,\mathfrak{A}}$ eine erfüllende Belegung? Falls ja, geben Sie eine solche Belegung an; falls nein, begründen Sie, warum es keine solche Belegung gibt.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass das Problem $\text{Eval}_{\text{FIN}_<}(\Phi)$ für jeden ESO-HORN-Satz Φ in P liegt, d.h. es gibt einen deterministischen Algorithmus, der bei Eingabe einer endlichen Struktur $\mathcal{A}$ in Polynomialzeit entscheidet, ob $\mathcal{A} \models \Phi$.

Zur Einnerung: In der Vorlesung *Logik in der Informatik* wurde gezeigt, dass das Problem

HORN-SAT	
Eingabe:	Eine Konjunktion α von aussagenlogischen Horn-Klauseln.
Frage:	Ist α erfüllbar?

unter Verwendung des Streichungsalgorithmus deterministisch in Polynomialzeit gelöst werden kann.