Einführung in die formale Logik für IMP

Vorlesung im Sommersemester

Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Lehrstuhl Logik in der Informatik
Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

Große Teile dieses Skripts basieren auf dem Skript zur Vorlesung „Logik in der Informatik“ von Prof. Dr. Nicole Schweikardt, HU Berlin

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Von der Bibel bis zu den Simpsons

Folie 1

Logik

- altgriechisch „logos“: Vernunft
- die Lehre des vernünftigen Schlussfolgerns
- Teilgebiet u.a. der Disziplinen Philosophie, Mathematik, Informatik und Linguistik
- zentrale Frage:

  Wie kann man Aussagen miteinander verknüpfen, und auf welche Weise kann man formal Schlüsse ziehen und Beweise durchführen?

Folie 2

Das Lügnerparadoxon von Epimenides

Brief des Paulus an Titus 1:12-13:

> *Es hat einer von ihnen gesagt, ihr eigener Prophet:*
> *Die Kreter sind immer Lügner, böse Tiere und faule Bäuche.*

Angenommen, die Aussage des Propheten ist wahr.

Da der Prophet selbst Kreter ist, lügt er also immer (und ist ein böses Tier und ein fauler Bauch). Dann hat er aber insbesondere in dem Satz *„Die Kreter sind immer Lügner, böse Tiere und faule Bäuche“* gelogen. D.h. die Aussage des Propheten ist *nicht* wahr.

Dies ist ein Widerspruch!

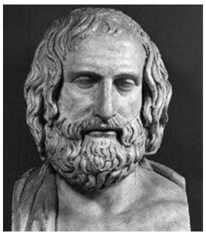
Angenommen, die Aussage des Propheten ist falsch.

Dann gibt es Kreter, die nicht immer Lügner, böse Tiere und faule Bäuche sind. Dies stellt keinen Widerspruch dar.

Insgesamt wissen wir also, dass der Prophet in seiner obigen Aussage nicht die Wahrheit gesagt hat.

Folie 3

Protagoras und sein Student Euthalus vor Gericht



Protagoras (490 – 420 v.Chr.)

Quelle: http://www.greatthoughtstreasury.com/author/protagoras

Euthalus studierte die Kunst der Argumentation beim Meister Protagoras, um Anwalt zu werden.
Er vereinbart mit Protagoras, die Gebühren für den Unterricht zu bezahlen, sobald er seinen ersten Prozess gewonnen hat.

Aber dann zögert Euthalus seine Anwaltstätigkeit immer weiter hinaus, und schließlich beschließt Protagoras, seine Gebühren einzuklagen.
Euthalus verteidigt sich selbst …

Folie 4

Protagoras denkt:

Wenn ich den Prozess gewinne, muss Euthalus gemäß Gerichtsbeschluss zahlen.
Wenn ich den Prozess verliere, muss Euthalus gemäß unserer Vereinbarung zahlen, da er dann seinen ersten Prozess gewonnen hat.

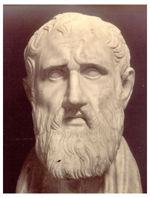
Euthalus denkt:

Wenn ich den Prozess gewinne, muss ich gemäß Gerichtsbeschluss nicht zahlen.
Wenn ich den Prozess verliere, muss ich gemäß unserer Vereinbarung nicht zahlen.

Folie 5

Achilles und die Schildkröte

Achilles und die Schildkröte laufen ein Wettrennen. Achilles gewährt der Schildkröte einen Vorsprung. Zenon behauptet, dass Achilles die Schildkröte niemals einholen kann.



Zenon von Elea (490 – 425 v.Chr.) *Quelle:* http://aefucr.blogspot.de/2008/04/resolucin-de-la-paradoja-de-zenn-de.html

Zenons Begründung: Zu dem Zeitpunkt, an dem Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht, ist die Schildkröte schon ein Stück weiter. Etwas später erreicht Achilles diesen Punkt, aber die Schildkröte ist schon etwas weiter. Wenn Achilles diesen Punkt erreicht, ist die Schildkröte wieder etwas weiter. So kann Achilles zwar immer näher an die Schildkröte herankommen, sie aber niemals einholen.

Folie 6

Auflösung durch die Infinitesimalrechnung:

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716)
und Isaac Newton (1643 – 1727)
Quelle: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Leibniz.html
und *Quelle:* http://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

Bemerkung. Aristoteles Auflösung dieses Paradoxons besteht darin, zu postulieren, dass man Strecken nicht unendlich Teilen kann. Aber auch ohne diese Annahme kann man das Paradoxon leicht mit Hilfe der Infinitesimalrechnung auflösen, denn die immer kürzer werdenden Strecken können insgesamt in beschränkter Zeit zurückgelegt werden.
Leibniz und Newton waren die Begründer der Infinitesimalrechnung.

Folie 7

Der Barbier von Sonnenthal

> *Im Städtchen Sonnenthal (in dem bekanntlich viele seltsame Dinge passieren) wohnt ein Barbier, der genau diejenigen männlichen Einwohner von Sonnenthal rasiert, die sich nicht selbst rasieren.*
>
> *Frage: Rasiert der Barbier sich selbst?*

Angenommen, der Barbier rasiert sich selbst.
Da er ein männlicher Einwohner von Sonnenthal ist, der sich selbst rasiert, wird er *nicht* vom Barbier rasiert. Aber er selbst ist der Barbier. Dies ist ein Widerspruch!

Angenommen, der Barbier rasiert sich <u>nicht</u> selbst.
Da er in Sonnenthal wohnt und dort alle Einwohner rasiert, die sich nicht selbst rasieren, muss er sich rasieren. Dies ist ein Widerspruch!

Die Anfänge der formalen Logik

Folie 8

Aristoteles' Syllogismen

Die folgende Schlussweise ist *aus rein formalen Gründen* korrekt.

Annahme 1:	<u>Alle</u> Menschen <u>sind</u> sterblich.
Annahme 2:	Sokrates <u>ist ein</u> Mensch.
Folgerung:	<u>Also ist</u> Sokrates sterblich.

Diese Art von Schluss und eine Reihe verwandter Schlussweisen nennt man *Syllogismen*.

Annahme 1:	Alle A sind B.
Annahme 2:	C ist ein A.
Folgerung:	Also ist C B.

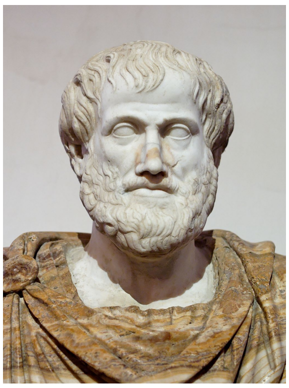
Folie 9

Beispiele

Annahme 1:	Alle Borg sind assimiliert worden.
Annahme 2:	Seven of Nine ist eine Borg.
Folgerung:	Also ist Seven of Nine assimiliert worden.

Annahme 1:	Alle Substitutionschiffren sind anfällig gegen Brute-Force-Angriffe.
Annahme 2:	Der Julius-Cäsar-Chiffre ist ein Substitutionschiffre.
Folgerung:	Also ist der Julius-Cäsar-Chiffre anfällig gegen Brute-Force-Angriffe.

Folie 10



Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Aristoteles

Folie 11

Ein komplizierterer formaler Schluss

Annahme 1:	Es gibt keine Schweine, die fliegen können.
Annahme 2:	Alle Schweine sind gefräßige Tiere.
Annahme 3:	Es gibt Schweine.
Folgerung:	Also gibt es gefräßige Tiere, die nicht fliegen können.

Die Form des Schlusses ist:

Annahme 1:	Es gibt keine A, die B (sind).
Annahme 2:	Alle A sind C.
Annahme 3:	Es gibt A.
Folgerung:	Also gibt es C, die nicht B (sind).

Folie 12

Charles Lutwidge Dodgson a.k.a. Lewis Carroll (1838 – 1898)
Quelle: http://en.wikiquote.org/wiki/Lewis_Carroll

“Contrariwise,” continued Tweedledee, “if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn’t, it ain’t. That’s logic.”

aus: *Alice in Wonderland*

Folie 13

Nicht jeder formale Schluss ist korrekt

Annahme 1:	Es gibt Vögel, die fliegen können.
Annahme 2:	Es gibt keine fliegenden (Tiere), die Klavier spielen können.
Folgerung:	Also gibt es keine Vögel, die Klavier spielen können.

Kein korrekter Schluss, auch wenn in diesem Fall die Folgerung wahr ist.
Der folgende, offensichtlich falsche, Schluss hat dieselbe Form:

Annahme 1:	Es gibt Menschen, die stumm sind.
Annahme 2:	Es gibt keine stummen (Lebewesen), die sprechen können.
Folgerung:	Also gibt es keine Menschen, die sprechen können.

Folie 14

Aber wie merkt man es?

Man kann einen falschen Schluss entlarven, indem man einen formal gleichen Schluss findet, der klar falsch ist.

Annahme 1:	Erbeeren schmecken gut.
Annahme 2:	Schlagsahne schmeckt gut.
Folgerung:	Also schmecken Erdbeeren mit Schlagsahne gut.

Aber:

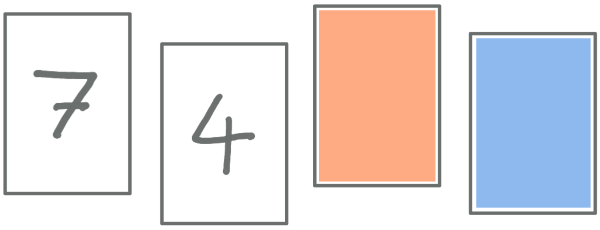
Annahme 1:	Pizza schmeckt gut.
Annahme 2:	Schlagsahne schmeckt gut.
Folgerung:	Also schmeckt Pizza mit Schlagsahne gut.

Folie 15

Wasons Auswahlaufgabe (Wason's selection task)[1]

Uns stehen vier Karten der folgenden Art zur Verfügung:
Auf jeder Karte steht auf der Vorderseite eine Ziffer zwischen 0 und 9. Die Rückseite jeder Karte ist komplett rot oder komplett blau.
Wir sehen Folgendes:

[1] benannt nach Peter Cathcart Wason (1924–2003, Kognitiver Psychologe, London); in Wasons ursprünglicher Version der Auswahlaufgabe handelt es sich um Karten, deren Vorderseiten Buchstaben und deren Rückseiten Ziffern enthalten, und die Hypothese ist „Wenn auf der Vorderseite der Karte ein Vokal steht, dann steht auf der Rückseite eine gerade Zahl“



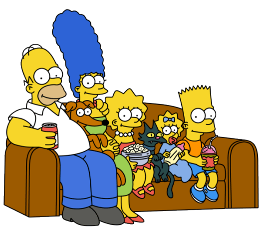
Jemand hat folgende **Hypothese** aufgestellt:

> *Wenn auf der Vorderseite eine gerade Zahl steht,*
> *dann ist die Rückseite rot.*

Welche Karte(n) müssen Sie umdrehen, um zu überprüfen, ob die Hypothese stimmt?

Folie 16

Und was sagen die Simpsons?



Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Simpson_family

Homer:	Not a bear in sight. The Bear Patrol must be working like a charm.
Lisa:	That's specious reasoning, Dad.
Homer:	Thank you, dear.
Lisa:	By your logic I could claim that this rock keeps tigers away.
Homer:	Oh, how does it work?
Lisa:	It doesn't work.
Homer:	Uh-huh.
Lisa:	It's just a stupid rock.
Homer:	Uh-huh.
Lisa:	But I don't see any tigers around, do you? *(Pause)*
Homer:	Lisa, I want to buy your rock.

[Lisa refuses at first, then takes the exchange]

1.2 Logik in der Informatik

Folie 17

Die Rolle der Logik in der Informatik

Halpern, Harper, Immerman, Kolaitis, Vardi, Vianu (2001):

Concepts and methods of logic occupy a central place in computer science, insomuch that logic has been called "the calculus of computer science".

aus: *On the unusual effectiveness of logic in computer science*, Bulletin of Symbolic Logic 7(2): 213-236 (2001)

Folie 18

Anwendungsbereiche der Logik in der Informatik

- Repräsentation von Wissen (z.B. im Bereich der künstlichen Intelligenz) *[siehe Kapitel 2 und 3]*
- Grundlage für Datenbank-Anfragesprachen *[siehe Kapitel 3]*
- Bestandteil von Programmiersprachen (z.B. um Bedingungen in IF-Anweisungen zu formulieren) *[siehe Kapitel 2]*
- automatische Generierung von Beweisen (so genannte *Theorembeweiser*) *[siehe Kapitel 4]*
- Verifikation von
  - Schaltkreisen (*Ziel:* beweise, dass ein Schaltkreis bzw. Chip „richtig“ funktioniert)
  - Programmen (*Ziel:* beweise, dass ein Programm gewisse wünschenswerte Eigenschaften hat)
  - Protokollen (*Ziel:* beweise, dass die Kommunikation zwischen zwei „Agenten“, die nach einem gewissen Protokoll abläuft, „sicher“ ist — etwa gegen Abhören oder Manipulation durch dritte; Anwendungsbeispiel: Internet-Banking)
- Logik-Programmierung *[siehe folgende Folien]*

Kurze Einführung in die Logik-Programmierung

Folie 19

„Was“ statt „Wie“ am Beispiel von Tiramisu

Tiramisu — Deklarativ
Aus Eigelb, Mascarpone und in Likör und Kaffee getränkten Biskuits hergestellte cremige Süßspeise

(aus: DUDEN, Fremdwörterbuch, 6. Auflage)

Tiramisu — Imperativ
1/4 l Milch mit 2 EL Kakao und 2 EL Zucker aufkochen. 1/4 l starken Kaffee und 4 EL Amaretto dazugeben.

5 Eigelb mit 75 g Zucker weißschaumig rühren, dann 500 g Mascarpone dazumischen.

ca 200 g Löffelbiskuit.

Eine Lage Löffelbiskuit in eine Auflaufform legen, mit der Flüssigkeit tränken und mit der Creme überziehen. Dann wieder Löffelbiskuit darauflegen, mit der restlichen Flüssigkeit tränken und mit der restlichen Creme überziehen.

Über Nacht im Kühlschrank durchziehen lassen und vor dem Servieren mit Kakao bestäuben.

(aus: Gisela Schweikardt, handschriftliche Kochrezepte)

Folie 20

Der große Traum der Informatik

Imperative Vorgehensweise:
Beschreibung, wie das gewünschte Ergebnis erzeugt wird .... *„Wie“*

Deklarative Vorgehensweise:
Beschreibung der Eigenschaften des gewünschten Ergebnisses .... *„Was“*

Traum der Informatik:
Möglichst wenig „wie“, möglichst viel „was“

D.h.: Automatische Generierung eines Ergebnisses aus seiner Spezifikation

Realität:
Datenbanken: Deklarative Anfragesprache ist Industriestandard (SQL)

Software-Entwicklung: Generierungs-Tools

Programmiersprachen: Logik-Programmierung, insbes. Prolog
ABER: Imperativer Ansatz überwiegt in der Praxis

Folie 21

Logik-Programmierung

- *Logik-Programmierung* bezeichnet die Idee, Logik direkt als Programmiersprache zu verwenden.
- *Logik-Programmierung* (in Sprachen wie *Prolog*) und die verwandte *funktionale Programmierung* (in Sprachen wie *LISP*, *ML*, *Haskell*) sind *deklarativ*,
  im Gegensatz zur *imperativen Programmierung* (in Sprachen wie *Java*, *C*, *Perl*).
- Die Idee der deklarativen Programmierung besteht darin, dem Computer lediglich sein *Wissen* über das Anwendungsszenario und sein *Ziel* mitzuteilen und dann die Lösung des Problems dem Computer zu überlassen.

  Bei der imperativen Programmierung hingegen gibt man dem Computer die einzelnen Schritte zur Lösung des Problems vor.

Folie 22

Prolog

- *Prolog*
  - ist die wichtigste logische Programmiersprache,
  - geht zurück auf Kowalski und Colmerauer (Anfang der 1970er Jahre, Marseilles),
  - steht für (franz.) *Programmation en logique.*
  - Mitte/Ende der 1970er Jahre: effiziente Prolog-Implementierung durch den von Warren (in Edinburgh) entwickelten Prolog-10 Compiler.
- Aus Effizienzgründen werden in Prolog die abstrakten Ideen der logischen Programmierung nicht in Reinform umgesetzt, Prolog hat auch „nichtlogische“ Elemente.

- Prolog ist eine voll entwickelte und mächtige Programmiersprache, die vor allem für *symbolische Berechnungsprobleme* geeignet ist.

Folie 23

Anwendungen

Die wichtigsten Anwendungsgebiete sind die *künstliche Intelligenz* und die *Computerlinguistik*.

Beispiele. Das Interface für natürliche Sprache

- in der *International Space Station* wurde von der NASA
- beim IBM Watson System, das in 2011 die *Jeopardy! Man vs. Machine Challenge* gewonnen hat, wurde

in Prolog implementiert.

Mehr Informationen dazu finden sich z.B. unter
`https://sicstus.sics.se/customers.html` und
`http://www.cs.nmsu.edu/ALP/2011/03/natural-language-processing-with-prolog-in-the-ibm-watson-system/`

Folie 24

In der Veranstaltung *Einführung in die formale Logik für IMP*

... werden keine Details zur Programmiersprache Prolog oder dem allgemeinen Konzept der Logik-Programmierung behandelt.

Für alle, die sich diese Themen interessehalber im Selbststudium erarbeiten wollen, wird die folgende Literatur empfohlen:

- Kapitel 5 des Vorlesungsskripts [Sch18] und die im Übungsbetrieb der Veranstaltung *Logik in der Informatik* behandelten Übungsaufgaben zu den Themen *Prolog* und *Logik-Programmierung*,
- das Buch *Learn Prolog Now!* [BBS06], das einen guten Einstieg in die Programmiersprache Prolog bietet und
- das Buch *The Art of PROLOG* [SS94], das neben Details zur Programmiersprache Prolog auch eine Einführung in allgemeine Konzepte der Logik-Programmierung gibt.

1.3 Lernziele, Semesterausblick und Literatur

Folie 25

Lern- und Qualifikationsziele

Aus der Modulbeschreibung:

> Studierende erlangen die Fähigkeit, Sachverhalte in geeigneten formalen Systemen zu formalisieren und die grundlegenden Begriffe und Ergebnisse der mathematischen Logik zu verstehen und anzuwenden.

Und was sagt Goethe dazu?

Mein teurer Freund, ich rat Euch drum
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn,
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,
Irrlichteliere hin und her.

Mephistopheles in *Faust*

Folie 26

Semesterüberblick

1. Einleitung *(dieses Kapitel)*
2. Aussagenlogik
   Syntax und Semantik, Normalformen, Modellierung, Resolution, Erfüllbarkeitsalgorithmen
3. Logik erster Stufe
   Syntax und Semantik, Normalformen, Modellierung, Nichtausdrückbarkeit
4. Grundlagen des automatischen Schließens
   Sequenzenkalkül, Vollständigkeits- und Endlichkeitssatz, Grenzen der Berechenbarkeit, automatische Theorembeweiser

Folie 27

Literaturempfehlungen

Folgende Schriften werden zur Vertiefung des Vorlesungsstoffes empfohlen:

1. dieses Vorlesungsskript zur Veranstaltung *Einführung in die formale Logik für IMP*
2. das Lehrbuch [EFT07]
3. die Lehrbücher [Sch00, Bur98, KK06]

Als Ergänzung seien auch folgende Lehrbücher genannt:

- [Ebb03] (Einführung in die Mengenlehre)
- [Lib04, FG98] (Bücher zum Thema Logik und Komplexität)
- [Cam98, vD04, HR04] (weiterführende Literatur im Bereich Logik und automatisches Schließen)

Auflösung zu Wasons Auswahlaufgabe:
Die Karte mit der „4“ und die blaue Karte müssen umgedreht werden.
Begründung:

- Falls die Rückseite der Karte mit der „4“ *nicht* rot ist, so haben wir ein Gegenbeispiel zur Hypothese gefunden und damit die Hypothese widerlegt.
- Falls die Vorderseite der blauen Karte eine gerade Zahl enthält, haben wir ein Gegenbeispiel zur Hypothese gefunden und damit die Hypothese widerlegt.
- Die Karte mit der „7“ brauchen wir nicht umzudrehen, da die Hypothese keine Aussage über die Rückseite von Karten mit ungeraden Ziffern macht.
- Die rote Karte brauchen wir nicht umzudrehen, da die Hypothese keine Aussage über die Vorderseite von Karten mit roter Rückseite macht.

Kapitel 2

Aussagenlogik

2.1 Syntax und Semantik

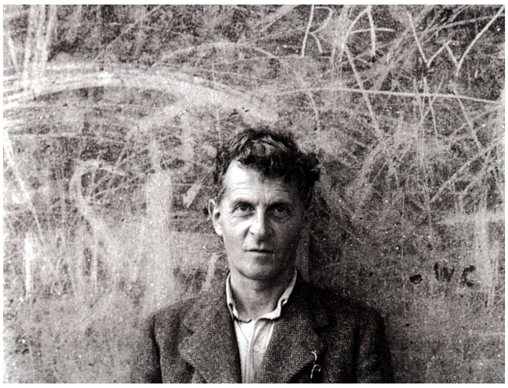
Folie 28

Aussagen

Die Frage „Was ist eigentlich ein Wort?“ ist analog der „Was ist eine Schachfigur?“ Ludwig Wittgenstein, *Philosophische Untersuchungen*

- *Aussagen* (im Sinne der Aussagenlogik) sind sprachliche Gebilde, die entweder *wahr* oder *falsch* sind.
- Aussagen können mit *Junktoren* wie *nicht*, *und*, *oder* oder *wenn* … *dann* zu komplexeren Aussagen verknüpft werden.
- *Aussagenlogik* beschäftigt sich mit allgemeinen Prinzipien des korrekten Argumentierens und Schließens mit Aussagen und Kombinationen von Aussagen.

Folie 29



Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951)
Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Wittgenstein

Folie 30

Beispiel 2.1 (Geburtstagsfeier)**.**
Fred möchte mit möglichst vielen seiner Freunde Anne, Bernd, Christine, Dirk und Eva seinen Geburtstag feiern. Er weiß Folgendes:
Wenn Bernd und Anne beide zur Party kommen, dann wird Eva auf keinen Fall kommen. Und Dirk wird auf keinen Fall kommen, wenn Bernd und Eva beide zur Feier kommen. Aber Eva kommt allenfalls dann, wenn Christine und Dirk kommen. Andererseits kommt Christine nur dann, wenn auch Anne kommt. Anne wiederum wird nur dann kommen, wenn auch Bernd oder Christine dabei sind.

Frage: Wie viele Freunde (und welche) werden im besten Fall zur Party kommen?

Folie 31

Das Wissen, das in dem Text wiedergegeben ist, lässt sich in *„atomare Aussagen“* zerlegen, die mit Junktoren verknüpft werden können.
Die atomaren Aussagen, um die sich der Text dreht, kürzen wir folgendermaßen ab:

$$\begin{array}{lcl} A & : & \text{Anne kommt zur Feier} \\ B & : & \text{Bernd kommt zur Feier} \\ C & : & \text{Christine kommt zur Feier} \\ D & : & \text{Dirk kommt zur Feier} \\ E & : & \text{Eva kommt zur Feier} \end{array}$$

Das im Text zusammengefasste Wissen lässt sich wie folgt repräsentieren.

Folie 32

(1) Wenn Bernd und Anne beide zur Party kommen, dann wird Eva auf keinen Fall kommen.
kurz: Wenn (B und A), dann nicht E *kürzer:* $(B \wedge A) \to \neg E$

(2) Dirk wird auf keinen Fall kommen, wenn Bernd und Eva beide zur Feier kommen.
kurz: Wenn (B und E), dann nicht D *kürzer:* $(B \wedge E) \to \neg D$

(3) Eva kommt allenfalls dann, wenn Christine und Dirk kommen.
kurz: Wenn E, dann (C und D) *kürzer:* $E \to (C \wedge D)$

(4) Christine kommt nur dann, wenn auch Anne kommt.
kurz: Wenn C, dann A *kürzer:* $C \to A$

(5) Anne kommt nur dann, wenn auch Bernd oder Christine dabei sind.
kurz: Wenn A, dann (B oder C) *kürzer:* $A \to (B \vee C)$

Folie 33

Fallstricke natürlichsprachlicher Aussagen

Die Verwendung der Wörter *und*, *wenn ... dann*, *oder*, *nicht* in der Alltagssprache entspricht nicht immer exakt unseren logischen Junktoren.

(1) Anne hat mit dem Kaffeetrinken aufgehört.
kurz: V und nicht G *kürzer:* $V \wedge \neg G$

(2) Anne hat *nicht* mit dem Kaffeetrinken aufgehört.
kurz: V und G *kürzer:* $V \wedge G$

Ist (2) die Negation von (1)? In dem Fall, dass Anne noch nie Kaffee getrunken hat, ist keine der beiden Aussagen wahr.

V : Anne war in der Vergangenheit Kaffeetrinkerin.
G : Anne ist zur Zeit Kaffeetrinkerin.

Zwei weitere Beispiele:

- Ich werde mir ein rotes *oder* ein blaues Fahrrad kaufen.
- *Wenn* Regen vorhergesagt ist, *dann* nehme ich einen Schirm mit.

Folie 34

Syntax und Semantik

Syntax: legt fest, welche Zeichenketten Formeln der Aussagenlogik sind

Semantik: legt fest, welche „Bedeutung“ einzelne Formeln haben

Dies ist analog zur Syntax und Semantik von Java-Programmen:

Die Syntax legt fest, welche Zeichenketten Java-Programme sind, während die Semantik bestimmt, was das Programm tut.

Zur Verdeutlichung werden wir im Folgenden syntaktische Objekte oft in orange darstellen, während wir semantische Aussagen in grün angeben.

Syntax der Aussagenlogik

Folie 35

Notationen

- Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen besteht aus allen nicht-negativen ganzen Zahlen, d.h.

$$\mathbb{N} \ := \ \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \}.$$

- Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist

$$[n] \ := \ \{1, \ldots, n\} \ = \ \{\ i \in \mathbb{N} \ : \ 1 \leqslant i \leqslant n\ \}.$$

Folie 36

Definition 2.2. Ein *Aussagensymbol* (oder eine *Aussagenvariable*, kurz: *Variable*) hat die Form A_i für ein $i \in \mathbb{N}$.
Die Menge aller Aussagensymbole bezeichnen wir mit AS, d.h.

$$\mathsf{AS} \ = \ \{A_i \ : \ i \in \mathbb{N}\} \ = \ \{A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ \}$$

Aussagenlogische Formeln sind Wörter, die über dem folgenden Alphabet gebildet sind.

Definition 2.3. Das *Alphabet der Aussagenlogik* besteht aus

- den Aussagesymbolen in AS,

- den *Junktoren* $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$,
- den *booleschen Konstanten* **0**, **1**,
- den Klammersymbolen (,).

Wir schreiben A_{AL}, um das Alphabet der Aussagenlogik zu bezeichnen, d.h.

$$A_{\mathsf{AL}} \quad := \quad \mathsf{AS} \cup \{\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ (,\ )\ \ \}$$

Bemerkung. Wir haben hier festgelegt, dass es abzählbar unendlich viele Aussagensymbole gibt.

Zur Erinnerung:
Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie unendlich ist und ihre Elemente sich in der Form $m_0, m_1, m_2, \ldots$ aufzählen lassen. Formal heißt M genau dann *abzählbar unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung von der Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen auf die Menge M gibt. Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn sie entweder endlich oder abzählbar unendlich ist. Eine Menge M heißt *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

Beispiele.

- Die Menge $\mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich.
- Ist A eine abzählbare Menge, so ist die Menge A^* aller endlichen Wörter über dem Alphabet A abzählbar. Ist etwa $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, so können wir eine Aufzählung von A^* wie folgt beginnen:

$$\begin{gathered}
\varepsilon \quad \text{(das leere Wort)} \\
a_0, \\
a_1, a_0a_0, a_0a_1, a_1a_0, a_1a_1, \\
a_2, a_0a_2, a_2a_0, a_1a_2, a_2a_1, a_2a_2, a_0a_0a_0, a_0a_0a_1, a_0a_0a_2, \ldots, a_2a_2a_2 \\
a_3, a_0a_3, \ldots, a_3a_3a_3a_3, \\
\ldots
\end{gathered}$$

- Die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen ist überabzählbar.
- Ist M eine unendliche Menge, so ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M) := 2^M := \{N \mid N \subseteq M\}$ von M überabzählbar.

Bemerkung. Wir könnten die Aussagenlogik genausogut auf einer überabzählbaren Menge von Aussagensymbolen aufbauen. Alles würde genauso funktionieren, nur der Beweis des Kompaktheitssatzes (siehe Abschnitt 2.5) würde komplizierter werden. Für die Anwendungen in der Informatik reicht allerdings eine abzählbar unendliche Menge.

Folie 37

Definition 2.4 (Syntax der Aussagenlogik)**.**
Die Menge AL der *aussagenlogischen Formeln* (kurz: *Formeln*) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von A_{AL}^*:

Basisregeln: (zum Bilden der so genannten *atomaren Formeln*)

(B0) $\mathbf{0} \in \mathsf{AL}$

(B1) $\mathbf{1} \in \mathsf{AL}$

(BS) Für jedes Aussagensymbol $A_i \in \mathsf{AS}$ gilt: $A_i \in \mathsf{AL}$

Rekursive Regeln:

(R1) Ist $\varphi \in \mathsf{AL}$, so ist auch $\neg\varphi \in \mathsf{AL}$ *(Negation)*

(R2) Ist $\varphi \in \mathsf{AL}$ und $\psi \in \mathsf{AL}$, so ist auch

- $(\varphi \wedge \psi) \in \mathsf{AL}$ *(Konjunktion)*
- $(\varphi \vee \psi) \in \mathsf{AL}$ *(Disjunktion)*
- $(\varphi \to \psi) \in \mathsf{AL}$ *(Implikation)*

Folie 38

Beispiele

- $(\neg A_0 \vee (A_0 \to A_1)) \quad \in \mathsf{AL}$
- $\neg((A_0 \wedge \mathbf{0}) \to \neg A_3) \quad \in \mathsf{AL}$
- $A_1 \vee A_2 \wedge A_3 \quad \notin \mathsf{AL}$
- $(\neg A_1) \quad \notin \mathsf{AL}$

Folie 39

Griechische Buchstaben

In der Literatur werden Formeln einer Logik traditionell meistens mit griechischen Buchstaben bezeichnet.

Hier eine Liste der gebräuchlichsten Buchstaben:

Buchstabe	φ	ψ	χ	θ bzw. ϑ	λ	μ	ν	τ	κ
Aussprache	phi	psi	chi	theta	lambda	mü	nü	tau	kappa

Buchstabe	σ	ρ	ξ	ζ	α	β	γ	δ	ω
Aussprache	sigma	rho	xi	zeta	alpha	beta	gamma	delta	omega

Buchstabe	ε	ι	π	Δ	Γ	Σ	Π	Φ
Aussprache	epsilon	iota	pi	Delta	Gamma	Sigma	Pi	Phi

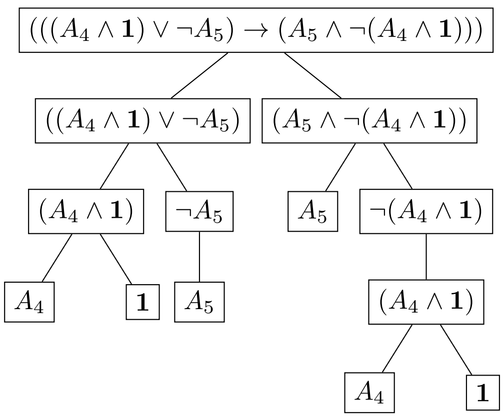
Folie 40

Syntaxbäume

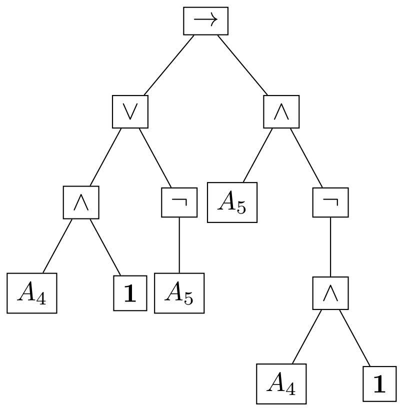
Die Struktur einer Formel lässt sich bequem in einem *Syntaxbaum* (englisch: *parse tree*) darstellen.

Beispiel: Syntaxbaum der Formel $(((A_4 \wedge \mathbf{1}) \vee \neg A_5) \rightarrow (A_5 \wedge \neg(A_4 \wedge \mathbf{1})))$

Ausführlich:



Kurzform:



Folie 41

Subformeln und eindeutige Lesbarkeit

- Jede Formel hat genau einen Syntaxbaum. Diese Aussage ist als das *Lemma über die eindeutige Lesbarkeit aussagenlogischer Formeln* bekannt.

- Die Formeln ψ, die im ausführlichen Syntaxbaum einer Formel φ als Knotenbeschriftung vorkommen, nennen wir *Subformeln* (bzw. *Teilformeln*) von φ.
- Eine Subformel ψ von φ kann an mehreren Knoten des Syntaxbaums vorkommen. Wir sprechen dann von verschiedenen *Vorkommen* von ψ in φ.

Semantik der Aussagenlogik

Folie 42

Vorüberlegung zur Semantik

- Eine aussagenlogische Formel wird erst zur Aussage, wenn wir alle in ihr vorkommenden Aussagensymbole durch Aussagen ersetzen.
- Wir interessieren uns hier nicht so sehr für die tatsächlichen Aussagen, sondern nur für ihren **Wahrheitswert**, also dafür, ob sie wahr oder falsch sind.
- Um das festzustellen, reicht es, den Aussagensymbolen die Wahrheitswerte der durch sie repräsentierten Aussagen zuzuordnen.
- *Die Bedeutung einer Formel besteht also aus ihren Wahrheitswerten unter allen möglichen Wahrheitswerten für die in der Formel vorkommenden Aussagensymbole.*

Folie 43

Interpretationen (d.h. Variablenbelegungen)

Wir repräsentieren die Wahrheitswerte wahr und falsch durch 1 und 0.

Definition 2.5. Eine aussagenlogische Interpretation (kurz: Interpretation oder Belegung) ist eine Abbildung

$$\mathcal{I} : \mathsf{AS} \to \{0,1\}.$$

D.h.: $\mathcal{I}$ „belegt“ jedes Aussagensymbol $X \in \mathsf{AS}$ mit einem der beiden Wahrheitswerte 1 (für „wahr“) oder 0 (für „falsch“); und $\mathcal{I}(X)$ ist der Wahrheitswert, mit dem das Aussagensymbol X belegt wird.

Folie 44

Semantik der Aussagenlogik

Definition 2.6. Zu jeder Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ und jeder Interpretation $\mathcal{I}$ definieren wir einen Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$ rekursiv wie folgt:

Rekursionsanfang:

- $[\![\mathbf{0}]\!]^{\mathcal{I}} := 0$.
- $[\![\mathbf{1}]\!]^{\mathcal{I}} := 1$.
- Für alle $X \in \mathsf{AS}$ gilt: $[\![X]\!]^{\mathcal{I}} := \mathcal{I}(X)$.

Rekursionsschritt:

- Ist $\varphi \in \mathsf{AL}$, so ist $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Folie 45

- Ist $\varphi \in \mathsf{AL}$ und $\psi \in \mathsf{AL}$, so ist
  - $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
  - $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 0 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$
  - $[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 0 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

Folie 46

Intuitive Bedeutung der Semantik

Boolesche Konstanten: **1** und **0** bedeuten einfach „*wahr*“ und „*falsch*“.

Aussagensymbole: Die Aussagensymbole stehen für irgendwelche Aussagen, von denen uns aber nur der Wahrheitswert interessiert. Dieser wird durch die Interpretation festgelegt.

Negation: $\neg\varphi$ bedeutet „*nicht* φ“.

Konjunktion: $(\varphi \wedge \psi)$ bedeutet „φ *und* ψ“.

Disjunktion: $(\varphi \vee \psi)$ bedeutet „φ *oder* ψ“.

Implikation: $(\varphi \rightarrow \psi)$ bedeutet „φ *impliziert* ψ“ (oder „*wenn* φ *dann* ψ“).

Folie 47

Rekursive Definitionen über Formeln

- Ähnlich wie Funktionen auf den natürlichen Zahlen, wie zum Beispiel die Fakultätsfunktion oder die Fibonacci Folge, können wir Funktionen auf den aussagenlogischen Formeln rekursiv definieren.
- Dabei gehen wir von den atomaren Formeln aus und definieren dann den Funktionswert einer zusammengesetzten Formel aus den Funktionswerten ihrer Bestandteile.
- Zur Rechtfertigung solcher Definitionen benötigt man die eindeutige Lesbarkeit aussagenlogischer Formeln, die besagt, dass sich jede Formel eindeutig in ihre Bestandteile zerlegen lässt.
- Wir haben auf diese Weise die Semantik definiert. Wir haben nämlich für jede Interpretation $\mathcal{I}$ rekursiv eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\mathcal{I}} : \mathsf{AL} \to \{0,1\}$ definiert.

Folie 48

Schematisch sieht die rekursive Definition einer Funktion $f : \mathsf{AL} \to M$ (für eine beliebige Menge M) folgendermaßen aus:

Rekursionsanfang:

- Definiere $f(\mathbf{0})$ und $f(\mathbf{1})$.
- Definiere $f(X)$ für alle $X \in \mathsf{AS}$.

Rekursionsschritt:

- Definiere $f(\neg\varphi)$ aus $f(\varphi)$.
- Definiere $f((\varphi \wedge \psi))$ aus $f(\varphi)$ und $f(\psi)$.
- Definiere $f((\varphi \vee \psi))$ aus $f(\varphi)$ und $f(\psi)$.

- Definiere $f((\varphi \to \psi))$ aus $f(\varphi)$ und $f(\psi)$.

Folie 49

Beispiel 2.7.
Betrachte die Formel $\varphi \ := \ \big(\neg A_0 \ \vee \ (A_5 \to A_1) \big)$
und die Interpretation $\mathcal{I} : \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ mit

$$\mathcal{I}(A_0) = 1, \quad \mathcal{I}(A_1) = 1, \quad \mathcal{I}(A_5) = 0$$

und $\mathcal{I}(Y) = 0$ für alle $Y \in \mathsf{AS} \setminus \{A_0, A_1, A_5\}$.
Der Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$ ist der Wert

$$\begin{aligned}
[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} &\overset{\text{Def. 2.6}}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } [\![\neg A_0]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \text{ und } [\![(A_5 \to A_1)]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\
&\overset{\text{Def. 2.6}}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } [\![A_0]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } \big([\![A_5]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![A_1]\!]^{\mathcal{I}} = 0\big) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\
&\overset{\text{Def. 2.6}}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{I}(A_0) = 1 \text{ und } \mathcal{I}(A_5) = 1 \text{ und } \mathcal{I}(A_1) = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \quad 1 \quad \text{(denn gemäß obiger Wahl von } \mathcal{I} \text{ gilt } \mathcal{I}(A_5) = 0\text{)}.
\end{aligned}$$

Folie 50

Alternative Art, den Wert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$ zu bestimmen

- Ersetze in φ jedes Aussagensymbol X durch seinen gemäß $\mathcal{I}$ festgelegten Wahrheitswert, d.h. durch den Wert $\mathcal{I}(X)$, und rechne dann den Wert des resultierenden booleschen Ausdrucks aus.
- Speziell für die Formel φ und die Interpretation $\mathcal{I}$ aus Beispiel 2.7 ergibt die Ersetzung der Aussagensymbole durch die gemäß $\mathcal{I}$ festgelegten Wahrheitswerte den booleschen Ausdruck

$$\big(\neg 1 \ \vee \ (0 \to 1) \big).$$

- Ausrechnen von $\neg 1$ ergibt den Wert 0.
  Ausrechnen von $(0 \to 1)$ ergibt den Wert 1.
- Insgesamt erhalten wir also $(0 \vee 1)$, was sich zum Wert 1 errechnet.
  Somit erhalten wir, dass $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$ ist.

Folie 51

Die Modellbeziehung

Definition 2.8.

(a) Eine Interpretation $\mathcal{I}$ erfüllt eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ (wir schreiben: $\mathcal{I} \models \varphi$), wenn $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

Wir schreiben kurz $\mathcal{I} \not\models \varphi$ um auszudrücken, dass $\mathcal{I}$ die Formel φ *nicht* erfüllt (d.h., es gilt $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$).

(b) Eine Interpretation $\mathcal{I}$ erfüllt eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ (wir schreiben: $\mathcal{I} \models \Phi$), wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.

(c) Ein Modell einer Formel φ (bzw. einer Formelmenge Φ) ist eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \varphi$ (bzw. $\mathcal{I} \models \Phi$).

Folie 52

Das Koinzidenzlemma

- Offensichtlich hängt der Wert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$ nur von den Werten $\mathcal{I}(X)$ der Aussagensymbole $X \in \mathsf{AS}$ ab, die auch in φ vorkommen.

  Diese Aussage ist als das *Koinzidenzlemma der Aussagenlogik* bekannt.

- Um $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$ festzulegen, reicht es also, die Werte $\mathcal{I}(X)$ nur für diejenigen Aussagensymbole $X \in \mathsf{AS}$ anzugeben, die in φ vorkommen.

Folie 53

Vereinbarungen zu Interpretationen

- Statt der vollen Interpretation $\mathcal{I} : \mathsf{AS} \to \{0, 1\}$ geben wir in der Regel nur endlich viele Werte $\mathcal{I}(X_1), \ldots, \mathcal{I}(X_n)$ an und legen fest, dass $\mathcal{I}(Y) := 0$ für alle $Y \in \mathsf{AS} \setminus \{X_1, \ldots, X_n\}$.

- In den Beispielen legen wir eine Interpretation oft durch eine Wertetabelle fest. Beispielsweise beschreibt die Tabelle

X	A_0	A_1	A_5
$\mathcal{I}(X)$	1	1	0

  die Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(A_0) = \mathcal{I}(A_1) = 1$ und $\mathcal{I}(A_5) = 0$ und $\mathcal{I}(Y) = 0$ für alle $Y \in \mathsf{AS} \setminus \{A_0, A_1, A_5\}$.

- Wir schreiben $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$, um anzudeuten, dass in φ nur Aussagensymbole aus der Menge $\{X_1, \ldots, X_n\}$ vorkommen.

  Für Wahrheitswerte $b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$ schreiben wir dann $\varphi[b_1, \ldots, b_n]$ anstatt $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$ für eine (bzw. alle) Interpretationen $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(X_i) = b_i$ für alle $i \in [n] := \{1, \ldots, n\}$.

Folie 54

Vereinbarungen

- Wir schreiben $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ als Abkürzung für $((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi))$.

- Statt mit $A_0, A_1, A_2, \ldots$ bezeichnen wir *Aussagensymbole* auch oft mit $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ oder mit Varianten wie $X', Y_1, \ldots$.

- Die äußeren Klammern einer Formel lassen wir manchmal weg und schreiben z.B. $(X \land Y) \to Z$ an Stelle des (formal korrekten) $((X \land Y) \to Z)$.

- Bezüglich Klammerung vereinbaren wir, dass $\neg$ am stärksten bindet, und dass $\land$ und $\lor$ stärker binden als $\to$.

  Wir können also z.B. $X \land \neg Y \ \to\ Z \lor X$ schreiben und meinen damit

  $((X \land \neg Y) \to (Z \lor X))$.

  Nicht schreiben können wir z.B. $X \land Y \lor Z$ (da wir nichts darüber vereinbart haben, wie fehlende Klammern hier zu setzen sind).

Folie 55

- Wir schreiben $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ bzw. $(\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n)$ an Stelle von

  $$(\cdots((\varphi_1 \land \varphi_2) \land \varphi_3) \land \ldots \land \varphi_n)$$

  und nutzen analoge Schreibweisen auch für „$\lor$“ an Stelle von „$\land$“.

- Ist M eine *endliche* Menge aussagenlogischer Formeln, so schreiben wir

  $$\bigwedge_{\varphi \in M} \varphi$$

um die Formel $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$ zu bezeichnen, wobei $n = |M|$ die Anzahl der Formeln in M ist und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ die Auflistung aller Formeln in M in lexikographischer Reihenfolge ist. Formeln sind hierbei Worte über dem Alphabet der Aussagenlogik, wobei die einzelnen Symbole dieses Alphabets folgendermaßen aufsteigend sortiert sind:

$$\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ (,\ ),\ A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots.$$

Die analoge Schreibweise nutzen wir auch für „$\vee$“ an Stelle von „$\wedge$“.

Folie 56

- Diese Schreibweisen werden wir manchmal auch kombinieren. Sind zum Beispiel $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ und $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ endliche Mengen und ist für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben, so schreiben wir
$$\bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J} \varphi_{i,j}$$
um die Formel $(\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{i_m})$ zu bezeichnen, wobei für jedes $i \in I$ die Formel ψ_i durch $\psi_i := (\varphi_{i,j_1} \vee \cdots \vee \varphi_{i,j_n})$ definiert ist.

Folie 57

Wahrheitstafeln

Für jede Formel $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ kann man die Wahrheitswerte unter allen möglichen Interpretationen in einer Wahrheitstafel darstellen. Für alle $(b_1, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n$ enthält die Tafel eine Zeile mit den Werten $b_1\ \cdots\ b_n \mid \varphi[b_1, \ldots, b_n]$.
Um die Wahrheitstafel für φ auszufüllen, ist es bequem, auch Spalten für (alle oder einige) Subformeln von φ einzufügen.

Beispiel: Wahrheitstafel für die Formel $\varphi(X, Y, Z) := X \vee Y \rightarrow X \wedge Z$:

X	Y	Z	$X \vee Y$	$X \wedge Z$	φ
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Die Reihenfolge der Zeilen ist dabei unerheblich. Wir vereinbaren allerdings, die Zeilen stets so anzuordnen, dass die Werte $b_1 \cdots b_n \in \{0,1\}^n$, aufgefasst als Binärzahlen, in aufsteigender Reihenfolge aufgelistet werden.

Folie 58

Wahrheitstafeln für die Junktoren

Die Bedeutung der Junktoren kann man mittels ihrer Wahrheitstafeln beschreiben:

X	$\neg X$
0	1
1	0

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

X	Y	$X \to Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Genauso kann man eine Wahrheitstafel für die Formel $X \leftrightarrow Y$, die ja eine Abkürzung für $(X \to Y) \wedge (Y \to X)$ ist, bestimmen:

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$X \leftrightarrow Y$ bedeutet also „X *genau dann wenn* Y“.

Folie 59

Ein Logikrätsel

Beispiel 2.9. Auf der Insel Wafa leben zwei Stämme: Die Was, die immer die Wahrheit sagen, und die Fas, die immer lügen. Ein Reisender besucht die Insel und trifft auf drei Einwohner A, B, C, die ihm Folgendes erzählen:

- A sagt:
  „B und C sagen genau dann die Wahrheit, wenn C die Wahrheit sagt.“
- B sagt:
  „Wenn A und C die Wahrheit sagen, dann ist es nicht der Fall, dass A die Wahrheit sagt, wenn B und C die Wahrheit sagen.“

- C sagt:
  „B lügt genau dann, wenn A oder B die Wahrheit sagen."

Frage: Welchen Stämmen gehören A, B und C an?

Folie 60

Aussagenlogische Modellierung

Aussagensymbole:

- W_A steht für „A sagt die Wahrheit."
- W_B steht für „B sagt die Wahrheit."
- W_C steht für „C sagt die Wahrheit."

Aussagen der drei Inselbewohner:

- $\varphi_A := (W_B \wedge W_C) \leftrightarrow W_C$
- $\varphi_B := (W_A \wedge W_C) \rightarrow \neg\big((W_B \wedge W_C) \rightarrow W_A\big)$
- $\varphi_C := \neg W_B \leftrightarrow (W_A \vee W_B)$

Wir suchen nach einer Interpretation, die die Formel

$$\psi \; := \; (W_A \leftrightarrow \varphi_A) \wedge (W_B \leftrightarrow \varphi_B) \wedge (W_C \leftrightarrow \varphi_C)$$

erfüllt.

Folie 61

Lösung mittels Wahrheitstafel

W_A	W_B	W_C	φ_A	φ_B	φ_C	$W_A \leftrightarrow \varphi_A$	$W_B \leftrightarrow \varphi_B$	$W_C \leftrightarrow \varphi_C$	ψ
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	0	0	0

Die Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(W_A) = 1$, $\mathcal{I}(W_B) = 1$, $\mathcal{I}(W_C) = 0$ in Zeile 7 ist die einzige, die die Formel ψ erfüllt.
Gemäß dieser Interpretation sind die Aussagen, die durch die Symbole W_A und W_B repräsentiert werden, wahr, während die Aussage, die durch W_C repräsentiert wird, falsch ist.
Das heißt, die Personen A und B sagen die Wahrheit und sind somit Was, und Person C lügt und ist daher ein Fa.

Folie 62

Computerlesbare Darstellung von Formeln

Wir betrachten das Alphabet `ASCII` aller ASCII-Symbole.

Die Menge $\mathsf{AS}_{\texttt{ASCII}}$ aller ASCII-Repräsentationen von Aussagensymbolen besteht aus allen nicht-leeren Worten über dem Alphabet `ASCII`, deren erstes Symbol ein Buchstabe ist, und bei dem alle weiteren Symbole Buchstaben oder Ziffern sind.

Die Menge $\mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$ aller ASCII-Repräsentationen von aussagenlogischen Formeln ist die rekursiv wie folgt definierte Teilmenge von $\texttt{ASCII}^*$:

Basisregeln:

- $\mathsf{0} \in \mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$, $\mathsf{1} \in \mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$ und $w \in \mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$ für alle $w \in \mathsf{AS}_{\texttt{ASCII}}$.

Rekursive Regeln:

- Ist $\varphi \in \mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$, so ist auch $\mathtt{\sim}\varphi \in \mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$. *(Negation)*
- Ist $\varphi \in \mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$ und $\psi \in \mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$, so ist auch
  - $(\varphi\, \mathsf{/\backslash}\, \psi) \in \mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$ *(Konjunktion)*
  - $(\varphi\, \mathsf{\backslash/}\, \psi) \in \mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$ *(Disjunktion)*
  - $(\varphi\, \mathsf{->}\, \psi) \in \mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$ *(Implikation)*
  - $(\varphi\, \mathsf{<->}\, \psi) \in \mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$ *(Biimplikation).*

Folie 63

Abstrakte vs. computerlesbare Syntax

Es ist offensichtlich, wie man Formeln aus AL in ihre entsprechende ASCII-Repräsentation übersetzt und umgekehrt. Zum Beispiel ist

$$\big((A_0 \wedge \mathbf{0}) \to \neg A_{13}\big)$$

eine Formel in AL, deren ASCII-Repräsentation die folgende Zeichenkette aus $\mathsf{AL}_{\texttt{ASCII}}$ ist:

```
( (A0 /\ 0) -> ~A13 ).
```

Wir werden meistens mit der „abstrakten Syntax“, d.h. mit der in Definition 2.4 festgelegten Menge AL, arbeiten. Um aber Formeln in Computer-Programme einzugeben, können wir die ASCII-Repräsentation verwenden.

Folie 64

Demo: `snippets of logic`

- ein Formelchecker für die Aussagenlogik
- entwickelt von André Frochaux
- Funktionalitäten u.a.:
  - Syntaxcheck für eingegebene Formeln
  - Ausgabe eines Syntaxbaums
  - Ausgabe einer Wahrheitstafel
- Zugänglich via

  http://www.snippets-of-logic.net/index_AL.php?lang=de

Folie 65

Zurück zu Beispiel 2.1 („Geburtstagsfeier“)

Das in Beispiel 2.1 aufgelistete Wissen kann durch folgende aussagenlogische Formel repräsentiert werden:

$$\begin{aligned} \varphi \ := \quad & \big((B \wedge A) \to \neg E\big) \ \wedge \ \big((B \wedge E) \to \neg D\big) \ \wedge \\ & \big(E \to (C \wedge D)\big) \ \wedge \ (C \to A) \ \wedge \ \big(A \to (B \vee C)\big) \end{aligned}$$

Die Frage

> *„Wie viele (und welche) Freunde werden im besten Fall zur Party kommen?“*

kann nun durch Lösen der folgenden Aufgabe beantwortet werden:

Finde eine Interpretation $\mathcal{I}$ für φ, so dass gilt:

- $\mathcal{I} \models \varphi$ (d.h., $\mathcal{I}$ ist ein *Modell* von φ) und
- $|\{X \in \{A, B, C, D, E\} \ : \ \mathcal{I}(X) = 1\}|$ ist so groß wie möglich.

Folie 66

Diese Frage können wir lösen, indem wir

(1) die Wahrheitstafel für φ ermitteln,

(2) alle Zeilen raussuchen, in denen in der mit „φ“ beschrifteten Spalte der Wert 1 steht (das liefert uns genau die Modelle von φ) und

(3) aus diesen Zeilen all jene raussuchen, bei denen in den mit A, B, C, D, E beschrifteten Spalten möglichst viele Einsen stehen. Jede dieser Zeilen repräsentiert dann eine größtmögliche Konstellation von gleichzeitigen Partybesuchern.

Prinzipiell führt diese Vorgehensweise zum Ziel.

Leider ist das Verfahren aber recht aufwändig, da die Wahrheitstafel, die man dabei aufstellen muss, sehr groß wird: Sie hat $2^5 = 32$ Zeilen.

Folie 67

A	B	C	D	E	$E \to (C \land D)$	$C \to A$	$(B \land E) \to \neg D$	$A \to (B \lor C)$	$(B \land A) \to \neg E$	φ
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0

Folie 68

In der Wahrheitstafel sieht man:

- Es gibt *kein* Modell für φ, bei dem in den mit A bis E beschrifteten Spalten insgesamt 5 Einsen stehen.
- Es gibt genau *zwei* Modelle für φ, bei denen in den mit A bis E beschrifteten Spalten insgesamt 4 Einsen stehen, nämlich die beiden Interpretationen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ mit

$$\mathcal{I}_1(A) = \mathcal{I}_1(C) = \mathcal{I}_1(D) = \mathcal{I}_1(E) = 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_1(B) = 0$$

und

$$\mathcal{I}_2(A) = \mathcal{I}_2(B) = \mathcal{I}_2(C) = \mathcal{I}_2(D) = 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_2(E) = 0.$$

Die Antwort auf die Frage *„Wie viele (und welche) Freunde werden bestenfalls zur Party kommen?“* lautet also:

Bestenfalls werden 4 der 5 Freunde kommen, und dafür gibt es zwei Möglichkeiten, nämlich

(1) dass alle außer Bernd kommen, und

(2) dass alle außer Eva kommen.

Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und die Folgerungsbeziehung

Folie 69

Erfüllbarkeit

Definition 2.10.
Eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ heißt *erfüllbar*, wenn es eine Interpretation gibt, die φ erfüllt.

Eine Formelmenge Φ heißt *erfüllbar*, wenn es eine Interpretation $\mathcal{I}$ gibt, die Φ erfüllt (d.h. es gilt $\mathcal{I} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in \Phi$).

Eine Formel oder Formelmenge, die nicht erfüllbar ist, nennen wir *unerfüllbar*.

Beobachtung 2.11.

(a) *Eine aussagenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn in der letzten Spalte ihrer Wahrheitstafel mindestens eine* 1 *steht.*

(b) *Eine endliche Formelmenge* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *ist genau dann erfüllbar, wenn die Formel* $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ *erfüllbar ist.*

Beispiele:

- Die Formel X ist erfüllbar.
- Die Formel $(X \wedge \neg X)$ ist unerfüllbar.

Folie 70

Allgemeingültigkeit

Definition 2.12. Eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ ist *allgemeingültig*, wenn *jede* Interpretation $\mathcal{I}$ die Formel φ erfüllt.

Bemerkung. Allgemeingültige Formeln nennt man auch *Tautologien.*

Man schreibt auch $\models \varphi$ um auszudrücken, dass φ allgemeingültig ist.

Beobachtung 2.13.
Eine aussagenlogische Formel ist genau dann allgemeingültig, wenn in der letzten Spalte ihrer Wahrheitstafel nur 1*en stehen.*

Beispiel: Die Formel $(X \vee \neg X)$ ist allgemeingültig.

Folie 71

Beispiel 2.14. Die Formel $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y)$ ist

- *erfüllbar*, da z.B. die Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(X) = 0$ und $\mathcal{I}(Y) = 1$ die Formel erfüllt.
- *nicht allgemeingültig*, da z.B. die Interpretation $\mathcal{I}'$ mit $\mathcal{I}'(X) = 0$ und $\mathcal{I}'(Y) = 0$ die Formel nicht erfüllt.

Folie 72

Die Folgerungsbeziehung

Definition 2.15. Eine Formel $\psi \in \mathsf{AL}$ *folgt* aus einer Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ (wir schreiben: $\Phi \models \psi$), wenn für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt: Wenn $\mathcal{I}$ die Formelmenge Φ erfüllt, dann erfüllt $\mathcal{I}$ auch die Formel ψ.

Notation. Für zwei Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ schreiben wir kurz $\varphi \models \psi$ an Stelle von $\{\varphi\} \models \psi$ und sagen, dass die Formel ψ aus der Formel φ folgt.

Folie 73

Beispiel 2.16. Sei $\varphi := \big((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y)\big)$ und $\psi := \big(Y \vee (\neg X \wedge \neg Y)\big)$.
Dann gilt $\varphi \models \psi$, aber es gilt *nicht* $\psi \models \varphi$ (kurz: $\psi \not\models \varphi$), denn:

X	Y	$(X \vee Y)$	$(\neg X \vee Y)$	φ	ψ
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

In jeder Zeile der Wahrheitstafel, in der in der mit „φ“ beschrifteten Spalte eine 1 steht, steht auch in der mit „ψ“ beschrifteten Spalte eine 1. Somit gilt $\varphi \models \psi$.
Andererseits steht in Zeile 1 in der mit „ψ“ beschrifteten Spalte eine 1 und in der mit „φ“ beschrifteten Spalte eine 0. Für die entsprechende Interpretation $\mathcal{I}$ (mit $\mathcal{I}(X) = 0$ und $\mathcal{I}(Y) = 0$) gilt also $[\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$ und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$. Daher gilt $\psi \not\models \varphi$.

Folie 74

Beispiel 2.17. Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\{\, \varphi,\ \varphi \to \psi \,\} \ \models\ \psi.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Semantik:
Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \{\varphi,\ \varphi \to \psi\}$. Dann gilt:

(1) $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$ und

(2) $[\![\varphi \to \psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$, d.h. es gilt $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$ oder $[\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

Da $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$ gemäß (1) gilt, folgt gemäß (2), dass $[\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

Bemerkung. Man kann die Folgerungsbeziehung $\{\varphi,\ \varphi \to \psi\} \models \psi$ als eine formale Schlussregel auffassen (ähnlich den Syllogismen in Kapitel 1): Wenn φ und $\varphi \to \psi$ gelten, so muss auch ψ gelten.
Diese Regel, die unter dem Namen *Modus Ponens* bekannt ist, ist von grundlegender Bedeutung in der Logik.

Folie 75

Zusammenhänge

Lemma 2.18 (Allgemeingültigkeit, Unerfüllbarkeit und Folgerung)**.**
Für jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ gilt:

(a) φ *ist allgemeingültig* $\iff$ $\neg\varphi$ *ist unerfüllbar* $\iff$ $\mathbf{1} \models \varphi$.

(b) φ *ist unerfüllbar* $\iff$ $\varphi \models \mathbf{0}$.

Beweis.

(a) Zur Erinnerung: Wir schreiben kurz „$\models \varphi$“ um auszudrücken, dass die Formel φ allgemeingültig ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \models \varphi \quad &\iff \quad \text{für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \mathcal{I} \models \varphi \\ &\iff \quad \text{für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \mathcal{I} \not\models \neg\varphi \\ &\iff \quad \neg\varphi \text{ ist unerfüllbar.} \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \models \varphi \quad &\iff \quad \text{für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ mit } \mathcal{I} \models \mathbf{1} \text{ gilt: } \mathcal{I} \models \varphi \\ &\iff \quad \text{für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \mathcal{I} \models \varphi \\ &\iff \quad \varphi \text{ ist allgemeingültig.} \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} &\varphi \text{ ist unerfüllbar} \\ \iff\ &\text{für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \mathcal{I} \not\models \varphi \\ \iff\ &\text{für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ mit } \mathcal{I} \models \varphi \text{ gilt: } \mathcal{I} \models \mathbf{0} \\ \iff\ &\varphi \models \mathbf{0}. \end{aligned}$$

□

Folie 76

Lemma 2.19 (Erfüllbarkeit und die Folgerungsbeziehung)**.**
Für alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und für alle Formeln $\psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\Phi \models \psi \quad \iff \quad \Phi \cup \{\neg\psi\} \ \textit{ist unerfüllbar.}$$

Beweis.

„$\Longrightarrow$“: Es gelte $\Phi \models \psi$. Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation. Unser Ziel ist, zu zeigen, dass $\mathcal{I} \not\models \Phi \cup \{\neg\psi\}$.

Fall 1: $\mathcal{I} \not\models \Phi$.
Dann gilt insbesondere, dass $\mathcal{I} \not\models \Phi \cup \{\neg\psi\}$.

Fall 2: $\mathcal{I} \models \Phi$.
Wegen $\Phi \models \psi$ gilt dann $\mathcal{I} \models \psi$.
Somit gilt: $\mathcal{I} \not\models \neg\psi$, und daher auch $\mathcal{I} \not\models \Phi \cup \{\neg\psi\}$.

Damit gilt in jedem Fall, dass $\mathcal{I} \not\models \Phi \cup \{\neg\psi\}$. Weil $\mathcal{I}$ beliebig gewählt war, bedeutet dies, dass $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist.

„$\Longleftarrow$“: Sei $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar. Unser Ziel ist, zu zeigen, dass $\Phi \models \psi$.
Dazu sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Phi$. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{I} \models \psi$.
Da $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist, muss gelten: $\mathcal{I} \not\models \neg\psi$ (denn sonst würde $\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\neg\psi\}$ gelten). Somit gilt $\mathcal{I} \models \psi$.

□

Folie 77

Lemma 2.20 (Allgemeingültigkeit und die Folgerungsbeziehung)**.**

(a) Für jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig} \iff \varphi \text{ folgt aus der leeren Menge},$$

kurz:

$$\models \varphi \quad \iff \quad \emptyset \models \varphi.$$

(b) Für jede Formel $\psi \in \mathsf{AL}$ und jede endliche Formelmenge $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \mathsf{AL}$ gilt:

$$\Phi \models \psi \quad \iff \quad (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi \quad \text{ist allgemeingültig.}$$

Beweis.

(a) Man beachte, dass für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ und für alle Formeln $\psi \in \emptyset$ gilt: $\mathcal{I} \models \psi$. Daher gilt $\mathcal{I} \models \emptyset$ für *alle* Interpretationen $\mathcal{I}$. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\emptyset \models \varphi \iff & \text{ für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ mit } \mathcal{I} \models \emptyset \text{ gilt: } \mathcal{I} \models \varphi \\
\iff & \text{ für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \mathcal{I} \models \varphi \\
\iff & \ \varphi \text{ ist allgemeingültig, d.h. } \models \varphi.
\end{aligned}$$

(b) *„$\Longrightarrow$“:* Es gelte $\Phi \models \psi$. Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation. Unser Ziel ist, zu zeigen, dass gilt: $\mathcal{I} \models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi$.

Fall 1: $\mathcal{I} \models \Phi$, d.h. $\mathcal{I} \models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$.
Wegen $\Phi \models \psi$ gilt dann auch: $\mathcal{I} \models \psi$.
Somit gilt auch: $\mathcal{I} \models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi$.

Fall 2: $\mathcal{I} \not\models \Phi$.
Dann gibt es ein $i \in [n]$, so dass $\mathcal{I} \not\models \varphi_i$.
Insbesondere gilt daher: $\mathcal{I} \not\models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$.
Also gilt: $\mathcal{I} \models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi$.

„$\Longleftarrow$“: Sei die Formel $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi$ allgemeingültig. Wir wollen zeigen, dass $\Phi \models \psi$ gilt.
Dazu sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Phi$. Ziel ist, zu zeigen, dass $\mathcal{I} \models \psi$.
Wegen $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt: $\mathcal{I} \models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$. Da die Formel $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi$ allgemeingültig ist, muss daher auch gelten: $\mathcal{I} \models \psi$.

$\square$

Folie 78

Bemerkung 2.21.
Aus den beiden vorigen Lemmas erhält man leicht, dass für alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$\varphi \models \psi \iff (\varphi \to \psi)$ ist allgemeingültig $\iff (\varphi \wedge \neg\psi)$ ist unerfüllbar.

Beweis. Es sei $\Phi := \{\varphi\}$. Gemäß Lemma 2.20 gilt:

$$\Phi \models \psi \iff (\varphi \to \psi) \text{ ist allgemeingültig.}$$

Somit gilt: $\varphi \models \psi \iff (\varphi \to \psi)$ ist allgemeingültig.

Außerdem gilt gemäß Lemma 2.19:

$$\Phi \models \psi \iff \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ ist unerfüllbar.}$$

Somit gilt: $\varphi \models \psi \iff (\varphi \wedge \neg\psi)$ ist unerfüllbar. $\square$

2.2 Aussagenlogische Modellierung

Beispiel 1: Sudoku

Folie 79

Sudoku

	3							
			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				
4					3			1
				2				
	6					2	8	
			4	1	9			5
							7	

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Folie 80

Aussagenlogisches Modell

Koordinaten der Felder:
Feld (i,j) ist das Feld in Zeile i und Spalte j.

Aussagensymbole:
Aussagensymbol $P_{i,j,k}$, für $i,j,k \in [9]$, steht für die Aussage

„Das Feld mit den Koordinaten (i,j) enthält die Zahl k.“

Interpretationen beschreiben also Beschriftungen des $9{\times}9$-Gitters.

Ziel:
Für jede Anfangsbeschriftung A eine Formelmenge Φ_A, so dass für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi_A \quad \iff \quad \mathcal{I} \text{ beschreibt eine korrekte Lösung.}$$

Folie 81

Wir beschreiben zunächst eine Formelmenge $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_5\}$, die die Grundregeln des Spiels beschreibt.

Beschriftungen:
"Auf jedem Feld steht mindestens eine Zahl":

$$\varphi_1 \;:=\; \bigwedge_{i,j=1}^{9} \bigvee_{k=1}^{9} P_{i,j,k}.$$

"Auf jedem Feld steht höchstens eine Zahl":

$$\varphi_2 \;:=\; \bigwedge_{i,j=1}^{9} \bigwedge_{\substack{k,\ell=1 \\ k\neq\ell}}^{9} \neg(P_{i,j,k} \wedge P_{i,j,\ell}).$$

Folie 82

Zeilen:
„Jede Zahl kommt in jeder Zeile vor":

$$\varphi_3 \;:=\; \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigvee_{j=1}^{9} P_{i,j,k}.$$

Spalten:
„Jede Zahl kommt in jeder Spalte vor":

$$\varphi_4 \;:=\; \bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigvee_{i=1}^{9} P_{i,j.k}.$$

Blöcke:
„Jede Zahl kommt in jedem Block vor":

$$\varphi_5 \;:=\; \bigwedge_{i,j=0}^{2} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigvee_{i',j'=1}^{3} P_{3i+i',3j+j',k}.$$

Folie 83

Anfangsbeschriftung:
Sei A die Anfangsbeschriftung. Wir setzen

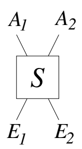
$$\Phi_A \;:=\; \Phi \,\cup\, \{\, P_{i,j,k} \;:\; A \text{ beschriftet Feld } (i,j) \text{ mit der Zahl } k \,\}.$$

Automatische Lösung von Sudokus:
Um ein Sudoku mit Anfangsbeschriftung A zu lösen, können wir nun einfach die Formel $\psi_A := \bigwedge_{\varphi \in \Phi_A} \varphi$ bilden und die Wahrheitstafel zu dieser Formel aufstellen. Falls die Wahrheitstafel zeigt, dass ψ_A kein Modell besitzt, so ist das Sudoku nicht lösbar. Andernfalls können wir ein beliebiges Modell $\mathcal{I}$ von ψ_A hernehmen und daran die Lösung des Sudokus ablesen: Für jedes Feld (i, j) gibt es gemäß unserer Konstruktion der Formel ψ_A genau eine Zahl $k \in [9]$, so dass $\mathcal{I}(P_{i,j,k}) = 1$ ist. Diese Zahl k können wir in Feld (i, j) eintragen und erhalten damit eine Lösung des Sudokus.

Beispiel 2: Automatische Hardwareverifikation

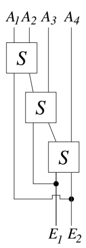
Digitale Schaltkreise

- Digitale *Signale* werden beschrieben durch 0 („aus“) und 1 („ein“).
- *Schaltelemente* berechnen ein oder mehrere Ausgangssignale aus einem oder mehreren Eingangssignalen. Das Ein-/Ausgabeverhalten eines Schaltelements lässt sich durch Wahrheitstafeln beschreiben.
  Beispiel:



E_1	E_2	A_1	A_2
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

- *Schaltkreise* sind Kombinationen solcher Schaltelemente.
  Beispiel:



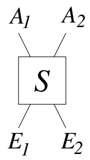
E_1	E_2	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1

Formalisierung in der Aussagenlogik

Schaltelement:

- Für jeden Ein- und Ausgang ein Aussagensymbol.
- Für jeden Ausgang eine Formel, die den Wert der Ausgangs in Abhängigkeit von den Eingängen beschreibt.

Beispiel:



E_1	E_2	A_1	A_2
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Aussagensymbole:
$P_1,\ P_2,\quad Q_1,\ Q_2$

Formeln:
$Q_1 \leftrightarrow \neg(P_1 \wedge P_2)$
$Q_2 \leftrightarrow (P_1 \wedge P_2)$

Schaltkreis:

- Für jeden Ein- und Ausgang ein Aussagensymbol,
  sowie für jedes Schaltelement ein Sortiment von Aussagensymbolen.
- Formeln für die Schaltelemente und Formeln für die „Verdrahtung“.

Beispiel:

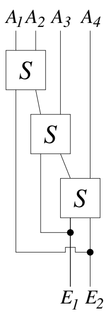
Aussagensymbole:

$P_1, P_2,\ \ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4,$

$P_1^u,\ P_2^u,\quad Q_1^u,\ Q_2^u,$

$P_1^m,\ P_2^m,\quad Q_1^m,\ Q_2^m,$

$P_1^o,\ P_2^o,\quad Q_1^o,\ Q_2^o.$



E_1	E_2	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1

Formeln:

$Q_1^u \leftrightarrow \neg(P_1^u \wedge P_2^u),$
$Q_2^u \leftrightarrow (P_1^u \wedge P_2^u),$

$Q_1^m \leftrightarrow \neg(P_1^m \wedge P_2^m),$
$Q_2^m \leftrightarrow (P_1^m \wedge P_2^m),$

$Q_1^o \leftrightarrow \neg(P_1^o \wedge P_2^o),$
$Q_2^o \leftrightarrow (P_1^o \wedge P_2^o),$

$P_1^u \leftrightarrow P_1,\quad P_2^u \leftrightarrow P_2,$
$P_1^m \leftrightarrow P_1,\quad P_2^m \leftrightarrow Q_1^u,$
$P_1^o \leftrightarrow P_2,\quad P_2^o \leftrightarrow Q_1^m,$

$Q_1 \leftrightarrow Q_1^o,\quad Q_2 \leftrightarrow Q_2^o,$
$Q_3 \leftrightarrow Q_2^m,\quad Q_4 \leftrightarrow Q_2^u.$

Verifikation

Ziel:
Nachweis, dass der Schaltkreis eine gewisse *Korrektheitsbedingung* erfüllt.

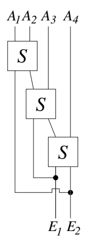
Methode:

1. Beschreibe den Schaltkreis durch eine Menge Φ von Formeln.
2. Formuliere die Korrektheitsbedingung als Formel ψ.
3. Weise nach, dass ψ aus Φ folgt (bzw., dass $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist).

Bemerkung. Bei Bedarf kann die Korrektheitsbedingung insbesondere so gewählt werden, dass sie das gewünschte Ein-/Ausgabeverhalten des Schaltkreises vollständig spezifiziert.

Beispiele für Korrektheitsbedingungen

Schaltkreis:



Einige Korrektheitsbedingungen:

- Bei jeder Eingabe ist mindestens eine Ausgabe 1:
$$Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \vee Q_4.$$
- Bei keiner Eingabe sind mehr als zwei Ausgaben 1:
$$\neg \bigvee_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 4} (Q_i \wedge Q_j \wedge Q_k)$$

Vollständige Spezifikation des Ein-/Ausgabeverhaltens:

$$\begin{array}{rlcl}
 & \big(\neg P_1 \wedge \neg P_2 & \to & Q_1 \wedge \neg Q_2 \wedge \neg Q_3 \wedge \neg Q_4 \big) \\
\wedge & \big(\neg P_1 \wedge P_2 & \to & \neg Q_1 \wedge Q_2 \wedge \neg Q_3 \wedge \neg Q_4 \big) \\
\wedge & \big(P_1 \wedge \neg P_2 & \to & Q_1 \wedge \neg Q_2 \wedge Q_3 \wedge \neg Q_4 \big) \\
\wedge & \big(P_1 \wedge P_2 & \to & \neg Q_1 \wedge Q_2 \wedge \neg Q_3 \wedge Q_4 \big)
\end{array}$$

2.3 Äquivalenz und Adäquatheit

Folie 84

Äquivalenz

Definition 2.22. Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ sind *äquivalent* (wir schreiben $\varphi \equiv \psi$), wenn sie von den selben Interpretationen erfüllt werden, d.h., wenn für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi$.

Zwei Formelmengen $\Phi, \Psi \subseteq \mathsf{AL}$ sind *äquivalent* (wir schreiben $\Phi \equiv \Psi$), wenn sie von den selben Interpretationen erfüllt werden, d.h., wenn für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I} \models \Phi \iff \mathcal{I} \models \Psi$.

Beobachtung 2.23.

(a) *Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ sind genau dann äquivalent, wenn in den letzten Spalten ihrer Wahrheitstafeln jeweils die gleichen Einträge stehen.*

(b) *Für endliche Formelmengen $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \mathsf{AL}$ gilt*

$$\Phi \equiv \Psi \quad\iff\quad \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i \;\equiv\; \bigwedge_{j=1}^{n} \psi_j.$$

Beispiel:
Für alle $X, Y \in \mathsf{AS}$ gilt: $\neg(X \vee Y) \;\equiv\; (\neg X \wedge \neg Y)$ und $X \;\equiv\; \neg\neg X$.

Folie 85

Äquivalenz und Allgemeingültigkeit

Lemma 2.24. *(a) Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt:*

$$\varphi \equiv \psi \quad\iff\quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \text{ ist allgemeingültig.}$$

(b) Für alle $\varphi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig} \quad\iff\quad \varphi \equiv \mathbf{1}.$$

Beweis.

(a)

$$\begin{aligned}
\varphi \equiv \psi \quad &\iff \quad \text{für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \big(\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi\big) \\
&\iff \quad \text{für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \mathcal{I} \models (\varphi \leftrightarrow \psi) \\
&\iff \quad \models (\varphi \leftrightarrow \psi).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\models \varphi \quad &\iff \quad \text{für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \mathcal{I} \models \varphi \\
&\iff \quad \text{für alle Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \big(\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \mathbf{1}\big) \\
&\iff \quad \varphi \equiv \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

□

Folie 86

Fundamentale Äquivalenzen

Satz 2.25. *Für alle Formeln $\varphi, \psi, \chi \in \mathsf{AL}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:*

(a) Idempotenz:

$$\varphi \wedge \varphi \;\equiv\; \varphi\,, \qquad \varphi \vee \varphi \;\equiv\; \varphi.$$

(b) Kommutativität:

$$\varphi \wedge \psi \;\equiv\; \psi \wedge \varphi\,, \qquad \varphi \vee \psi \;\equiv\; \psi \vee \varphi.$$

(c) Assoziativität:

$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \;\equiv\; \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)\,, \qquad (\varphi \vee \psi) \vee \chi \;\equiv\; \varphi \vee (\psi \vee \chi).$$

(d) Absorption:

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \;\equiv\; \varphi\,, \qquad \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \varphi.$$

Folie 87

(e) *Distributivität:*

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \;\equiv\; (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)\,, \qquad \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \;\equiv\; (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi).$$

(f) *Doppelte Negation:*

$$\neg\neg\varphi \;\equiv\; \varphi.$$

(g) *De Morgansche Regeln:*

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \neg\varphi \vee \neg\psi\ , \qquad \neg(\varphi \vee \psi) \;\equiv\; \neg\varphi \wedge \neg\psi.$$

(h) *Tertium Non Datur:*

$$\varphi \wedge \neg\varphi \;\equiv\; \mathbf{0}\ , \qquad \varphi \vee \neg\varphi \;\equiv\; \mathbf{1}.$$

Folie 88

(i)

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \mathbf{1} \;&\equiv\; \varphi\ , \qquad & \varphi \vee \mathbf{0} \;&\equiv\; \varphi\ , \\ \varphi \wedge \mathbf{0} \;&\equiv\; \mathbf{0}\ , \qquad & \varphi \vee \mathbf{1} \;&\equiv\; \mathbf{1}. \end{aligned}$$

(j)

$$\mathbf{1} \;\equiv\; \neg\mathbf{0}\ , \qquad \mathbf{0} \;\equiv\; \neg\mathbf{1}.$$

(k) *Elimination der Implikation:*

$$\varphi \rightarrow \psi \;\equiv\; \neg\varphi \vee \psi.$$

Folie 89

Beweis. Alle hier genannten Äquivalenzen können leicht mit Hilfe der Wahrheisttafelmethode überprüft werden.
Zum Beispiel die erste de Morgansche Regel:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \neg\varphi \vee \neg\psi.$$

Wir berechnen dazu folgende Wahrheitstafeln:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Die letzten Spalten der beiden Wahrheitstafeln sind gleich, also sind die Formeln äquivalent.

Rest: Übung. □

Folie 90

Bemerkung. Durch schrittweises Anwenden der in Satz 2.25 aufgelisteten Äquivalenzen kann man eine gegebene Formel in eine zu ihr äquivalente Formel umformen.

Folie 91

Das Dualitätsprinzip

Definition 2.26. Sei $\varphi \in \mathsf{AL}$ eine Formel, in der keine Implikationen vorkommt.
Die zu φ *duale Formel* ist die Formel $\widetilde{\varphi} \in \mathsf{AL}$, die aus φ entsteht, indem man überall **0** durch **1**, **1** durch **0**, $\wedge$ durch $\vee$ und $\vee$ durch $\wedge$ ersetzt.

Beobachtung 2.27. *In Satz 2.25(a)–(e) und (g)–(j) stehen auf der linken Seite jeweils die dualen Formeln der Formeln auf der rechten Seite.*

Satz 2.28 (Dualitätssatz der Aussagenlogik)**.**
Für alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$, in denen keine Implikation vorkommt, gilt:

$$\varphi \equiv \psi \qquad \iff \qquad \widetilde{\varphi} \equiv \widetilde{\psi}.$$

Wir werden den Dualitätssatz per Induktion über den Aufbau von Formeln beweisen.

Folie 92

Beweise per Induktion über den Aufbau von Formeln

- Ähnlich wie wir Aussagen über die natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion beweisen können, können wir Aussagen über Formeln per *Induktion über den Aufbau der Formeln* beweisen.
- Im *Induktionsanfang* beweisen wir die Aussagen für die atomaren Formeln, und im *Induktionschritt* schließen wir von den Bestandteilen einer Formel auf die Formel selbst.
- Dieses Vorgehen ist z.B. dadurch gerechtfertigt, dass es sich auch als vollständige Induktion über die Höhe des Syntaxbaumes auffassen lässt.

Folie 93

Schematisch sieht der Beweis einer Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$ für alle Formeln $\varphi \in \mathsf{AL}$ wie folgt aus:

Induktionsanfang:

- Beweise $\mathbb{A}(\mathbf{0})$ und $\mathbb{A}(\mathbf{1})$.
- Beweise $\mathbb{A}(X)$ für alle $X \in \mathsf{AS}$.

Induktionsschritt:

- Beweise $\mathbb{A}(\neg\varphi)$ unter der Annahme, dass $\mathbb{A}(\varphi)$ gilt.
- Beweise $\mathbb{A}(\varphi \wedge \psi)$ unter der Annahme, dass $\mathbb{A}(\varphi)$ und $\mathbb{A}(\psi)$ gelten.
- Beweise $\mathbb{A}(\varphi \vee \psi)$ unter der Annahme, dass $\mathbb{A}(\varphi)$ und $\mathbb{A}(\psi)$ gelten.
- Beweise $\mathbb{A}(\varphi \rightarrow \psi)$ unter der Annahme, dass $\mathbb{A}(\varphi)$ und $\mathbb{A}(\psi)$ gelten.

Folie 94

Um den Dualitätssatz zu beweisen benötigen wir zunächst noch eine Definition. Der Kern des Beweises steckt im darauf folgenden Lemma.

Definition 2.29. Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation. Die zu $\mathcal{I}$ *duale Interpretation* $\widetilde{\mathcal{I}}$ ist definiert durch $\widetilde{\mathcal{I}}(X) := 1 - \mathcal{I}(X)$ für alle $X \in \mathsf{AS}$.

D.h. für alle Aussagensymbole X gilt:

$$\widetilde{\mathcal{I}}(X) \quad = \quad \begin{cases} 0\,, & \text{falls } \mathcal{I}(X) = 1 \\ 1\,, & \text{falls } \mathcal{I}(X) = 0 \end{cases}$$

Lemma 2.30. *Für alle Formeln $\varphi \in \mathsf{AL}$, in denen keine Implikation vorkommt, und alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:*

$$\mathcal{I} \models \widetilde{\varphi} \quad \iff \quad \widetilde{\mathcal{I}} \not\models \varphi.$$

Beweis von Lemma 2.30.
Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation.
Per Induktion über den Aufbau von Formeln zeigen wir, dass für jedes $\varphi \in \mathsf{AL}$, in dem keine Implikation vorkommt gilt:

$$[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \quad = \quad 1 - [\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}.$$

Beachte: Dann gilt natürlich auch: $\mathcal{I} \models \widetilde{\varphi} \iff \widetilde{\mathcal{I}} \not\models \varphi$.

Induktionsanfang:

- Sei $\varphi := \mathbf{1}$. Dann ist $\widetilde{\varphi} = \mathbf{0}$. *Zu zeigen:* $[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; 1 - [\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$. *Beweis:*

$$[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; [\![\mathbf{0}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; 0 \;=\; 1-1 \;=\; 1-[\![\mathbf{1}]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}} \;=\; 1-[\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}.$$

- Sei $\varphi := \mathbf{0}$. Dann ist $\widetilde{\varphi} = \mathbf{1}$. *Zu zeigen:* $[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; 1 - [\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$. *Beweis:*

$$[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; [\![\mathbf{1}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; 1 \;=\; 1-0 \;=\; 1-[\![\mathbf{0}]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}} \;=\; 1-[\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}.$$

- Sei $\varphi := X$ für ein $X \in \mathsf{AS}$. Dann ist $\widetilde{X} = X$.
Zu zeigen: $[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; 1 - [\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$. *Beweis:*

$$[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; [\![X]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; \mathcal{I}(X) \;=\; 1-\widetilde{\mathcal{I}}(X) \;=\; 1-[\![X]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}} \;=\; 1-[\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}.$$

Induktionsschritt:

- *Negation:*

  Gemäß Induktionsannahme gilt: $[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; 1 - [\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$.

  Wir wollen zeigen, dass auch gilt: $[\![\widetilde{\neg\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; 1 - [\![\neg\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$.

  Per Definition ist $\widetilde{\neg\varphi} = \neg\widetilde{\varphi}$. Damit gilt:

$$[\![\widetilde{\neg\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; [\![\neg\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; 1-[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} \underset{\text{(IA)}}{=} 1-(1-[\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}) \;=\; 1-[\![\neg\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}.$$

- *Konjunktion:*

  Gemäß Induktionsannahme gilt:

$$[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} = 1-[\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}} \quad \text{und} \quad [\![\widetilde{\psi}]\!]^{\mathcal{I}} = 1-[\![\psi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}.$$

  Wir wollen zeigen, dass auch gilt: $[\![\widetilde{(\varphi\wedge\psi)}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; 1 - [\![(\varphi\wedge\psi)]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$.

  Per Definition ist $\widetilde{(\varphi\wedge\psi)} \;=\; (\widetilde{\varphi}\vee\widetilde{\psi})$.
  Folgende Wahrheitstafel, bei der die 4. und 5. Spalte auf der Induktionsannahme beruht, zeigt, dass $[\![(\widetilde{\varphi}\vee\widetilde{\psi})]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; 1 - [\![(\varphi\wedge\psi)]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$.

$[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}}$	$[\![\widetilde{\psi}]\!]^{\mathcal{I}}$	$[\![(\widetilde{\varphi}\vee\widetilde{\psi})]\!]^{\mathcal{I}}$	$[\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$	$[\![\psi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$	$[\![(\varphi\wedge\psi)]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0

  Die 3. und 6. Spalte zeigt, dass $[\![(\widetilde{\varphi}\vee\widetilde{\psi})]\!]^{\mathcal{I}} = 1-[\![(\varphi\wedge\psi)]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$ gilt.

- *Disjunktion:*

  Gemäß Induktionsannahme gilt:
  $$[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}} = 1 - [\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}} \quad \text{und} \quad [\![\widetilde{\psi}]\!]^{\mathcal{I}} = 1 - [\![\psi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}.$$
  Wir wollen zeigen, dass auch gilt: $[\![\widetilde{(\varphi \vee \psi)}]\!]^{\mathcal{I}} \ = \ 1 - [\![(\varphi \vee \psi)]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$.

  Per Definition ist $\widetilde{(\varphi \vee \psi)} = (\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi})$. Folgende Wahrheitstafel, bei der die 4. und 5. Spalte auf der Induktionsannahme beruht, zeigt, dass $[\![(\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi})]\!]^{\mathcal{I}} = 1 - [\![(\varphi \vee \psi)]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$.

$[\![\widetilde{\varphi}]\!]^{\mathcal{I}}$	$[\![\widetilde{\psi}]\!]^{\mathcal{I}}$	$[\![(\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi})]\!]^{\mathcal{I}}$	$[\![\varphi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$	$[\![\psi]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$	$[\![(\varphi \vee \psi)]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0

  Die 3. und 6. Spalte zeigt, dass $[\![(\widetilde{\varphi} \wedge \widetilde{\psi})]\!]^{\mathcal{I}} = 1 - [\![(\varphi \vee \psi)]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}$ gilt.

- *Implikation:*

  Hier ist nichts zu zeigen, weil das Lemma nur über Formeln ohne Implikation spricht. $\square$

Folie 95

Beweis von Satz 2.28.
Seien $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ Formeln, in denen keine Implikation vorkommt.
Wir wollen zeigen, dass gilt: $\varphi \equiv \psi \iff \widetilde{\varphi} \equiv \widetilde{\psi}$.

„$\Longrightarrow$“: Es gilt:[1]

$$
\begin{aligned}
& \varphi \equiv \psi \\
\Longrightarrow \quad & \text{F.a. Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \big(\widetilde{\mathcal{I}} \models \varphi \iff \widetilde{\mathcal{I}} \models \psi\big) \\
\overset{\text{Lemma 2.30}}{\Longrightarrow} \quad & \text{F.a. Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \big(\mathcal{I} \not\models \widetilde{\varphi} \iff \mathcal{I} \not\models \widetilde{\psi}\big) \\
\Longrightarrow \quad & \text{F.a. Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt: } \big(\mathcal{I} \models \widetilde{\varphi} \iff \mathcal{I} \models \widetilde{\psi}\big) \\
\Longrightarrow \quad & \widetilde{\varphi} \equiv \widetilde{\psi}.
\end{aligned}
$$

[1] Wir schreiben kurz „f.a.“ als Abkürzung für die Worte „für alle“

„$\Longleftarrow$“: Es gilt:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} \equiv \widetilde{\psi} \quad &\Longrightarrow \quad \widetilde{\widetilde{\varphi}} \equiv \widetilde{\widetilde{\psi}} \qquad \text{(andere Beweisrichtung)} \\ &\Longrightarrow \quad \varphi \equiv \psi \qquad \text{(weil } \widetilde{\widetilde{\varphi}} = \varphi \text{ und } \widetilde{\widetilde{\psi}} = \psi\text{).} \end{aligned}$$

□

Folie 96

Funktionale Vollständigkeit der Aussagenlogik

Im Folgenden bezeichnen wir als *Wahrheitstafel* eine Tabelle mit $n{+}1$ Spalten und 2^n Zeilen, die für jedes Tupel $(b_1, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n$ genau eine Zeile enthält, deren erste n Einträge $b_1, \ldots, b_n$ sind.

Satz 2.31 (Funktionale Vollständigkeit der Aussagenlogik)**.**
Zu jeder Wahrheitstafel gibt es eine Formel $\varphi \in AL$ mit dieser Wahrheitstafel.

Mathematisch präzise lässt sich dieser Satzes wie folgt formulieren:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es zu jeder Funktion $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ eine Formel $\varphi(A_1, \ldots, A_n) \in \mathsf{AL}$, so dass für alle $(b_1, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n$ gilt:

$$F(b_1, \ldots, b_n) = 1 \iff \varphi[b_1, \ldots, b_n] = 1.$$

Definition 2.32. Funktionen $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ (mit $n \in \mathbb{N}$) nennt man *Boolesche Funktionen* (der Stelligkeit n).

Bevor wir Satz 2.31 beweisen, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Folie 97

Beispiel 2.33. Betrachte die Wahrheitstafel T:

b_1	b_2	b_3	$F(b_1, b_2, b_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Eine Formel $\varphi(A_1, A_2, A_3)$, so dass T die Wahrheitstafel für φ ist, kann man folgendermaßen erzeugen:

- Betrachte alle Zeilen von T, bei denen in der letzten Spalte eine „1“ steht.
- Für jede solche Zeile konstruiere eine Formel, die genau von der zu der Zeile gehörenden Belegung von b_1, b_2, b_3 erfüllt wird.
- Bilde die Disjunktion (d.h. die „Ver*oder*ung“) über all diese Formeln. Dies liefert die gesuchte Formel φ.

Folie 98

In unserer Beispiel-Wahrheitstafel T gibt es genau 3 Zeilen, bei denen in der letzten Spalte eine „1“ steht, nämlich die Zeilen

b_1	b_2	b_3	$F(b_1, b_2, b_3)$	zur jeweiligen Zeile gehörende Formel:
0	0	0	1	$(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$
0	0	1	1	$(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
1	0	1	1	$(A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Insgesamt erhalten wir dadurch die zur Wahrheitstafel T passende Formel

$$\varphi \quad = \quad (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3).$$

Beweis von Satz 2.31.
Sei $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Falls $F(\bar{b}) = 0$ für alle $\bar{b} \in \{0,1\}^n$, so setzen wir $\varphi(A_1, \ldots, A_n) := \mathbf{0}$.
Im Folgenden betrachten wir also nur noch den Fall, dass es mindestens ein $\bar{b} \in \{0,1\}^n$ mit $F(\bar{b}) = 1$ gibt.
Für jedes $i \in [n]$ sei

$$\lambda_{i,1} \ := \ A_i \qquad \text{und} \qquad \lambda_{i,0} \ := \ \neg A_i\,.$$

Für $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n$ sei

$$\psi_{\bar{b}} \ := \ \big(\ \lambda_{1,b_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{n,b_n}\ \big)$$

Beispiel: Für $n = 3$ und $\bar{b} = (0,1,0)$ ist $\psi_{(0,1,0)} = (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$.
Dann gilt für alle $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \{0,1\}^n$:

$$\psi_{\bar{b}}[\bar{c}] = 1 \iff \bar{b} = \bar{c}.$$

Nun sei
$$\varphi \ := \ \bigvee_{\substack{\bar{b}\in\{0,1\}^n \\ \text{mit } F(\bar{b})=1}} \psi_{\bar{b}} \ .$$

Dann gilt für alle $\bar{c} \in \{0,1\}^n$:

$$\begin{aligned} & \varphi[\bar{c}] = 1 \\ \iff\ & \text{Es gibt ein } \bar{b} \in \{0,1\}^n \text{ mit } F(\bar{b}) = 1 \ \text{ und } \ \psi_{\bar{b}}[\bar{c}] = 1 \\ \iff\ & \text{Es gibt ein } \bar{b} \in \{0,1\}^n \text{ mit } F(\bar{b}) = 1 \ \text{ und } \ \bar{b} = \bar{c} \\ \iff\ & F(\bar{c}) = 1. \end{aligned}$$

□

Folie 99

Adäquatheit

Satz 2.31 besagt, dass die Aussagenlogik AL die größtmögliche Aussdruckstärke hat. Dafür reichen allerdings schon „kleinere" Logiken, wie wir im Folgenden sehen werden.

Definition 2.34. Sei $\tau \subseteq \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$.

(a) $\mathsf{AL}(\tau)$ sei das Fragment der Logik AL, das aus den Formeln besteht, in denen nur Junktoren und Konstanten aus τ vorkommen.

(b) τ heißt *adäquat*, wenn jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ äquivalent zu einer Formel in $\mathsf{AL}(\tau)$ ist.

Beispiele 2.35.

(a) $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\mathbf{0}, \rightarrow\}$ sind adäquat.

(b) $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ist nicht adäquat.

Beweis.

(a) Die Adäquatheit von $\{\neg, \wedge\}$ folgt leicht aus Satz 2.25 (h) (Tertium Non Datur), (f) (doppelte Negation), (g) (De Morgan) und (k) (Elimination der Implikation):

- $\mathbf{0} \ \equiv \ (X \wedge \neg X)$, für jedes $X \in \mathsf{AS}$
- $\mathbf{1} \ \equiv \ (X \vee \neg X)$, für jedes $X \in \mathsf{AS}$
- für alle Formeln φ, ψ gilt:
  - $(\varphi \vee \psi) \ \equiv \ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
  - $(\varphi \to \psi) \ \equiv \ (\neg\varphi \vee \psi)$.

Die Adäquatheit von $\{\neg, \vee\}$ folgt aus der Adäquatheit von $\{\neg, \wedge\}$ und der Tatsache, dass für alle Formeln φ, ψ gilt:

$$(\varphi \wedge \psi) \ \equiv \ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi).$$

Die Adäquatheit von $\{\mathbf{0}, \to\}$ folgt aus der Adäquatheit von $\{\neg, \vee\}$ und der Beobachtung, dass für alle Formeln φ, ψ gilt:

$$\neg\varphi \ \equiv \ (\varphi \to \mathbf{0}) \qquad \text{und} \qquad (\varphi \vee \psi) \ \equiv \ (\neg\varphi \to \psi).$$

Details: Übung.

(b) $\{\wedge, \vee, \to\}$ ist *nicht* adäquat, weil für alle Formeln $\varphi(X_1, \ldots, X_n) \in \mathsf{AL}(\{\wedge, \vee, \to\})$ gilt: $\varphi[1, \ldots, 1] = 1$ (dies kann man per Induktion nach dem Formelaufbau leicht nachweisen; Details: Übung).

□

Folie 100

Andere Junktoren

- Die Auswahl der Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \to$ (und $\leftrightarrow$ als Abkürzung) für „unsere" aussagenlogische Sprache richtet sich nach dem umgangssprachlichen Gebrauch und den Erfordernissen des formalen Schließens, ist aber in gewisser Weise willkürlich.
- Durch Festlegung ihrer Wahrheitstafeln können wir auch andere Junktoren definieren und erhalten daraus andere aussagenlogische Sprachen.
- Für jede Menge τ von so definierten Junktoren und den boolschen Konstanten (die wir als „nullstellige" Junktoren auffassen können) sei $\mathsf{AL}(\tau)$ die daraus gebildete aussagenlogische Sprache.
- Satz 2.31 besagt dann, dass jede Formel in $\mathsf{AL}(\tau)$ zu einer Formel in AL äquivalent ist. Gilt die Umkehrung ebenfalls, so bezeichnen wir τ als *adäquat*.

Folie 101

Beispiele 1: Exklusives Oder

Der 2-stellige Junktor $\oplus$ sei definiert durch

φ	ψ	$\varphi \oplus \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Intuitiv bedeutet $\varphi \oplus \psi$ „*entweder* φ *oder* ψ“.
Man nennt $\oplus$ auch *exklusives Oder*.

Folie 102

Der dreistellige Mehrheitsjunktor

Der 3-stellige Junktor M sei definiert durch

φ	ψ	χ	$M(\varphi, \psi, \chi)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Intuitiv ist $M(\varphi, \psi, \chi)$ also genau dann wahr, wenn mindestens zwei (also die Mehrheit) der Formeln φ, ψ, χ wahr sind.

Folie 103

NAND

Der folgende zweistellige Junktor ist bekannt als *NAND-Gatter* (not-and) oder *Sheffer-Strich*:

φ	ψ	$(\varphi \,|\, \psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Satz 2.36. $\{\,|\,\}$ *ist adäquat.*

Beweis. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass für alle Formeln φ, ψ gilt:

$$\neg\varphi \;\equiv\; (\varphi\,|\,\varphi) \quad \text{und} \quad (\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \neg(\varphi\,|\,\psi)$$

Details: Übung. □

2.4 Normalformen

Folie 104

Vereinfachende Annahme

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Formeln in $\mathsf{AL}(\{\neg, \vee, \wedge\})$.

Rechtfertigung
Die Annahme bedeutet keine wesentliche Einschränkung, weil die Menge $\{\neg, \vee, \wedge\}$ adäquat ist.

Folie 105

NNF

Definition 2.37. Eine Formel ist in *Negationsnormalform (NNF)*, wenn sie zu $\mathsf{AL}(\{\neg, \wedge, \vee\})$ gehört und Negationszeichen nur unmittelbar vor Aussagensymbolen auftreten.

Satz 2.38. *Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer Formel in NNF.*

Beweis. Da $\mathsf{AL}(\{\neg, \wedge, \vee\})$ adäquat ist, genügt es, an Stelle von AL nur $\mathsf{AL}(\{\neg, \wedge, \vee\})$ zu betrachten.

Per Induktion über den Aufbau definieren wir zu jedem $\varphi \in \mathsf{AL}(\{\neg, \wedge, \vee\})$ zwei Formeln φ' und φ'' in NNF, so dass gilt:

$$\varphi \equiv \varphi' \quad \text{und} \quad \neg\varphi \equiv \varphi''. \tag{$\star$}$$

Induktionsanfang:

Falls $\varphi = X$ *für ein* $X \in \mathsf{AS}$*:* Setze $\varphi' := X$ und $\varphi'' := \neg X$.
Dann gilt $(\star)$ offensichtlicherweise.

Induktionsschritt:

Falls $\varphi = \neg\psi$ *für eine Formel* ψ*:* Setze $\varphi' := \psi''$ und $\varphi'' := \psi'$.
Dann folgt $(\star)$ unmittelbar aus der Induktionsannahme.

Falls $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ *für Formeln* ψ_1, ψ_2*:*
Setze $\varphi' := (\psi_1' \wedge \psi_2')$ und $\varphi'' := (\psi_1'' \vee \psi_2'')$.
Gemäß Induktionsannahme gilt $\psi_1 \equiv \psi_1'$ und $\psi_2 \equiv \psi_2'$, und daher gilt auch $\varphi \equiv \varphi'$.
Außerdem gilt gemäß Induktionsannahme, dass $\neg\psi_1 \equiv \psi_1''$ und $\neg\psi_2 \equiv \psi_2''$. Daher gilt auch:

$$\begin{aligned} \neg\varphi &\equiv (\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2) && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv (\psi_1'' \vee \psi_2'') && \text{(Induktionsannahme)} \end{aligned}$$

Also gilt $(\star)$.

Falls $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ *für Formeln* ψ_1, ψ_2*:*
Setze $\varphi' := (\psi_1' \vee \psi_2')$ und $\varphi'' := (\psi_1'' \wedge \psi_2'')$.
Ähnlich wie im Fall, dass $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$, lässt sich zeigen, dass $(\star)$ gilt.

Die Formeln φ' und φ'' sind in NNF, weil Negationszeichen nur im Induktionsanfang verwendet werden und dort unmittelbar vor einem Aussagensymbol stehen. □

Folie 106

Ein NNF-Algorithmus

Eingabe: Formel $\varphi \in \mathsf{AL}(\{\neg, \wedge, \vee\})$.

Ausgabe: Formel φ' in NNF

Verfahren:

1. Wiederhole folgende Schritte:
2. Wenn φ in NNF ist, dann halte mit Ausgabe φ.

3. Ersetze eine Subformel von φ der Gestalt
$\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ durch $(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$
oder eine Subformel der Gestalt
$\neg(\psi_1 \vee \psi_2)$ durch $(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$
oder eine Subformel der Gestalt
$\neg\neg\psi$ durch ψ.

Sei φ' die resultierende Formel.

4. $\varphi := \varphi'$.

Folie 107

Korrektheit des NNF-Algorithmus

Satz 2.39. *Für jede Eingabeformel $\varphi \in \mathsf{AL}(\{\neg, \wedge, \vee\})$ gibt der NNF-Algorithmus nach endlich vielen Schritten eine zu φ äquivalente Formel φ' in NNF aus.*

(hier ohne Beweis)

Bemerkung. Unter Verwendung geeigneter Datenstrukturen lässt sich der NNF-Algorithmus mit linearer Laufzeit implementieren, d.h., Laufzeit $O(n)$ bei Eingabe einer Formel der Länge n.

Folie 108

Beispiel 2.40.
Das Ziel ist, die Formel $\Big(\big(\neg A_0 \wedge \neg\big((A_0 \vee A_1) \to A_0\big)\big) \to \mathbf{0}\Big)$
in NNF zu bringen, d.h. eine zu ihr äquivalente Formel in NNF zu finden.

Lösung: Wir ersetzen zunächst die Konstanten $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ sowie alle Implikationspfeile durch geeignete Formeln aus $\mathsf{AL}(\{\neg, \wedge, \vee\})$ und wenden dann den NNF-Algorithmus an. Der Teil einer Formel, der als Nächstes ersetzt wird, ist im Folgenden jeweils unterstrichen.

$$\begin{aligned}
& \Big(\Big(\neg A_0 \wedge \neg\big((A_0 \vee A_1) \to A_0\big)\Big) \to \underline{\mathbf{0}}\Big) \\
\equiv\ & \Big(\Big(\neg A_0 \wedge \neg\big((A_0 \vee A_1) \to A_0\big)\Big) \underline{\to} (A_0 \wedge \neg A_0)\Big) \\
\equiv\ & \Big(\neg\Big(\neg A_0 \wedge \neg\big((A_0 \vee A_1) \underline{\to} A_0\big)\Big) \vee (A_0 \wedge \neg A_0)\Big) \\
\equiv\ & \Big(\underline{\neg}\Big(\neg A_0 \wedge \neg\big(\neg(A_0 \vee A_1) \vee A_0\big)\Big) \vee (A_0 \wedge \neg A_0)\Big) \\
\equiv\ & \Big(\Big(\underline{\neg\neg} A_0 \vee \underline{\neg\neg}\big(\neg(A_0 \vee A_1) \vee A_0\big)\Big) \vee (A_0 \wedge \neg A_0)\Big) \\
\equiv\ & \Big(\Big(A_0 \vee \big(\underline{\neg}(A_0 \vee A_1) \vee A_0\big)\Big) \vee (A_0 \wedge \neg A_0)\Big) \\
\equiv\ & \Big(\Big(A_0 \vee \big((\neg A_0 \wedge \neg A_1) \vee A_0\big)\Big) \vee (A_0 \wedge \neg A_0)\Big).
\end{aligned}$$

Diese Formel ist offensichtlicherweise in NNF.

Folie 109

Klammern bei Konjunktionen und Disjunktionen

Weil $\wedge$ assoziativ ist, können wir Formeln der Gestalt $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ etwas großzügiger interpretieren. Von nun an stehe $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ für $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ mit *irgendeiner* Klammerung.

Entsprechend verfahren wir mit Disjunktionen.

Beispiel. Die Formel $\bigwedge_{i=1}^{4} \varphi_i$ kann für jede der folgenden Formeln stehen:

$$\begin{gathered}
(((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \varphi_4)\ , \\
((\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \wedge \varphi_4)\ , \\
((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge (\varphi_3 \wedge \varphi_4))\ , \\
(\varphi_1 \wedge ((\varphi_2 \wedge \varphi_3) \wedge \varphi_4))\ , \\
(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\varphi_3 \wedge \varphi_4)))\ .
\end{gathered}$$

Folie 110

DNF und KNF

Definition 2.41.

(a) Ein *Literal* ist eine Formel der Gestalt X oder $\neg X$, wobei $X \in \mathsf{AS}$.

Im ersten Fall sprechen wir von einem *positiven*, im zweiten Fall von einem *negativen* Literal.

(b) Eine Formel ist in *disjunktiver Normalform (DNF)*, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, d.h., wenn sie die Form

$$\bigvee_{i=1}^{n} \Big(\bigwedge_{j=1}^{m_i} \lambda_{i,j} \Big)$$

hat, wobei $n, m_1, \ldots, m_n \geqslant 1$ sind und die $\lambda_{i,j}$ für alle $i \in [n]$ und $j \in [m_i]$ Literale sind.

Die Subformeln $\kappa_i := \bigwedge_{j=1}^{m_i} \lambda_{i,j}$, für $i \in [n]$, nennen wir die *(konjunktiven) Klauseln* der Formel.

Beispiele:

- $(A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_2 \wedge A_1)$ ist in DNF
- $A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3$ ist in DNF (mit $n = 3$ und $m_1 = m_2 = m_3 = 1$)
- $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$ ist in DNF (mit $n = 1$ und $m_1 = 3$) und gleichzeitig ist diese Formel eine konjunktive Klausel

Folie 111

(c) Eine Formel ist in *konjunktiver Normalform (KNF)*, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktion von Literalen ist, d.h., wenn sie die Form

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \Big(\bigvee_{j=1}^{m_i} \lambda_{i,j} \Big)$$

hat, wobei $n, m_1, \ldots, m_n \geqslant 1$ sind und die $\lambda_{i,j}$ für alle $i \in [n]$ und $j \in [m_i]$ Literale sind.

Die Subformeln $\kappa_i := \bigvee_{j=1}^{m_i} \lambda_{i,j}$, für $i \in [n]$, nennen wir die *(disjunktiven) Klauseln* der Formel.

Beispiele:

- $(A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_2 \vee A_1)$ ist in KNF

- $A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3$ ist in KNF (mit $n = 1$ und $m_1 = 3$) und gleichzeitig ist diese Formel eine disjunktive Klausel
- $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$ ist in KNF (mit $n = 3$ und $m_1 = m_2 = m_3 = 1$)

Folie 112

Normalformen spielen in vielen Anwendungsgebieten eine wichtige Rolle. Beispielsweise geht man in der Schaltungstechnik (Hardware-Entwurf) oft von DNF-Formeln aus, während bei der aussagenlogischen Modellbildung oftmals KNF-Formeln auftreten, da sich eine Sammlung von einfach strukturierten Aussagen sehr gut durch eine Konjunktion von Klauseln ausdrücken lässt.

Folie 113

Satz 2.42. *Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer Formel in DNF und zu einer Formel in KNF.*

Beweis. Sei ψ eine Formel.

DNF: Falls ψ unerfüllbar ist, so ist $\psi \equiv X \wedge \neg X$ (für jedes $X \in \mathsf{AS}$). Die Formel $X \wedge \neg X$ ist sowohl in KNF als auch in DNF.

Falls ψ erfüllbar ist, so liefert der Beweis von Satz 2.31, angewendet auf die Wahrheitstafel von ψ (bzw. die von ψ berechnete boolesche Funktion), eine zu ψ äquivalente Formel in DNF (Details: Übung).

KNF: Sei $\widetilde{\psi}$ die zu ψ duale Formel. Man beachte, dass $\widetilde{\widetilde{\psi}} = \psi$.

Sei φ eine zu $\widetilde{\psi}$ äquivalente Formel in DNF (dass es eine solche Formel gibt, haben wir gerade bereits gezeigt), und sei $\widetilde{\varphi}$ die zu φ duale Formel. Dann ist $\widetilde{\varphi}$ offensichtlicherweise in KNF. Und da

$$\widetilde{\psi} \equiv \varphi$$

ist, gilt gemäß dem Dualistätssatz der Aussagenlogik (Satz 2.28), dass

$$\widetilde{\widetilde{\psi}} \equiv \widetilde{\varphi}.$$

Wegen $\widetilde{\widetilde{\psi}} = \psi$ ist ψ also äquivalent zur KNF-Formel $\widetilde{\varphi}$.

$\square$

Folie 114

Bemerkung 2.43. Der Beweis von Satz 2.42 zeigt Folgendes:
Um für eine gegebene Formel ψ eine äquivalente Formel φ in

- DNF zu erzeugen, können wir die Wahrheitstafel für ψ aufstellen und dann wie in Beispiel 2.33 vorgehen (bzw. $\varphi := A_1 \wedge \neg A_1$ setzen, falls ψ unerfüllbar ist).
- KNF zu erzeugen, können wir wie folgt vorgehen:
  (1) Stelle die Wahrheitstafel für ψ auf.
  (2) Falls in der letzten Spalte nur „1"en stehen, setze $\varphi := A_1 \vee \neg A_1$.
  (3) Ansonsten gehe wie folgt vor:
    - Betrachte alle Zeilen der Wahrheitstafel, bei denen in der letzten Spalte eine „0" steht.
    - Für jede solche Zeile konstruiere die disjunktive Klausel, die von allen Interpretationen außer der zur Zeile gehörenden erfüllt wird.

      Beispiel: Wenn die Zeile der Wahrheitstafel die Form

      $$0 \ 1 \ 1 \mid 0$$

      hat, so gehört dazu die disjunktive Klausel

      $$A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3.$$
    - Bilde die Konjunktion all dieser disjunktiven Klauseln. Dies liefert die gesuchte KNF-Formel φ.

Folie 115

Wenn eine Formel sehr viele verschiedene Aussagensymbole enthält, die zur Formel gehörige Wahrheitstafel also sehr groß ist, ist das gerade beschriebene Verfahren zur Umformung in DNF oder KNF sehr zeitaufwändig. In solchen Fällen ist es ratsam, stattdessen zu versuchen, die gewünschte Normalform durch Äquivalenzumformungen zu erzeugen.

Folie 116

Beispiel 2.44. Sei $\varphi := \Big(\big(\neg A_0 \wedge (A_0 \to A_1) \big) \vee (A_2 \to A_3) \Big)$.

Transformation von φ in NNF:

$$\Big(\big(\neg A_0 \wedge (A_0 \underline{\to} A_1) \big) \vee (A_2 \underline{\to} A_3) \Big) \ \equiv \ \underbrace{\Big(\big(\neg A_0 \wedge (\neg A_0 \vee A_1) \big) \vee (\neg A_2 \vee A_3) \Big)}_{=: \ \varphi'}.$$

Transformation in DNF:

Wir betrachten die NNF-Formel

$$\varphi' \;=\; \Big(\underline{(\neg A_0 \wedge (\neg A_0 \vee A_1))} \vee (\neg A_2 \vee A_3)\Big).$$

und wenden die Distributivitätsregel (Satz 2.25(e)) auf die unterstrichene Subformel von φ' an. Dies liefert die Formel

$$\varphi'' \;:=\; \Big(((\underline{\neg A_0 \wedge \neg A_0}) \vee (\underline{\neg A_0 \wedge A_1})) \vee (\underline{\neg A_2} \vee \underline{A_3})\Big).$$

Diese Formel ist in DNF (die einzelnen konjunktiven Klauseln sind jeweils unterstrichen).

Transformation in KNF:

Wir betrachten die NNF-Formel

$$\varphi' = \Big((\neg A_0 \wedge (\neg A_0 \vee A_1)) \;\underline{\vee}\; (\neg A_2 \vee A_3)\Big).$$

und wenden die Distributivitätsregel (Satz 2.25(e)) auf den unterstrichenen Teil der Formel φ' an. Dies liefert die Formel

$$\varphi'' \;:=\; \Big((\underline{\neg A_0 \vee (\neg A_2 \vee A_3)}) \wedge (\underline{(\neg A_0 \vee A_1) \vee (\neg A_2 \vee A_3)})\Big).$$

Dies ist eine KNF-Formel (die einzelnen disjunktiven Klauseln sind jeweils unterstrichen).

Je nach Formel muss man ggf. die Distributivitätsregel mehrmals anwenden, bis man eine Formel der gewünschten Normalform erhält.

Folie 117

Ein DNF-Algorithmus

Eingabe: Formel $\varphi \in \mathsf{AL}(\{\neg, \wedge, \vee\})$ in NNF.

Ausgabe: Formel φ'' in DNF

Verfahren:

1. Wiederhole folgende Schritte:
2. Wenn φ in DNF ist, dann halte mit Ausgabe φ.

3. Ersetze eine Subformel von φ der Gestalt
   $(\psi_1 \wedge (\psi_2 \vee \psi_3))$ durch $((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3))$
   oder eine Subformel der Gestalt
   $((\psi_1 \vee \psi_2) \wedge \psi_3)$ durch $((\psi_1 \wedge \psi_3) \vee (\psi_2 \wedge \psi_3))$.
   Sei φ' die resultierende Formel.
4. $\varphi := \varphi'$.

Satz 2.45. *Für jede Eingabeformel φ in NNF gibt der DNF-Algorithmus nach endlich vielen Schritten eine zu φ äquivalente Formel φ'' in DNF aus.*

(hier ohne Beweis)

Analog kann man auch einen „KNF-Algorithmus“ angeben, der bei Eingabe einer NNF-Formel eine äquivalente Formel in KNF erzeugt (Details: Übung).

Folie 118

Eine kleine Formel mit großer DNF

Die Transformation einer Formel in eine äquivalente DNF- oder KNF-Formel kann u.U. allerdings sehr lang dauern, da es einige Formeln gibt, zu denen äquivalente DNF-Formeln zwangsläufig sehr groß sind. Dies wird durch den folgenden Satz präzisiert.

Satz 2.46. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$, seien $X_1, \dots, X_n$ und $Y_1, \dots, Y_n$ genau $2n$ verschiedene Aussagensymbole und sei*

$$\varphi_n \;:=\; \bigwedge_{i=1}^{n} (\, X_i \vee \neg Y_i \,) .$$

Jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF hat mindestens 2^n konjunktive Klauseln.

Beweis: Übung

Korollar 2.47. *<u>Jeder</u> Algorithmus, der bei Eingabe von beliebigen aussagenlogischen Formeln dazu äquivalente Formeln in DNF erzeugt, hat eine Laufzeit, die im worst-case exponentiell ist, d.h., $2^{\Omega(n)}$ bei Eingabe von Formeln der Länge n.*

2.5 Der Endlichkeitssatz

Folie 119

Der Endlichkeitssatz (auch bekannt als Kompaktheitssatz)

Um nachzuweisen, dass eine gegebene *unendliche* Formelmenge erfüllbar ist, ist der folgende Satz sehr nützlich.

Satz 2.48 (Der Endlichkeitssatz der Aussagenlogik).
Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ *gilt:*

$$\Phi \textit{ ist erfüllbar} \iff \textit{Jede } \underline{\textit{endliche}} \textit{ Teilmenge von } \Phi \textit{ ist erfüllbar.}$$

Korollar 2.49 (Variante des Endlichkeitssatzes).
Sei $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ *und sei* $\psi \in \mathsf{AL}$*. Dann gilt:*

$$\Phi \models \psi \iff \textit{Es gibt eine endliche Teilmenge } \Gamma \textit{ von } \Phi\textit{, so dass } \Gamma \models \psi.$$

Beweis von Korollar 2.49 unter Verwendung von Satz 2.48.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi \models \psi &\iff \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ ist unerfüllbar} && \text{(Lemma 2.19)}\\
&\iff \text{es gibt eine endliche Teilmenge } \Gamma \text{ von } \Phi \text{, so dass } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \text{ unerfüllbar ist} && \text{(Endlichkeitssatz)}\\
&\iff \text{es gibt eine endliche Teilmenge } \Gamma \text{ von } \Phi \text{, so dass } \Gamma \models \psi && \text{(Lemma 2.19).}
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 2.48.
Die Richtung „$\Longrightarrow$“ ist offensichtlich, denn eine Interpretation, die Φ erfüllt, erfüllt auch jede Teilmenge von Φ.

Für die Richtung „$\Longleftarrow$“ sei jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar. Ziel ist, zu zeigen, dass es eine Interpretation gibt, die alle Formeln in Φ erfüllt.
Zunächst definieren wir dazu rekursiv für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Menge Ψ_i. Wir starten mit $\Psi_0 := \Phi$ und wählen für alle $i \in \mathbb{N}$ die Menge Ψ_{i+1} wie folgt (zur Erinnerung: $\mathsf{AS} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$):

- Falls jede endliche Teilmenge von $\Psi_i \cup \{A_i\}$ erfüllbar ist, so setze $\Psi_{i+1} := \Psi_i \cup \{A_i\}$,

- ansonsten, falls jede endliche Teilmenge von $\Psi_i \cup \{\neg A_i\}$ erfüllbar ist, setze $\Psi_{i+1} := \Psi_i \cup \{\neg A_i\}$,
- ansonsten setze $\Psi_{i+1} := \Psi_i$.

Sei weiterhin
$$\Psi \ := \ \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Psi_i.$$
Offensichtlicherweise gilt
$$\Phi \ = \ \Psi_0 \ \subseteq \ \Psi_1 \ \subseteq \ \Psi_2 \ \subseteq \ \Psi_3 \ \subseteq \ \cdots \ \subseteq \ \Psi.$$

Behauptung 1.
Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt: Jede endliche Teilmenge von Ψ_i ist erfüllbar.

Beweis. Per Induktion nach i.

$i = 0$*:* Es gilt $\Psi_0 = \Phi$, und nach Voraussetzung ist jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar.

$i \to i{+}1$*:* Falls $\Psi_{i+1} = \Psi_i$, so ist gemäß Induktionsannahme jede endliche Teilmenge von Ψ_{i+1} erfüllbar. Ansonsten ist per Definition von Ψ_{i+1} jede endliche Teilmenge von Ψ_{i+1} erfüllbar. $\square_{Beh.1}$

Behauptung 2.
Jede endliche Teilmenge von Ψ ist erfüllbar.

Beweis. Jede endliche Teilmenge von Ψ ist in einem Ψ_i (für ein $i \in \mathbb{N}$) enthalten und daher gemäß Behauptung 1 erfüllbar. $\square_{Beh.2}$

Behauptung 3.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A_n \in \Psi$ oder $\neg A_n \in \Psi$ (aber nicht beides, weil gemäß Behauptung 2 jede endliche Teilmenge von Ψ erfüllbar ist).

Beweis. Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass weder A_n noch $\neg A_n$ zur Menge Ψ gehört.
Gemäß der Definition der Mengen Ψ und Ψ_i für $i \in \mathbb{N}$ gilt dann: $A_n \notin \Psi_{n+1}$ und $\neg A_n \notin \Psi_{n+1}$. Daher gibt es gemäß der Definition von Ψ_{n+1} also endliche Teilmengen Γ_+ und Γ_- von Ψ_n, so dass weder $\Gamma_+ \cup \{A_n\}$ noch $\Gamma_- \cup \{\neg A_n\}$ erfüllbar ist.
Weil $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ eine endliche Teilmenge von Ψ_n ist, ist $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ gemäß Behauptung 1 erfüllbar. Sei also $\mathcal{I}$ ein Modell von $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$. Falls $\mathcal{I}(A_n) = 1$, so gilt $\mathcal{I} \models \Gamma_+ \cup \{A_n\}$. Falls $\mathcal{I}(A_n) = 0$, so gilt $\mathcal{I} \models \Gamma_- \cup \{\neg A_n\}$. Also ist doch eine der beiden Mengen erfüllbar. *Widerspruch.* $\square_{Beh.3}$

Gemäß Behauptung 3 können wir nun eine Interpretation $\mathcal{I} : \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ definieren, indem wir für alle $i \in \mathbb{N}$ setzen:

$$\mathcal{I}(A_i) \ := \ \begin{cases} 1 & \text{falls } \ A_i \in \Psi, \\ 0 & \text{falls } \ \neg A_i \in \Psi. \end{cases}$$

Behauptung 4.

$$\mathcal{I} \models \Psi.$$

Beweis. Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es eine Formel $\psi \in \Psi$, so dass $\mathcal{I} \not\models \psi$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass in ψ nur Aussagensymbole aus $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ vorkommen. Für $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ sei $\varphi_i := A_i$ falls $A_i \in \Psi$, und $\varphi_i := \neg A_i$ falls $\neg A_i \in \Psi$. Dann ist $\Gamma := \{\psi, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ eine endliche Teilmenge von Ψ und daher gemäß Behauptung 2 erfüllbar. Sei $\mathcal{J}$ also ein Modell von Γ. Für jedes $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ gilt $\mathcal{J} \models \varphi_i$, und daher $\mathcal{J}(A_i) = \mathcal{I}(A_i)$. Wegen $\mathcal{J} \models \psi$ folgt aus dem Koinzidenzlemma, dass $\mathcal{I} \models \psi$. *Widerspruch.* $\square_{\mathit{Beh.4}}$

Gemäß Behauptung 4 ist $\mathcal{I}$ ein Modell von Ψ und wegen $\Phi \subseteq \Psi$ auch ein Modell von Φ. Daher ist Φ erfüllbar. $\square$

Folie 120

Anwendung: Färbbarkeit

Zur Erinnerung:

- Ein *Graph* $G = (V,E)$ besteht aus einer nicht-leeren Menge V von Knoten und einer Menge $E \subseteq \big\{\{x,y\} : x,y \in V,\ x \neq y\big\}$ von (ungerichteten) Kanten.
- Ein *Subgraph* eines Graphen $G = (V,E)$ ist ein Graph $H = (V',E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- Ein Graph ist endlich (bzw. unendlich), wenn seine Knotenmenge endlich (bzw. unendlich) ist.

Definition 2.50. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant 1$.
Eine *k-Färbung* eines Graphen $G = (V,E)$ ist eine Abbildung $f : V \to [k]$, so dass für alle Kanten $\{v,w\} \in E$ gilt: $f(v) \neq f(w)$.
G heißt *k-färbbar*, falls es eine k-Färbung von G gibt.

Satz 2.51. *Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant 1$.*
Ein unendlicher Graph G mit Knotenmenge $\mathbb{N}$ ist genau dann k-färbbar, wenn jeder endliche Subgraph von G k-färbbar ist.

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant 1$ und sei $G = (V, E)$ ein unendlicher Graph mit Knotenmenge $V = \mathbb{N}$.
Zum Beweis des Satzes bilden wir ein aussagenlogisches Modell und wenden den Endlichkeitssatz an. Wir betrachten dazu

- Aussagensymbole $X_{v,i}$ für alle $v \in V$ und $i \in [k]$, die besagen: „Knoten v erhält Farbe i."
- für jeden Knoten $v \in V$ eine Formel

$$\varphi_v \;:=\; \bigvee_{i \in [k]} \Big(X_{v,i} \,\wedge\, \bigwedge_{\substack{j \in [k] \\ j \neq i}} \neg X_{v,j} \Big),$$

  die besagt: „Knoten v erhält genau eine Farbe."

- für jede Kante $\{v, w\} \in E$ eine Formel

$$\psi_{\{v,w\}} \;:=\; \bigwedge_{i=1}^{k} \neg(X_{v,i} \wedge X_{w,i}),$$

  die besagt: „Benachbarte Knoten erhalten verschiedene Farben."

Für jeden Subgraphen $H = (V', E')$ von G sei

$$\Phi_H \;:=\; \{\, \varphi_v \;:\; v \in V' \,\} \;\cup\; \{\, \psi_{\{v,w\}} \;:\; \{v, w\} \in E' \,\}.$$

Man sieht leicht, dass gilt:

$$\Phi_H \text{ ist erfüllbar} \iff H \text{ ist } k\text{-färbbar}. \tag{2.1}$$

Falls H endlich ist, so ist auch Φ_H endlich. Außerdem gibt es für jede endliche Teilmenge Γ von Φ_G einen endlichen Subgraphen H von G, so dass $\Gamma \subseteq \Phi_H$. Daher gilt:

$$\begin{array}{c}\text{Jede endliche Teilmenge} \\ \text{von } \Phi_G \text{ ist erfüllbar.}\end{array} \iff \begin{array}{c}\text{Für jeden endlichen Subgra-} \\ \text{phen } H \text{ von } G \text{ ist } \Phi_H \text{ erfüllbar.}\end{array} \tag{2.2}$$

Insgesamt erhalten wir:

	G ist k-färbar	
$\iff$	Φ_G ist erfüllbar	(2.1)
$\iff$	jede endliche Teilmenge von Φ_G ist erfüllbar	(Endlichkeitssatz)
$\iff$	für jeden endlichen Subgraphen H von G ist Φ_H erfüllbar	(2.2)
$\iff$	jeder endliche Subgraph H von G ist k-färbbar	(2.1).

□

2.6 Resolution

Folie 121

Um nachzuweisen, dass eine gegebene KNF-Formel *unerfüllbar* ist, ist das im Folgenden vorgestellte Resolutionsverfahren nützlich.

Beispiel 2.52. Wir wollen nachweisen, dass die KNF-Formel

$$\varphi := (\neg P \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (Q \vee R \vee T) \wedge \neg T \wedge (\neg S \vee R)$$

unerfüllbar ist. Dazu können wir wie folgt argumentieren:

Angenommen, eine Interpretation $\mathcal{I}$ erfüllt φ.

- Dann gilt $\mathcal{I} \models \neg T$.
- Aus $\mathcal{I} \models Q \vee R \vee T$ und $\mathcal{I} \models \neg T$ folgt dann $\mathcal{I} \models Q \vee R$.
- Aus $\mathcal{I} \models Q \vee R$ und $\mathcal{I} \models \neg Q \vee S$ folgt $\mathcal{I} \models R \vee S$.
- Aus $\mathcal{I} \models R \vee S$ und $\mathcal{I} \models \neg S \vee R$ folgt $\mathcal{I} \models R$.
- Aus $\mathcal{I} \models \neg P \vee \neg R$ und $\mathcal{I} \models P \vee \neg R$ folgt $\mathcal{I} \models \neg R$.

  Das ist ein *Widerspruch*. Somit ist φ *nicht* erfüllbar.

Folie 122

Umwandlung in kleine KNF-Formeln

Das Resolutionsverfahren, das wir im Folgenden vorstellen, funktioniert nur für KNF-Formeln.

Wir wissen bereits:

- Zu jeder Formel φ gibt es eine äquivalente Formel in KNF.
- Aber möglicherweise ist die kleinste zu φ äquivalente KNF-Formel exponentiell groß in der Größe von φ.

Wenn es uns nur um die Frage geht, ob eine Formel φ *(un)erfüllbar* ist, ist es aber auch gar nicht nötig, eine zu φ *äquivalente* KNF-Formel zu finden. Es reicht, eine zu φ *erfüllbarkeitsäquivalente* KNF-Formel zu konstruieren.

Definition 2.53. Zwei Formeln φ und ψ heißen *erfüllbarkeitsäquivalent*, falls gilt:

$$\varphi \text{ ist erfüllbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \text{ ist erfüllbar.}$$

Folie 123

Eine beliebige Formel in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* KNF-Formel umzuwandeln, ist in Linearzeit möglich.

Beispiel 2.54. Um die Formel

$$\varphi \ := \quad (\, P \to \neg Q \,) \ \lor \ (\, \neg \, (\, P \land Q \,) \ \land \ R \,)$$

in eine erfüllbarkeitsäquivalente KNF-Formel umzuformen, können wir wie folgt vorgehen.

1. Schritt: Wir listen alle Subformeln von φ auf, die <u>keine</u> Literale sind:

$$\varphi \ := \quad \underbrace{(\, P \to \neg Q \,)}_{\psi_1} \ \lor \ \underbrace{(\, \underbrace{\neg \underbrace{(\, P \land Q \,)}_{\psi_4}}_{\psi_3} \ \land \ R \,)}_{\psi_2}\,.$$

Für jede Subformel ψ von φ sei X_ψ ein neues Aussagensymbol, das die Aussage „die Subformel ψ ist wahr“ repräsentiert.

Wir wählen

$$
\begin{array}{rll}
\varphi' := & X_\varphi & \\
& \wedge\ \big(X_\varphi \leftrightarrow \big(X_{\psi_1} \vee X_{\psi_2}\big)\big) & (\text{da}\ \ \varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)) \\
& \wedge\ \big(X_{\psi_1} \leftrightarrow \big(P \to \neg Q\big)\big) & (\text{da}\ \ \psi_1 = (P \to \neg Q)) \\
& \wedge\ \big(X_{\psi_2} \leftrightarrow \big(X_{\psi_3} \wedge R\big)\big) & (\text{da}\ \ \psi_2 = (\psi_3 \wedge R)) \\
& \wedge\ \big(X_{\psi_3} \leftrightarrow \neg X_{\psi_4}\big) & (\text{da}\ \ \psi_3 = \neg\psi_4) \\
& \wedge\ \big(X_{\psi_4} \leftrightarrow \big(P \wedge Q\big)\big) & (\text{da}\ \ \psi_4 = (P \wedge Q))
\end{array}
$$

Man sieht leicht, dass gilt:

$$\varphi \text{ ist erfüllbar} \iff \varphi' \text{ ist erfüllbar.}$$

2. Schritt: Die im 1. Schritt konstruierte Formel φ' ist eine Konjunktion von Teilformeln mit jeweils höchstens 3 Aussagensymbolen. Wir wandeln jetzt jede dieser Teilformeln in eine äquivalente KNF-Formel um und erhalten damit auch insgesamt eine zu φ' äquivalente KNF-Formel

$$
\begin{array}{rl}
\varphi_K := & X_\varphi \\
& \wedge\ \big(\neg X_\varphi \vee X_{\psi_1} \vee X_{\psi_2}\big)\ \wedge\ \big(X_\varphi \vee \neg X_{\psi_1}\big)\ \wedge\ \big(X_\varphi \vee \neg X_{\psi_2}\big) \\
& \wedge\ \big(\neg X_{\psi_1} \vee \neg P \vee \neg Q\big)\ \wedge\ \big(P \vee X_{\psi_1}\big)\ \wedge\ \big(Q \vee X_{\psi_1}\big) \\
& \wedge\ \big(\neg X_{\psi_2} \vee X_{\psi_3}\big)\ \wedge\ \big(\neg X_{\psi_2} \vee R\big)\ \wedge\ \big(\neg X_{\psi_3} \vee \neg R \vee X_{\psi_2}\big) \\
& \wedge\ \big(\neg X_{\psi_3} \vee \neg X_{\psi_4}\big)\ \wedge\ \big(X_{\psi_4} \vee X_{\psi_3}\big) \\
& \wedge\ \big(\neg X_{\psi_4} \vee P\big)\ \wedge\ \big(\neg X_{\psi_4} \vee Q\big)\ \wedge\ \big(\neg P \vee \neg Q \vee X_{\psi_4}\big).
\end{array}
$$

Da φ_K äquivalent zu φ' und φ' erfüllbarkeitsäquivalent zu φ ist, ist insgesamt φ_K erfüllbarkeitsäquivalent zu φ.

Folie 124

Das Tseitin-Verfahren

Auf die gleiche Weise wie in Beispiel 2.54 können wir jede beliebige aussagenlogische Formel in eine erfüllbarkeitsäquivalente KNF-Formel umwandeln. Dieses Verfahren wird *Tseitin-Verfahren* genannt. Eine Laufzeitanalyse zeigt, dass das Tseitin-Verfahren in Linearzeit durchgeführt werden kann. Insgesamt erhalten wir so den folgenden Satz.

Satz 2.55. *Zu jeder aussagenlogischen Formel φ gibt es eine aussagenlogische Formel φ_K mit folgenden Eigenschaften:*

(a) φ_K *ist erfüllbarkeitsäquivalent zu* φ.

(b) φ_K *ist in 3-KNF, d.h., in KNF, wobei jede disjunktive Klausel aus höchstens 3 Literalen besteht (wir sagen: die Klauseln haben Länge* $\leqslant 3$*).*

(c) $|\varphi_K| = O(|\varphi|)$.

Außerdem gibt es einen Algorithmus, der φ_K *bei Eingabe von* φ *in Linearzeit berechnet.*

Beweis: Übung.

Notation. $|\varphi|$ bezeichnet die *Länge* (bzw. *Größe*) einer aussagenlogischen Formel φ, d.h. die Länge von φ aufgefasst als Wort über dem Alphabet A_{AL}.

Folie 125

Repräsentation von KNF-Formeln

Für den Rest diese Abschnitts werden wir nur noch KNF-Formeln betrachten, und wenn wir von *Klauseln* sprechen, meinen wir stets *disjunktive Klauseln*, also Disjunktionen von Literalen.

Für das Resolutionsverfahren ist die folgende Repräsentation von Klauseln und KNF-Formeln sehr hilfreich:

- Eine Klausel $(\lambda_1 \vee \cdots \vee \lambda_\ell)$, die aus Literalen $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ besteht, identifizieren wir mit der Menge $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell\}$ ihrer Literale.

  Beispiel: Wir schreiben z.B. $\{A_1, \neg A_2, A_3\}$ um die Klausel $(A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$ zu bezeichnen.

  D.h.: Ab jetzt sind disjunktive Klauseln für uns dasselbe wie endliche Mengen von Literalen. *Wenn wir von einer Klausel sprechen, meinen wir eine endliche Menge von Literalen* und identifizieren diese mit der Formel, die aus der Disjunktion all dieser Literale besteht.

  Spezialfall: Die leere Menge $\emptyset$ entspricht der unerfüllbaren Formel $\mathbf{0}$ (die wiederum der „Formel“ entspricht, die aus der Disjunktion aller Literale aus $\emptyset$ besteht).

Folie 126

- Eine KNF-Formel $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} \gamma_i$, die aus (disjunktiven) Klauseln $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ besteht, identifizieren wir mit der Menge $\Gamma := \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ ihrer Klauseln.

  Offensichtlicherweise gilt für alle Interpretationen $\mathcal{I}$:

  $$\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \Gamma.$$

  Beispiel: Die KNF-Formel $\varphi = A_1 \wedge (\neg A_2 \vee A_1) \wedge (A_3 \vee \neg A_2 \vee \neg A_1)$ repräsentieren wir durch die endliche Klauselmenge

  $$\{\ A_1,\ \ (\neg A_2 \vee A_1),\ \ (A_3 \vee \neg A_2 \vee \neg A_1)\ \}$$

  bzw. durch

  $$\{\ \{A_1\},\ \ \{\neg A_2, A_1\},\ \ \{A_3, \neg A_2, \neg A_1\}\ \}$$

„Erfüllbarkeit von KNF-Formeln“ ist damit im Wesentlichen dasselbe Problem wie „Erfüllbarkeit von endlichen Mengen von Klauseln“.

Folie 127

Resolution

Notation. Für ein Literal λ sei

$$\bar{\lambda} := \begin{cases} \neg X\,, & \text{falls } \lambda \text{ von der Form } X \text{ für ein } X \in \mathsf{AS} \text{ ist} \\ X\,, & \text{falls } \lambda \text{ von der Form } \neg X \text{ für ein } X \in \mathsf{AS} \text{ ist.} \end{cases}$$

Wir nennen $\overline{\lambda}$ auch das *Negat* von λ.

Definition 2.56 (Resolutionsregel)**.**
Seien γ_1, γ_2 und δ endliche Mengen von Literalen (d.h. disjunktive Klauseln). Dann ist δ eine *Resolvente* von γ_1 und γ_2, wenn es ein Literal λ gibt, so dass gilt:

$$\lambda \in \gamma_1, \qquad \overline{\lambda} \in \gamma_2 \qquad \textit{und} \qquad \delta = \big(\gamma_1 \setminus \{\lambda\}\big) \ \cup\ \big(\gamma_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}\big).$$

Graphische Darstellung:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \gamma_1 \arrow[dr, no head] & & \gamma_2 \arrow[dl, no head] \\ & \delta & \end{tikzcd}$$

„δ ist eine Resolvente von γ_1 und γ_2."

Beispiele.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{P, \neg S, \neg T\} \arrow[dr, no head] & & \{\neg Q, R, S, \neg T\} \arrow[dl, no head] \\ & \{P, \neg T, \neg Q, R\} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \{P\} \arrow[dr, no head] & & \{\neg P\} \arrow[dl, no head] \\ & \emptyset & \end{tikzcd}$$

Folie 128

Das Resolutionslemma

Notation. Ein *Klausel* ist eine endliche Menge von Literalen (eine solche Klausel repräsentiert die Disjunktion der in ihr enthaltenen Literale).
Eine *Klauselmenge* ist eine (endliche oder unendliche) Menge von Klauseln.

Lemma 2.57 (Resolutionslemma)**.** *Sei Γ eine Klauselmenge, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ und sei δ eine Resolvente von γ_1 und γ_2. Dann sind die Klauselmengen Γ und $\Gamma \cup \{\delta\}$ äquivalent.*

Beweis. Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation. Wir zeigen:

$$\mathcal{I} \models \Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\delta\}.$$

„$\Longleftarrow$": Trivial.

„$\Longrightarrow$": Es gelte $\mathcal{I} \models \Gamma$. Wir müssen zeigen, dass auch gilt: $\mathcal{I} \models \delta$.

Da δ eine Resolvente von γ_1 und γ_2 ist, gibt es ein Literal λ, so dass $\delta \ = \ \big(\gamma_1 \setminus \{\lambda\}\big) \cup \big(\gamma_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}\big)$.

Fall 1: $\mathcal{I} \models \lambda$.
Dann gilt: $\mathcal{I} \not\models \overline{\lambda}$. Wegen $\mathcal{I} \models \gamma_2$, muss es ein Literal $\mu \in \gamma_2 \setminus \{\overline{\lambda}\} \subseteq \delta$ geben, so dass $\mathcal{I} \models \mu$. Also gilt $\mathcal{I} \models \delta$.

Fall 2: $\mathcal{I} \not\models \lambda$.
Wegen $\mathcal{I} \models \gamma_1$, muss es ein Literal $\mu \in \gamma_1 \setminus \{\lambda\} \subseteq \delta$ geben, so dass $\mathcal{I} \models \mu$. Also gilt $\mathcal{I} \models \delta$.

In beiden Fällen gilt $\mathcal{I} \models \delta$. Insgesamt gilt also $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\delta\}$.

□

Folie 129

Resolutionsableitungen und -widerlegungen

Definition. Sei Γ eine Klauselmenge.

(a) Eine *Resolutionsableitung* einer Klausel δ aus Γ ist ein Tupel $(\delta_1, \ldots, \delta_\ell)$ von Klauseln, so dass gilt: $\ell \geqslant 1$, $\delta_\ell = \delta$, und für alle $i \in [\ell]$ ist

- $\delta_i \in \Gamma$, oder
- es gibt $j, k \in [i{-}1]$, so dass δ_i eine Resolvente von δ_j und δ_k ist.

(b) Eine *Resolutionswiderlegung* von Γ ist eine Resolutionsableitung der leeren Klausel aus Γ.

Zur Erinnerung:
Eine Klausel δ ist genau dann eine *Resolvente* zweier Klauseln γ_1 und γ_2, wenn es ein Literal λ gibt, so dass gilt:

$$\lambda \in \gamma_1, \qquad \overline{\lambda} \in \gamma_2 \qquad \textit{und} \qquad \delta = \big(\gamma_1 \setminus \{\lambda\}\big) \cup \big(\gamma_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}\big).$$

Folie 130

Notation 2.58.

(a) Wir schreiben kurz $\Gamma \vdash_R \delta$ um auszudrücken, dass es eine Resolutionsableitung von δ aus Γ gibt.
Insbesondere bedeutet $\Gamma \vdash_R \emptyset$, dass es eine Resolutionswiderlegung von Γ gibt.

(b) An Stelle von $(\delta_1, \ldots, \delta_\ell)$ schreiben wir Resolutionsableitungen der besseren Lesbarkeit halber oft zeilenweise, also

$$\begin{array}{ll} (1) & \delta_1 \\ (2) & \delta_2 \\ \vdots & \\ (\ell) & \delta_\ell \end{array}$$

und geben am Ende jeder Zeile eine kurze Begründung an.

Folie 131

Beispiel 2.59. Sei

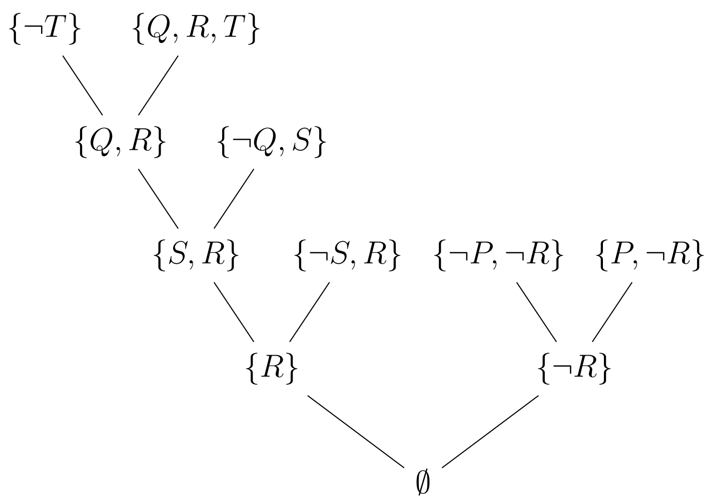
$$\Gamma \ := \ \big\{ \, \{\neg P, \neg R\}\, ,\ \{P, \neg R\}\, ,\ \{\neg Q, S\}\, ,\ \{Q, R, T\}\, ,\ \{\neg T\}\, ,\ \{\neg S, R\} \, \big\}$$

Eine Resolutionswiderlegung von Γ ist:

(1)	$\{\neg T\}$	(in Γ)
(2)	$\{Q, R, T\}$	(in Γ)
(3)	$\{Q, R\}$	(Resolvente von (1), (2))
(4)	$\{\neg Q, S\}$	(in Γ)
(5)	$\{S, R\}$	(Resolvente von (3), (4))
(6)	$\{\neg S, R\}$	(in Γ)
(7)	$\{R\}$	(Resolvente von (5), (6))
(8)	$\{\neg P, \neg R\}$	(in Γ)
(9)	$\{P, \neg R\}$	(in Γ)
(10)	$\{\neg R\}$	(Resolvente von (8), (9))
(11)	$\emptyset$	(Resolvente von (7), (10))

Folie 132

Graphische Darstellung der Resolutionswiderlegung



Folie 133

Korrektheit und Vollständigkeit der Resolution

Satz 2.60. *Für jede Klauselmenge* Γ *gilt:*

$$\Gamma \vdash_R \emptyset \iff \Gamma \textit{ ist unerfüllbar.}$$

D.h.: Eine Klauselmenge hat genau dann eine Resolutionswiderlegung, wenn sie unerfüllbar ist.

Beweis. Sei Γ eine Klauselmenge. Wir müssen zeigen:

$$\Gamma \text{ hat eine Resolutionswiderlegung} \quad \iff \quad \Gamma \text{ ist unerfüllbar.}$$

„$\Longrightarrow$" („Korrektheit des Resolutionskalküls"):
Sei $(\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell)$ eine Resolutionswiderlegung von Γ. Dann ist $\gamma_\ell = \emptyset$. Sei $\Gamma_0 := \Gamma$ und $\Gamma_i := \Gamma \cup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_i\}$ für alle $i \in [\ell]$. Per Induktion zeigen wir, dass für alle $i \in \{0, \ldots, \ell\}$ gilt: $\Gamma \equiv \Gamma_i$. Dann sind wir fertig, denn Γ_ℓ ist unerfüllbar, weil es die leere Klausel $\emptyset$ enthält.

$i = 0$: Trivial.

$i \to i{+}1$:
Falls $\gamma_{i+1} \in \Gamma$, so gilt $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$, und damit gilt trivialerweise $\Gamma_{i+1} \equiv \Gamma_i$.
Andernfalls gibt es $j, k \in [i]$, so dass γ_{i+1} eine Resolvente von γ_j und γ_k ist. Wegen $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\gamma_{i+1}\}$ folgt aus dem Resolutionslemma, dass $\Gamma_{i+1} \equiv \Gamma_i$. Da gemäß Induktionsannahme $\Gamma \equiv \Gamma_i$ ist, folgt insgesamt, dass $\Gamma \equiv \Gamma_{i+1}$.

„$\Longleftarrow$" („Vollständigkeit des Resolutionskalküls"):
Wir zeigen zunächst folgende Behauptung:

Behauptung 1: Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei Γ eine unerfüllbare Klauselmenge die nur Aussagensymbole in $\{A_i \ : \ 0 \leqslant i < n\}$ enthält.
Dann besitzt Γ eine Resolutionswiderlegung.

Beweis: Per Induktion nach n.

$n = 0$: Γ ist eine unerfüllbare Klauselmenge, die kein(e) Aussagensymbol(e) enthält. Somit ist $\Gamma = \{\emptyset\}$. Insbesondere ist $(\emptyset)$ ist eine Resolutionswiderlegung von Γ.

Induktionsschritt: $n \to n{+}1$.

Sei Γ eine unerfüllbare Klauselmenge mit Aussagensymbolen in $\{A_0, \ldots, A_n\}$.

Seien

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &:= \big\{ \gamma \setminus \{A_n\} \ : \ \gamma \in \Gamma \text{ mit } \neg A_n \notin \gamma \big\}, \\ \Gamma_- &:= \big\{ \gamma \setminus \{\neg A_n\} \ : \ \gamma \in \Gamma \text{ mit } A_n \notin \gamma \big\}. \end{aligned}$$

Dann enthalten Γ_+ und Γ_- nur Aussagensymbole aus $\{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$.

Behauptung 2: Γ_+ ist unerfüllbar.

Beweis: Angenommen, Γ_+ ist erfüllbar.

Sei $\mathcal{I}_+$ ein Modell von Γ_+, d.h. $\mathcal{I}_+ \models \Gamma_+$.
Sei $\mathcal{I}$ die Interpretation mit $\mathcal{I}(A_n) := 0$ und $\mathcal{I}(X) := \mathcal{I}_+(X)$ für alle $X \in \mathsf{AS} \setminus \{A_n\}$.
Gemäß Koinzidenzlemma gilt dann: $\mathcal{I} \models \Gamma_+$.
Aus der Definition von Γ_+ folgt, dass für alle $\gamma \in \Gamma$ mit $\neg A_n \notin \gamma$ gilt: $\mathcal{I} \models \gamma$.
Wegen $\mathcal{I}(A_n) = 0$ gilt außerdem für alle $\gamma \in \Gamma$ mit $\neg A_n \in \gamma$, dass $\mathcal{I} \models \gamma$.
Somit gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma$. Das ist ein *Widerspruch*, denn Γ ist laut Voraussetzung unerfüllbar. $\square_{\textit{Beh.2}}$

Behauptung 3: Γ_- ist unerfüllbar.

Beweis: Analog zum Beweis von Behautung 2. $\square_{\textit{Beh.3}}$

Behauptung 4: Es gilt: $\Gamma \vdash_R \emptyset$ oder $\Gamma \vdash_R \{A_n\}$.

Beweis: Gemäß Behauptung 2 und der Induktionsannahme hat Γ_+ eine Resolutionswiderlegung, etwa $(\gamma_1^+, \ldots, \gamma_\ell^+)$. Per Induktion nach i definieren wir für jedes $i \in [\ell]$ eine Klausel γ_i wie folgt:

- Falls $\gamma_i^+ \in \Gamma_+ \cap \Gamma$, so wähle $\gamma_i := \gamma_i^+$.
  Klar: Dann ist $\gamma_i \in \Gamma$.
- Falls $\gamma_i^+ \in \Gamma_+ \setminus \Gamma$, so wähle $\gamma_i := \gamma_i^+ \cup \{A_n\}$.
  Klar: Dann ist $\gamma_i \in \Gamma$.
- Ansonsten ist $\gamma_i^+ = (\gamma_j^+ \setminus \{\lambda\}) \cup (\gamma_k^+ \setminus \{\bar{\lambda}\})$ für ein Literal λ und Zahlen $j, k \in [i-1]$. Wir wählen dann $\gamma_i := (\gamma_j \setminus \{\lambda\}) \cup (\gamma_k \setminus \{\bar{\lambda}\})$.

Für jedes $i \in [\ell]$ gilt dann entweder $\gamma_i = \gamma_i^+$ oder $\gamma_i = \gamma_i^+ \cup \{A_n\}$. Außerdem ist $(\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell)$ eine Resolutionsableitung von γ_ℓ aus Γ. Weil $\gamma_\ell^+ = \emptyset$ ist, gilt $\gamma_\ell = \emptyset$ oder $\gamma_\ell = \{A_n\}$. $\square_{\textit{Beh.4}}$

Behauptung 5: Es gilt: $\Gamma \vdash_R \emptyset$ oder $\Gamma \vdash_R \{\neg A_n\}$.

Beweis: Analog zum Beweis von Behauptung 4 mit Γ_- an Stelle von Γ_+. $\square_{Beh.5}$

Aus den Behauptungen 4 und 5 folgt $\Gamma \vdash_R \emptyset$, entweder direkt oder durch einmaliges Anwenden der Resolutionsregel auf die Klauseln $\{A_n\}$ und $\{\neg A_n\}$. Damit ist Behauptung 1 bewiesen. $\square_{Beh.1}$

Sei nun Γ eine beliebige unerfüllbare Klauselmenge. Gemäß Endlichkeitssatz (Satz 2.48) existiert eine endliche unerfüllbare Teilmenge Γ' von Γ. Wähle eine solche Menge Γ'. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass Γ' nur Aussagensymbole aus $\{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$ enthält. Dann folgt aus Behauptung 1, dass $\Gamma' \vdash_R \emptyset$, und daher auch $\Gamma \vdash_R \emptyset$. $\square$

Folie 134

Vorsicht

Beim Anwenden der Resolutionsregel (Definition 2.56) darf immer nur ein Literal λ betrachtet werden.

Beispiel:

Betrachte die Klauselmenge $\Gamma := \{\gamma_1, \gamma_2\}$ mit $\gamma_1 := \{X, Y\}$ und $\gamma_2 := \{\neg X, \neg Y\}$ (wobei X und Y zwei verschiedene Ausagensymbole sind).

Offensichtlicherweise wird Γ von jeder Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(X) = 1$ und $\mathcal{I}(Y) = 0$ erfüllt. Gemäß Satz 2.60 gibt es also keine Resolutionswiderlegung von Γ.

Gemäß der Resolutionsregel gibt es für γ_1 und γ_2 zwei verschiedene Resolventen: Indem man die Resolutionsregel mit $\lambda := X$ anwendet, erhält man $\{Y, \neg Y\}$ als Resolvente von γ_1 und γ_2. Indem man die Resolutionsregel mit $\lambda := Y$ anwendet, erhält man $\{X, \neg X\}$ als Resolvente von γ_1 und γ_2.

Beachten Sie, dass die Resolutionsregel es *nicht* erlaubt, sie in einem einzigen Schritt für zwei verschiedene Literale λ und λ' anzuwenden. Und das ist auch gut so, denn sonst könnte man aus $\gamma_1 := \{X, Y\}$ und $\gamma_2 := \{\neg X, \neg Y\}$ für $\lambda := \{X\}$ und $\lambda' := \{Y\}$ als Resolvente die Klausel

$$(\gamma_1 \setminus \{\lambda, \lambda'\}) \ \cup \ (\gamma_2 \setminus \{\overline{\lambda}, \overline{\lambda'}\})$$

herleiten, d.h. die Klausel

$$(\{X, Y\} \setminus \{X, Y\}) \ \cup \ (\{\neg X, \neg Y\} \setminus \{\neg X, \neg Y\}),$$

also die leere Klausel. Dann hätten wir also eine „Resolutionswiderlegung“ von Γ, obwohl Γ erfüllbar ist. D.h. Satz 2.60 würde nicht gelten, und Resolutionsableitungen wären nicht dazu geeignet, Klauselmengen auf Erfüllbarkeit zu testen.

Folie 135

Der Satz von Haken

Für eine endliche Klauselmenge Γ sei die *Größe* von Γ die Zahl

$$\|\Gamma\| \;:=\; \sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma|,$$

wobei $|\gamma|$ die Anzahl der Literale in γ bezeichnet.

Der folgende (schwer zu beweisende) Satz zeigt, dass es im Worst-Case exponentiell lange dauern kann, eine Resolutionswiderlegung zu finden.

Satz 2.61 (Satz von Haken, 1985)**.** *Es gibt Konstanten $c, d > 0$ und endliche Klauselmengen Γ_n für $n \geqslant 1$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ gilt:*

1. $\|\Gamma_n\| \leqslant n^c$,
2. Γ_n *ist unerfüllbar, und*
3. *jede Resolutionswiderlegung von Γ_n hat Länge $\geqslant 2^{dn}$.*

(Hier ohne Beweis)

2.7 Erfüllbarkeitsalgorithmen

Folie 136

Das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem

Wir betrachten im Folgenden Algorithmen für das

Aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem:

Eingabe: eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$
Ausgabe: „erfüllbar“, falls φ erfüllbar ist;
„unerfüllbar“, sonst.

Notation. Im Folgenden bezeichnet n immer die Anzahl der in φ vorkommenden verschiedenen Aussagensymbole, und $m := |\varphi|$ bezeichnet die Länge von φ (aufgefasst als Wort über dem Alphabet der Aussagenlogik).

Folie 137

Varianten des Erfüllbarkeitsproblems

Berechnen einer erfüllenden Interpretation:
Zusätzlich soll bei erfüllbaren Formeln noch ein Modell berechnet werden, d.h., ein Tupel $(b_1, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n$, so dass $\varphi[b_1, \ldots, b_n] = 1$.

Einschränkung auf KNF-Formeln:
Oft beschränkt man sich auf Eingabeformeln in KNF oder sogar 3-KNF. Das ist keine wesentliche Einschränkung, weil sich mit Hilfe des Tseitin-Verfahrens jede Formel in Linearzeit in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in 3-KNF transformieren lässt (Satz 2.55). Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln in KNF bzw. 3-KNF bezeichnet man mit *SAT* bzw. *3-SAT*.

Folie 138

Komplexität des Erfüllbarkeitsproblems

Satz 2.62 (Satz von Cook und Levin, ≈1971)**.**
Das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem (und sogar die Einschränkung 3-SAT) ist NP-vollständig.

Die Komplexitätsklassen P und NP, der Begriff der NP-Vollständigkeit, sowie ein Beweis des Satzes von Cook und Levin werden in der Vorlesung *Einführung in die Theoretische Informatik* behandelt.

Bemerkung.

- Wenn also P $\neq$ NP ist (was allgemein vermutet wird), gibt es für das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem keinen Polynomialzeitalgorithmus.
- Man vermutet sogar, dass es eine Konstante $c > 1$ gibt, so dass jeder Algorithmus für 3-SAT eine worst-case Laufzeit von $\Omega(c^n)$ hat.

  Diese Vermutung ist unter dem Namen *„Exponential Time Hypothesis“ (ETH)* bekannt.
- Der im Worst-Case beste derzeit bekannte Algorithmus für 3-SAT hat eine Laufzeit von etwa $O(1.4^n)$.

Folie 139

Der Wahrheitstafelalgorithmus

Sind eine aussagenlogische Formel und eine Interpretation der in ihr vorkommenden Aussagensymbole gegeben, so kann man die Formel „bottom-up" entlang ihres Syntaxbaums auswerten. Dies führt zu folgendem Lemma.

Lemma 2.63. *Es gibt einen Linearzeitalgorithmus, der bei Eingabe einer Formel* $\varphi(A_1, \ldots, A_n) \in \mathsf{AL}$ *und eines Tupels* $(b_1, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n$ *den Wert* $\varphi[b_1, \ldots, b_n]$ *berechnet.*

Beweis: Übung.

Der folgende Algorithmus löst das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem.

Wahrheitstafelalgorithmus
Eingabe: eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$

1. Berechne die Wahrheitstafel für φ.
2. Falls in der letzten Spalte mindestens eine 1 auftaucht, gib „erfüllbar" aus, sonst gib „unerfüllbar" aus.

Laufzeit: $O(m \cdot 2^n)$ (sogar im „Best-Case")

Folie 140

Der Resolutionsalgorithmus

Der Resolutionsalgorithmus probiert einfach alle möglichen Resolutionsableitungen durch und testet so, ob es eine Resolutionswiderlegung gibt (d.h. die Klauselmenge unerfüllbar ist).

Resolutionsalgorithmus
Eingabe: eine endliche Klauselmenge Γ (entspricht einer KNF-Formel)

1. Wiederhole, bis keine neuen Klauseln mehr generiert werden:
   Füge alle Resolventen aller Klauseln aus Γ zu Γ hinzu.
2. Falls $\emptyset \in \Gamma$, gib „unerfüllbar" aus, sonst gib „erfüllbar" aus.

Laufzeit:
$2^{O(n)}$ (weil es bei n Aussagensymbolen 4^n verschiedene Klauseln gibt).

Folie 141

Der Davis-Putnam-Logemann-Loveland Algorithmus

Der DPLL-Algorithmus ist ein in der Praxis sehr erfolgreicher Algorithmus, der die Wahrheitstafelmethode mit Resolution kombiniert. Ähnlich wie bei dem Wahrheitstafelalgorithmus durchsucht der DPLL-Algorithmus systematisch den Raum aller möglichen Interpretationen und testet, ob diese die gegebene Klauselmenge erfüllen. Resolution wird dabei dazu verwendet, die Suche geschickt zu steuern und Dinge, die während der Suche bereits über die Klauselmenge „gelernt" wurden, weiterzuverwenden. Der DPLL-Algorithmus ist die Basis moderner SAT-Solver, die Klauselmengen, die aus Millionen von Klauseln und Hunderttausenden von Aussagensymbolen bestehen, auf Erfüllbarkeit testen können.

Folie 142

DPLL-Algorithmus

Eingabe: eine endliche Klauselmenge Γ (entspricht einer KNF-Formel)

1. Vereinfache Γ. *% Details dazu: siehe nächste Folie*
2. Falls $\Gamma = \emptyset$, gib „erfüllbar" aus.
3. Falls $\emptyset \in \Gamma$, gib „unerfüllbar" aus.
4. Wähle ein Literal λ.
5. *% probiere aus, ob Γ ein Modell hat, bei dem das Literal λ erfüllt wird:*
   Löse rekursiv $\Gamma \cup \big\{\{\lambda\}\big\}$. Falls dies erfüllbar ist, gib „erfüllbar" aus.
6. *% probiere aus, ob Γ ein Modell hat, bei dem das Literal $\overline{\lambda}$ erfüllt wird:*
   Löse rekursiv $\Gamma \cup \big\{\{\overline{\lambda}\}\big\}$. Falls dies erfüllbar ist, gib „erfüllbar" aus.
   Sonst gib „unerfüllbar" aus.

Folie 143

Vereinfachungsheuristiken, die in Schritt 1. angewendet werden:

- *Unit Propagation*:
  Für alle „Einerklauseln" $\{\lambda\} \in \Gamma$ (wobei λ ein Literal ist), bilde alle Resolventen von $\{\lambda\}$ mit anderen Klauseln und streiche anschließend alle Klauseln, die λ enthalten. Wiederhole dies, so lange es Einerklauseln gibt.

  Präzise:
  Für jede „Einerklausel" $\{\lambda\} \in \Gamma$ tue Folgendes:

1. Ersetze jede Klausel $\gamma \in \Gamma$ durch die Klausel $\gamma \setminus \{\overline{\lambda}\}$.
2. Entferne aus Γ jede Klausel, die das Literal λ enthält.

Wiederhole dies, so lange es in Γ Einerklauseln gibt.

- *Pure Literal Rule*:
  Literale λ, deren Negat $\overline{\lambda}$ nirgendwo in der Klauselmenge auftaucht, können auf 1 gesetzt werden. Alle Klauseln, die ein solches Literal enthalten, sind dann wahr und können gestrichen werden.
- Streiche Klauseln, die Obermengen von anderen Klauseln sind (dies ist allerdings ineffizient und wird in der Praxis zumeist weggelassen).

Man sieht leicht, dass der DPLL-Algorithmus stets die korrekte Antwort gibt (d.h., er terminiert immer, und er gibt genau dann „erfüllbar“ aus, wenn die eingegebene Klauselmenge Γ erfüllbar ist).

Laufzeit des DPLL-Algorithmus:
$O(m \cdot 2^n)$ im Worst-Case, in der Praxis aber häufig sehr effizient.

Folie 144

Beispiel 2.64. Sei $\Gamma :=$

$$\begin{aligned}\big\{ &\{X_1, \neg X_5, \neg X_6, X_7\},\ \{\neg X_1, X_2, \neg X_5\},\ \{\neg X_1, \neg X_2, \neg X_3, \neg X_5, \neg X_6\},\\ &\{X_1, X_2, \neg X_4, X_7\},\ \{\neg X_4, \neg X_6, \neg X_7\},\ \{X_3, \neg X_5, X_7\},\\ &\{X_3, \neg X_4, \neg X_5\},\ \{X_5, \neg X_6\},\ \{X_5, X_4, \neg X_8\},\\ &\{X_1, X_3, X_5, X_6, X_7\},\ \{\neg X_7, X_8\},\ \{\neg X_6, \neg X_7, \neg X_8\} \big\}\end{aligned}$$

Ein Lauf des DPLL-Algorithmus:

(1) Keine Vereinfachung möglich. $\Gamma \neq \emptyset$. $\emptyset \notin \Gamma$.
Wähle das Literal[2] $\lambda := X_6$ und wende den Algorithmus rekursiv auf $\Gamma \cup \{\{X_6\}\}$ an.

(2) Unit Propagation mit $\{X_6\}$ liefert die Klauselmenge

$$\begin{aligned}\big\{ &\{X_1, \neg X_5, X_7\},\ \{\neg X_1, X_2, \neg X_5\},\ \{\neg X_1, \neg X_2, \neg X_3, \neg X_5\},\\ &\{X_1, X_2, \neg X_4, X_7\},\ \{\neg X_4, \neg X_7\},\ \{X_3, \neg X_5, X_7\},\\ &\{X_3, \neg X_4, \neg X_5\},\ \{X_5\},\ \{X_5, X_4, \neg X_8\},\\ &\cancel{\{X_1, X_3, X_5, X_6, X_7\}},\ \{\neg X_7, X_8\},\ \{\neg X_7, \neg X_8\},\ \cancel{\{X_6\}} \big\}\end{aligned}$$

[2]Welches Literal genau gewählt wird, ist im Algorithmus nicht festgelegt. Wir wählen ein beliebiges Literal aus, das in Γ vorkommt.

(3) Unit Propagation mit $\{X_5\}$ liefert die Klauselmenge

$$\begin{aligned}\{ & \{X_1, X_7\},\ \{\neg X_1, X_2\},\ \{\neg X_1, \neg X_2, \neg X_3\}, \\ & \{X_1, X_2, \neg X_4, X_7\},\ \{\neg X_4, \neg X_7\},\ \{X_3, X_7\}, \\ & \{X_3, \neg X_4\},\ \cancel{\{X_5\}},\ \cancel{\{X_5, X_4, \neg X_8\}}, \\ & \{\neg X_7, X_8\},\ \{\neg X_7, \neg X_8\} \ \}\end{aligned}$$

(4) Pure Literal Rule mit $\neg X_4$ liefert die Klauselmenge

$$\begin{aligned}\Gamma' := \ \{ & \{X_1, X_7\},\ \{\neg X_1, X_2\},\ \{\neg X_1, \neg X_2, \neg X_3\}, \\ & \cancel{\{X_1, X_2, \neg X_4, X_7\}},\ \cancel{\{\neg X_4, \neg X_7\}},\ \{X_3, X_7\}, \\ & \cancel{\{X_3, \neg X_4\}}, \\ & \{\neg X_7, X_8\},\ \{\neg X_7, \neg X_8\} \ \}\end{aligned}$$

(5) Keine weitere Vereinfachung von Γ' möglich. $\Gamma' \neq \emptyset$. $\emptyset \notin \Gamma'$.
Wähle das Literal[3] $\lambda := X_7$ und wende den Algorithmus rekursiv auf $\Gamma' \cup \{\{X_7\}\}$ an.

(6) Unit Propagation mit $\{X_7\}$ liefert die Klauselmenge

$$\begin{aligned}\{ & \cancel{\{X_1, X_7\}},\ \{\neg X_1, X_2\},\ \{\neg X_1, \neg X_2, \neg X_3\}, \\ & \cancel{\{X_3, X_7\}}, \\ & \{X_8\},\ \{\neg X_8\},\ \cancel{\{X_7\}} \ \}\end{aligned}$$

(7) Unit Propagation mit $\{X_8\}$ liefert die Klauselmenge

$$\begin{aligned}\{ & \{\neg X_1, X_2\},\ \{\neg X_1, \neg X_2, \neg X_3\}, \\ & \cancel{\{X_8\}},\ \emptyset \ \}\end{aligned}$$

Jetzt ist $\emptyset$ in der Klauselmenge enthalten — d.h. die Klauselmenge ist nicht erfüllbar. Daher:

(8) Backtracking, zurück zu Schritt (5):
Wende den Algorithmus auf $\Gamma' \cup \{\{\neg X_7\}\}$ an.

(9) Unit Propagation mit $\{\neg X_7\}$ liefert die Klauselmenge

$$\begin{aligned}\{ & \{X_1\},\ \{\neg X_1, X_2\},\ \{\neg X_1, \neg X_2, \neg X_3\}, \\ & \{X_3\}, \\ & \cancel{\{\neg X_7, X_8\}},\ \cancel{\{\neg X_7, \neg X_8\}},\ \cancel{\{\neg X_7\}} \ \}.\end{aligned}$$

[3]Welches Literal genau gewählt wird, ist im Algorithmus nicht festgelegt. Wir wählen ein beliebiges Literal aus, das in der Klauselmenge vorkommt.

Danach führt Unit Propagation mit $\{X_1\}$ zu

$$\big\{\ \cancel{\{X_1\}},\ \{X_2\},\ \{\neg X_2, \neg X_3\},\\ \{X_3\}\ \big\}.$$

Dann führt Unit Propagation mit $\{X_2\}$ zu

$$\big\{\ \cancel{\{X_2\}},\ \{\neg X_3\},\ \{X_3\}\ \big\},$$

und Unit Propagation mit $\{\neg X_3\}$ führt zu

$$\big\{\ \cancel{\{\neg X_3\}},\quad \emptyset\ \big\}.$$

Jetzt ist $\emptyset$ in der Klauselmenge enthalten — d.h. die Klauselmenge ist nicht erfüllbar. Daher:

(10) Backtracking, zurück zu Schritt (1):
Wende den Algorithmus auf $\Gamma \cup \{\{\neg X_6\}\}$ an.

(11) Unit Propagation mit $\{\neg X_6\}$ liefert die Klauselmenge

$$\begin{aligned}\big\{\ &\cancel{\{X_1, \neg X_5, \neg X_6, X_7\}},\ \{\neg X_1, X_2, \neg X_5\},\ \cancel{\{\neg X_1, \neg X_2, \neg X_3, \neg X_5, \neg X_6\}},\\ &\{X_1, X_2, \neg X_4, X_7\},\ \cancel{\{\neg X_4, \neg X_6, \neg X_7\}},\ \{X_3, \neg X_5, X_7\},\\ &\{X_3, \neg X_4, \neg X_5\},\ \cancel{\{X_5, \neg X_6\}},\ \{X_5, X_4, \neg X_8\},\\ &\{X_1, X_3, X_5, X_7\},\ \{\neg X_7, X_8\},\ \cancel{\{\neg X_6, \neg X_7, \neg X_8\}},\ \cancel{\{\neg X_6\}}\ \big\}\end{aligned}$$

Etwas übersichtlicher aufgeschrieben, also die Klauselmenge

$$\begin{aligned}\big\{\ &\{\neg X_1, X_2, \neg X_5\},\\ &\{X_1, X_2, \neg X_4, X_7\},\ \{X_3, \neg X_5, X_7\},\\ &\{X_3, \neg X_4, \neg X_5\},\ \{X_5, X_4, \neg X_8\},\\ &\{X_1, X_3, X_5, X_7\},\ \{\neg X_7, X_8\}\ \big\}\end{aligned}$$

(12) Pure Literal Rule mit X_2 und X_3 liefert die Klauselmenge

$$\begin{aligned}\big\{\ &\cancel{\{\neg X_1, X_2, \neg X_5\}},\\ &\cancel{\{X_1, X_2, \neg X_4, X_7\}},\ \cancel{\{X_3, \neg X_5, X_7\}},\\ &\cancel{\{X_3, \neg X_4, \neg X_5\}},\ \{X_5, X_4, \neg X_8\},\\ &\cancel{\{X_1, X_3, X_5, X_7\}},\ \{\neg X_7, X_8\}\ \big\},\end{aligned}$$

etwas übersichtlicher aufgeschrieben also die Klauselmenge

$$\big\{\ \{X_5, X_4, \neg X_8\},\ \{\neg X_7, X_8\}\ \big\}.$$

(13) Pure Literal Rule mit X_5 und $\neg X_7$ liefert die Klauselmenge

$$\Gamma'' := \ \{ \ \cancel{\{X_5, X_4, \neg X_8\}}, \cancel{\{\neg X_7, X_8\}} \ \},$$

d.h. Γ'' ist die *leere* Klauselmenge $\emptyset$.

(14) Also wird „erfüllbar“ ausgegeben.

2.8 Hornformeln

Folie 145

Hornklauseln und Hornformeln

Hornformeln sind spezielle aussagenlogische Formeln, die die Basis der logischen Programmierung bilden, und für die das Erfüllbarkeitsproblem effizient gelöst werden kann.

Definition 2.65. Eine *Hornklausel* ist eine disjunktive Klausel, in der höchstens ein positives Literal vorkommt.
Eine *Hornformel* ist eine Konjunktion endlich vieler Hornklauseln.

Beispiele.

- $\{\neg X, \neg Y, \neg Z\}$ (bzw. $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$) ist eine Hornklausel.
- $\{\neg X, \neg Y, Z\}$ (bzw. $\neg X \vee \neg Y \vee Z$) ist eine Hornklausel.
- $\{\neg X, Y, Z\}$ (bzw. $\neg X \vee Y \vee Z$) ist <u>keine</u> Hornklausel.
- $\{X\}$ (bzw. X) ist eine Hornklausel.
- $\emptyset$ ist eine Hornklausel.
- $(X \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge Y$ ist eine Hornformel.

Folie 146

Hornklauseln als Implikationen

- Eine Hornklausel der Form $\{\neg X_1, \dots, \neg X_{n-1}, X_n\}$ (bzw. $\neg X_1 \vee \dots \vee \neg X_{n-1} \vee X_n$) ist äquivalent zur Formel

  $$(X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}) \rightarrow X_n.$$

  Solche Klauseln werden auch *„Regeln“* (oder *„Prozedurklauseln“*) genannt.

- Eine Hornklausel der Form $\{\neg X_1, \ldots, \neg X_{n-1}\}$ ist äquivalent zur Formel
$$(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) \to \mathbf{0}.$$
Solche Klauseln werden auch *„Zielklauseln“* (oder *„Frageklauseln“*) genannt.

- Eine Hornklausel der Form $\{X_1\}$ ist äquivalent zur Formel
$$\mathbf{1} \to X_1.$$
Solche Klauseln werden auch *„Tatsachenklausel“* genannt.

- Die leere (Horn-)Klausel $\emptyset$ ist unerfüllbar und daher äquivalent zur Formel
$$\mathbf{1} \to \mathbf{0}.$$

Folie 147

Der Streichungsalgorithmus

Der folgende Algorithmus löst das Erfüllbarkeitsproblem für Hornformeln in Polynomialzeit.
Wir geben zunächst den Algorithmus an, betrachten dann Beispielläufe davon, analysieren die Laufzeit und zeigen danach, dass der Algorithmus korrekt ist, d.h. stets die richtige Antwort gibt.

Folie 148

Streichungsalgorithmus

Eingabe: eine endliche Menge Γ von Hornklauseln

1. Wiederhole:
2. Falls $\emptyset \in \Gamma$, so halte mit Ausgabe „unerfüllbar“.
3. Falls Γ keine Tatsachenklausel (d.h. Klausel $\{X\}$ mit $X \in \mathsf{AS}$) enthält, so halte mit Ausgabe „erfüllbar“.
   % Γ wird erfüllt, indem jedes Aussagensymbol mit 0 belegt wird
4. Wähle eine Tatsachenklausel $\{X\} \in \Gamma$.
   % Idee: Um Γ zu erfüllen, muss X mit dem Wert 1 belegt werden
5. Streiche $\neg X$ aus allen Klauseln $\delta \in \Gamma$, die das Literal $\neg X$ enthalten.
   % Wenn X den Wert 1 hat, trägt $\neg X$ nichts zum Erfüllen einer Klausel bei

6. Streiche aus Γ alle Klauseln $\delta \in \Gamma$, die das Literal X enthalten (d.h. entferne aus Γ alle $\delta \in \Gamma$, für die gilt: $X \in \delta$).
% Wenn X den Wert 1 hat, sind solche Klauseln erfüllt

Folie 149

Beispiele 2.66. Wir wenden den Streichungsalgorithmus auf die beiden folgenden Mengen von Hornklauseln an.

(a) $\Gamma_a := \big\{\ S \to \mathbf{0},\ \ (P \wedge Q) \to R,\ \ (S \wedge R) \to \mathbf{0},\ \ (U \wedge T \wedge Q) \to P,$
$(U \wedge T) \to Q,\ \ \mathbf{1} \to U,\ \ \mathbf{1} \to T\ \big\}$

(b) $\Gamma_b := \big\{\ (Q \wedge P) \to T,\ \ (U \wedge T \wedge Q) \to R,\ \ (U \wedge T) \to Q,$
$\mathbf{1} \to U,\ \ R \to \mathbf{0},\ \ \mathbf{1} \to T\ \big\}$

(a): Beispiel-Lauf des Streichungsalgorithmus bei Eingabe von Γ_a:
Beachte, dass Γ_a der folgenden Klauselmenge entspricht:

$$\begin{aligned}\Gamma \ = \ \ &\big\{\ \{\neg S\},\ \ \{\neg P, \neg Q, R\},\ \ \{\neg S, \neg R\},\ \ \{\neg U, \neg T, \neg Q, P\},\\ &\ \ \{\neg U, \neg T, Q\},\ \ \{U\},\ \ \{T\}\ \big\}\end{aligned}$$

<u>1. Schleifendurchlauf:</u>
$\emptyset \notin \Gamma$. Wähle $\{U\} \in \Gamma$, streiche $\neg U$ aus allen Klauseln in Γ, und streiche alle Klauseln, die U enthalten:

$$\begin{aligned}\Gamma \ = \ \ &\big\{\ \{\neg S\},\ \ \{\neg P, \neg Q, R\},\ \ \{\neg S, \neg R\},\ \ \{\cancel{\neg U}, \neg T, \neg Q, P\},\\ &\ \ \{\cancel{\neg U}, \neg T, Q\},\ \ \cancel{\{U\}},\ \ \{T\}\ \big\},\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}\Gamma \ = \ \ &\big\{\ \{\neg S\},\ \ \{\neg P, \neg Q, R\},\ \ \{\neg S, \neg R\},\ \ \{\neg T, \neg Q, P\},\\ &\ \ \{\neg T, Q\},\ \ \{T\}\ \big\}.\end{aligned}$$

<u>2. Schleifendurchlauf:</u>
$\emptyset \notin \Gamma$. Wähle $\{T\} \in \Gamma$, streiche $\neg T$ aus allen Klauseln in Γ, und streiche alle Klauseln, die T enthalten:

$$\begin{aligned}\Gamma \ = \ \ &\big\{\ \{\neg S\},\ \ \{\neg P, \neg Q, R\},\ \ \{\neg S, \neg R\},\ \ \{\cancel{\neg T}, \neg Q, P\},\\ &\ \ \{\cancel{\neg T}, Q\},\ \ \cancel{\{T\}}\ \big\},\end{aligned}$$

d.h.

$$\Gamma \;=\; \big\{\, \{\neg S\},\ \ \{\neg P, \neg Q, R\},\ \ \{\neg S, \neg R\},\ \ \{\neg Q, P\},\ \ \{Q\} \,\big\}.$$

<u>3. Schleifendurchlauf:</u>
$\emptyset \notin \Gamma$. Wähle $\{Q\} \in \Gamma$, streiche $\neg Q$ aus allen Klauseln in Γ, und streiche alle Klauseln, die Q enthalten:

$$\Gamma \;=\; \big\{\, \{\neg S\},\ \ \{\neg P, \cancel{\neg Q,}\, R\},\ \ \{\neg S, \neg R\},\ \ \{\cancel{\neg Q,}\, P\},\ \ \cancel{\{Q\}} \,\big\},$$

d.h.

$$\Gamma \;=\; \big\{\, \{\neg S\},\ \ \{\neg P, R\},\ \ \{\neg S, \neg R\},\ \ \{P\} \,\big\}.$$

<u>4. Schleifendurchlauf:</u>
$\emptyset \notin \Gamma$. Wähle $\{P\} \in \Gamma$, streiche $\neg P$ aus allen Klauseln in Γ, und streiche alle Klauseln, die P enthalten:

$$\Gamma \;=\; \big\{\, \{\neg S\},\ \ \{\cancel{\neg P,}\, R\},\ \ \{\neg S, \neg R\},\ \ \cancel{\{P\}} \,\big\},$$

d.h.

$$\Gamma \;=\; \big\{\, \{\neg S\},\ \ \{R\},\ \ \{\neg S, \neg R\} \,\big\}.$$

<u>5. Schleifendurchlauf:</u>
$\emptyset \notin \Gamma$. Wähle $\{R\} \in \Gamma$, streiche $\neg R$ aus allen Klauseln in Γ, und streiche alle Klauseln, die R enthalten:

$$\Gamma \;=\; \big\{\, \{\neg S\},\ \ \cancel{\{R\},}\ \ \{\neg S, \cancel{\neg R}\} \,\big\}$$

d.h.

$$\Gamma \;=\; \big\{\, \{\neg S\},\ \ \{\neg S\} \,\big\}$$

<u>6. Schleifendurchlauf:</u>
$\emptyset \notin \Gamma$. Γ enthält keine Tatsachenklausel.
D.h.: Halte mit Ausgabe „erfüllbar“.

(b) Beispiel-Lauf des Streichungsalgorithmus bei Eingabe von Γ_b:
Beachte, dass Γ_b der folgenden Klauselmenge entspricht:

$$\Gamma \;=\; \big\{\, \{\neg Q, \neg P, T\},\ \ \{\neg U, \neg T, \neg Q, R\},\ \ \{\neg U, \neg T, Q\},\ \ \{U\},\ \ \{\neg R\},\ \ \{T\} \,\big\}$$

<u>1. Schleifendurchlauf:</u>

$\emptyset \notin \Gamma$. Wähle $\{U\} \in \Gamma$, streiche $\neg U$ aus allen Klauseln in Γ, und streiche alle Klauseln, die U enthalten:

$$\Gamma \;=\; \big\{\ \{\neg Q, \neg P, T\},\ \ \{\cancel{\neg U}, \neg T, \neg Q, R\},\ \ \{\cancel{\neg U}, \neg T, Q\},\ \ \cancel{\{U\}},\ \{\neg R\},\ \ \{T\}\ \big\},$$

d.h.

$$\Gamma \;=\; \big\{\ \{\neg Q, \neg P, T\},\ \ \{\neg T, \neg Q, R\},\ \ \{\neg T, Q\},\ \ \{\neg R\},\ \ \{T\}\ \big\}.$$

2. Schleifendurchlauf:
$\emptyset \notin \Gamma$. Wähle $\{T\} \in \Gamma$, streiche $\neg T$ aus allen Klauseln in Γ, und streiche alle Klauseln, die T enthalten:

$$\Gamma \;=\; \big\{\ \cancel{\{\neg Q, \neg P, T\}},\ \{\cancel{\neg T}, \neg Q, R\},\ \ \{\cancel{\neg T}, Q\},\ \ \{\neg R\},\ \ \cancel{\{T\}}\ \big\},$$

d.h.

$$\Gamma \;=\; \big\{\ \{\neg Q, R\},\ \ \{Q\},\ \ \{\neg R\}\ \big\}.$$

3. Schleifendurchlauf:
$\emptyset \notin \Gamma$. Wähle $\{Q\} \in \Gamma$, streiche $\neg Q$ aus allen Klauseln in Γ, und streiche alle Klauseln, die Q enthalten:

$$\Gamma \;=\; \big\{\ \{\cancel{\neg Q}, R\},\ \ \cancel{\{Q\}},\ \{\neg R\}\ \big\},$$

d.h.

$$\Gamma \;=\; \big\{\ \{R\},\ \ \{\neg R\}\ \big\}.$$

4. Schleifendurchlauf:
$\emptyset \notin \Gamma$. Wähle $\{R\} \in \Gamma$, streiche $\neg R$ aus allen Klauseln in Γ, und streiche alle Klauseln, die R enthalten:

$$\Gamma \;=\; \big\{\ \cancel{\{R\}},\ \{\cancel{\neg R}\}\ \big\},$$

d.h.

$$\Gamma \;=\; \big\{\ \emptyset\ \big\}.$$

5. Schleifendurchlauf:
$\emptyset \in \Gamma$. D.h.: Halte mit Ausgabe „unerfüllbar“.

Folie 150

Laufzeit des Streichungsalgorithmus

Man sieht leicht, dass in jedem Schleifendurchlauf die Anzahl der Klauseln in Γ kleiner wird. Daher terminiert der Algorithmus nach maximal m Schleifendurchläufen, wobei m die Anzahl der Klauseln in der Eingabemenge Γ ist.

In jedem einzelnen Schleifendurchlauf betrachtet der Algorithmus alle Klauseln der aktuellen Klauselmenge und führt dabei $O(n)$ Schritte durch, wobei $n = \|\Gamma\|$ die Größe der Klauselmenge ist.

Insgesamt terminiert der Streichungsalgorithmus also nach $O(m \cdot n)$ Schritten, d.h. in Zeit polynomiell in der Größe von Γ.

Insgesamt erhalten wir also folgenden Satz:

Satz 2.67. *Die Laufzeit des Streichungsalgorithmus ist $O(m \cdot n)$, wobei $m = |\Gamma|$ die Anzahl der Hornklauseln in der eingegebenen Menge Γ und $n = \|\Gamma\|$ die Größe von Γ ist.*

Bemerkung. Eine Variante des Streichungsalgorithmus läuft sogar in Linearzeit, d.h. in Zeit $O(n)$.

Um nachzuweisen, dass der Streichungsalgorithmus stets die korrekte Antwort gibt, nutzen wir das folgende Lemma.

Folie 151

Der Streichungsalgorithmus und Resolution

Lemma 2.68. *Sei Γ_0 eine endliche Menge von Hornklauseln und δ eine Klausel, die zu irgendeinem Zeitpunkt während des Laufs des Streichungsalgorithmus bei Eingabe Γ_0 in der vom Algorithmus gespeicherten Menge Γ liegt. Dann gilt: $\Gamma_0 \vdash_R \delta$.*

Beweis.
Wir betrachten einen Lauf des Streichungsalgorithmus bei Eingabe Γ_0. Sei ℓ die Anzahl der Durchläufe der Schleife, die der Algorithmus durchführt. Für jedes $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ sei Γ_i die Menge Γ am Ende des i-ten Durchlaufs der Schleife. Per Induktion nach i zeigen wir, dass für alle $i \in \{0, \ldots, \ell\}$ gilt:

$$\text{Für jedes } \delta \in \Gamma_i \text{ ist } \Gamma_0 \vdash_R \delta.$$

Induktionsanfang: $i = 0$:
Offensichtlicherweise gilt für alle $\delta \in \Gamma_0$, dass $\Gamma_0 \vdash_R \delta$.

Induktionsschritt: $i \to i{+}1$: Sei $\delta \in \Gamma_{i+1}$.
Falls $\delta \in \Gamma_i$, so gilt $\Gamma_0 \vdash_R \delta$ gemäß Induktionsannahme.
Falls $\delta \notin \Gamma_i$, so wird δ beim $i{+}1$-ten Schleifendurchlauf in Zeile 5 neu erzeugt. Also gibt es ein Aussagensymbol X mit $\{X\} \in \Gamma_i$ und eine Klausel $\delta' \in \Gamma_i$, so dass $\neg X \in \delta'$ und $\delta = \delta' \setminus \{\neg X\}$. Dann ist δ eine Resolvente von δ' und $\{X\}$. Gemäß Induktionsannahme gilt $\Gamma_0 \vdash_R \delta'$ und $\Gamma_0 \vdash_R \{X\}$. Also gilt auch $\Gamma_0 \vdash_R \delta$. □

Folie 152

Korrektheit des Streichungsalgorithmus

Satz 2.69. *Der Streichungsalgorithmus ist korrekt.*
Das heißt, bei Eingabe einer endlichen Menge Γ_0 von Hornklauseln hält der Algorithmus mit Ausgabe „erfüllbar“, falls Γ_0 erfüllbar ist, und mit Ausgabe „nicht erfüllbar“, falls Γ_0 unerfüllbar ist.

Beweis.
Wir betrachten einen Lauf des Streichungsalgorithmus bei Eingabe Γ_0.
Sei ℓ die Anzahl der Durchläufe der Schleife, die der Algorithmus durchführt. Für $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ sei Γ_i die Menge Γ am Ende des i-ten Durchlaufs der Schleife. Für jedes i mit $1 \leqslant i < \ell$ sei X_i das Aussagensymbol, so dass im i-ten Durchlauf in Zeile 4 die Tatsachenklausel $\{X_i\} \in \Gamma_{i-1}$ ausgewählt wird.

Fall 1: Der Algorithmus hält beim ℓ-ten Durchlauf der Schleife in Zeile 2. Dann gilt $\emptyset \in \Gamma_{\ell-1}$ und daher gilt nach Lemma 2.68, dass $\Gamma_0 \vdash_R \emptyset$. Also besitzt Γ_0 eine Resolutionswiderlegung und ist daher gemäß Satz 2.60 unerfüllbar.

Fall 2: Der Algorithmus hält beim ℓ-ten Durchlauf der Schleife in Zeile 3. Dann enthält jede Klausel von $\Gamma_{\ell-1}$ mindestens ein negatives Literal (denn Γ_0 ist laut Voraussetzung eine Menge von Hornklauseln, und der Algorithmus geht so vor, dass auch jedes Γ_i eine Menge von Hornklauseln ist). Also erfüllt die „Nullinterpretation“ $\mathcal{I}_0$ mit $\mathcal{I}_0(Y) := 0$ für alle $Y \in \mathsf{AS}$ die Klauselmenge $\Gamma_{\ell-1}$. Wir definieren die Interpretation $\mathcal{I}$ durch

$$\mathcal{I}(X_1) = \mathcal{I}(X_2) = \cdots = \mathcal{I}(X_{\ell-1}) = 1\,, \quad \text{und}$$

$$\mathcal{I}(Z) = 0 \ \text{ für alle } \ Z \in \mathsf{AS} \setminus \{X_1, \ldots, X_{\ell-1}\}.$$

Per Induktion nach i zeigen wir, dass für alle $i \in \{\ell-1, \ell-2, \ldots, 0\}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Gamma_i.$$

Für $i = 0$ erhalten wir dann, dass $\mathcal{I} \models \Gamma_0$; insbesondere ist Γ_0 also erfüllbar.

Induktionsanfang: $i = \ell-1$: Wir wissen, dass $\mathcal{I}_0 \models \Gamma_{\ell-1}$. Außerdem kommt gemäß der Konstruktion des Streichungsalgorithmus in $\Gamma_{\ell-1}$ keins der Symbole $X_1, \ldots, X_{\ell-1}$ vor. Auf allen anderen Aussagensymbolen stimmen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}_0$ überein. Gemäß Koinzidenzlemma gilt also $\mathcal{I} \models \Gamma_{\ell-1}$.

Induktionsschritt: $i \to i-1$: Gemäß Induktionsannahme gilt $\mathcal{I} \models \Gamma_i$. Ziel ist, zu zeigen, dass auch gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma_{i-1}$. Sei dazu δ eine beliebige Klausel aus Γ_{i-1}.

Fall 1: $\delta \in \Gamma_i$.
Dann gilt $\mathcal{I} \models \delta$ gemäß Induktionsannahme.

Fall 2: $\delta \in \Gamma_{i-1} \setminus \Gamma_i$.

Fall 2.1: δ ist im i-ten Schleifendurchlauf gemäß Zeile 5 modifiziert worden, d.h. $\delta = \delta' \cup \{\neg X_i\}$ für ein $\delta' \in \Gamma_i$. Gemäß Induktionsannahme gilt $\mathcal{I} \models \delta'$, und daher gilt auch $\mathcal{I} \models \delta$.

Fall 2.2: δ ist im i-ten Schleifendurchlauf gemäß Zeile 6 aus der Klauselmenge entfernt worden, d.h. $X_i \in \delta$.
Wegen $\mathcal{I}(X_i) = 1$ gilt dann $\mathcal{I} \models \delta$.

□

Kapitel 3

Logik erster Stufe

3.1 Strukturen

Folie 153

Strukturen

Wir führen einen allgemeinen Strukturbegriff ein, der es uns erlaubt:

- mathematische Strukturen wie Gruppen, Körper, Vektorräume, Graphen, etc.
- und die gängigen Modelle der Informatik wie Transitionssysteme, endliche Automaten, relationale Datenbanken, Schaltkreise, etc.

zu beschreiben.

Folie 154

Signaturen

Definition 3.1. Eine *Signatur* (auch *Vokabular* oder *Symbolmenge*) ist eine Menge σ von *Relations-*, *Funktions-* und/oder *Konstantensymbolen.*

Jedes Relationsymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine *Stelligkeit* (bzw. *Arität*, engl. *arity*)

$$\operatorname{ar}(R) \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{ar}(f) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Folie 155

Notation

- In diesem Kapitel bezeichnet der griechische Buchstabe σ (in Worten: sigma) immer eine Signatur.
- Für Relationssymbole verwenden wir normalerweise Großbuchstaben wie R, P, Q, E, für Funktionsymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie f, g, h und für Konstantensymbole Kleinbuchstaben wie c, d.
- Gelegentlich verwenden wir als Relations- und Funktionssymbole auch Zeichen wie $\leqslant$ (2-stelliges Relationssymbol) und $+, \cdot$ (2-stellige Funktionssymbole), und wir verwenden $\underline{0}, \underline{1}$ als Konstantensymbole.
- Die Stelligkeit eines Relations- oder Funktionssymbols deuten wir häufig an, indem wir sie mit Schrägstrich hinter das Symbol schreiben.

Beispiel. Die Notation $R/2$ deutet an, dass R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Folie 156

Strukturen

Definition 3.2. Eine σ-*Struktur* $\mathcal{A}$ besteht aus folgenden Komponenten:

- einer nicht-leeren Menge A, dem *Universum* von $\mathcal{A}$ (auch: *Träger*, engl. universe, domain),
- für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und für $k := \text{ar}(R)$ gibt es eine k-stellige Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^k$,
- für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ und für $k := \text{ar}(f)$ gibt es eine k-stellige Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^k \to A$, und
- für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ gibt es ein Element $c^{\mathcal{A}} \in A$.

Folie 157

Notation.

- Wir beschreiben σ-Strukturen oft in Tupelschreibweise:
  $\mathcal{A} = \big(A,\ (S^{\mathcal{A}})_{S\in\sigma}\big)$.

  Falls $\sigma = \{S_1, \ldots, S_k\}$ endlich ist, schreiben wir auch
  $\mathcal{A} = \big(A,\ S_1^{\mathcal{A}}, \ldots, S_k^{\mathcal{A}}\big)$.

- Wir bezeichnen σ-Strukturen meistens mit „kalligraphischen“ Buchstaben wie $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{W}, \ldots$. Das Universum der Strukturen bezeichnen wir dann durch die entsprechenden lateinischen Großbuchstaben, also $A, B, C, W, \ldots$.

Folie 158

Mengen

Für die leere Signatur $\sigma := \emptyset$ bestehen σ-Strukturen nur aus ihrem Universum, sind also einfach (nicht-leere) Mengen.

Folie 159

Graphen

In diesem Kapitel bezeichnet E immer ein zweistelliges Relationssymbol.

- Ein *gerichteter Graph* (kurz: *Digraph*) $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ mit Knotenmenge $V^{\mathcal{G}}$ und Kantenmenge $E^{\mathcal{G}}$ ist eine $\{E\}$-Struktur. Das Universum ist die Knotenmenge $V^{\mathcal{G}}$.

- Einen *ungerichteten Graphen* $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ mit Knotenmenge $V^{\mathcal{G}}$ und Kantenmenge $E^{\mathcal{G}} \subseteq \{e \subseteq V^{\mathcal{G}} \ :\ |e| = 2\}$ repräsentieren wir durch eine $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ mit Universum $A = V^{\mathcal{G}}$ und Relation $E^{\mathcal{A}} = \{(u,v) \ :\ \{u,v\} \in E^{\mathcal{G}}\}$. Insbesondere ist $E^{\mathcal{A}}$ *symmetrisch* und *irreflexiv* im Sinne der folgenden Definition.

Folie 160

Eigenschaften zweistelliger Relationen

Definition 3.3. Sei $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$, wobei $R^{\mathcal{A}}$ eine zweistellige Relation über der Menge A ist (d.h. $(A, R^{\mathcal{A}})$ ist ein gerichteter Graph).

(a) $R^{\mathcal{A}}$ heißt *reflexiv*, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a,a) \in R^{\mathcal{A}}$.

$R^{\mathcal{A}}$ heißt *irreflexiv*, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a,a) \notin R^{\mathcal{A}}$.

(b) $R^{\mathcal{A}}$ heißt *symmetrisch*, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{Wenn } (a,b) \in R^{\mathcal{A}}, \text{ dann ist auch } (b,a) \in R^{\mathcal{A}}.$$

$R^{\mathcal{A}}$ heißt *antisymmetrisch*, wenn für alle $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt:

$$\text{Wenn } (a,b) \in R^{\mathcal{A}}, \text{ dann } (b,a) \notin R^{\mathcal{A}}.$$

(c) $R^{\mathcal{A}}$ heißt *transitiv*, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$\text{Wenn } (a,b) \in R^{\mathcal{A}} \text{ und } (b,c) \in R^{\mathcal{A}}, \text{ dann auch } (a,c) \in R^{\mathcal{A}}.$$

(d) $R^{\mathcal{A}}$ heißt *konnex*, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$(a,b) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{oder} \quad (b,a) \in R^{\mathcal{A}} \quad \text{oder} \quad a = b.$$

Folie 161

Äquivalenzrelationen

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge A ist eine 2-stellige Relation über A, die *reflexiv*, *transitiv* und *symmetrisch* ist.

Beispiele.

(a) *Gleichheit:* Für jede Menge M ist
$\{(m,m) \ : \ m \in M\}$ eine Äquivalenzrelation auf M.

(b) *Gleichmächtigkeit:* Für jede endliche Menge M und deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M) = \{N \ : \ N \subseteq M\}$ gilt:
$\{(A,B) \ : \ A, B \subseteq M, \ |A| = |B|\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(M)$.

(c) *Logische Äquivalenz:* Die Relation
$\{ (\varphi, \psi) \ : \ \varphi, \psi \in \mathsf{AL}, \ \varphi \equiv \psi \}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge AL aller aussagenlogischen Formeln.

Folie 162

Ordnungen

In diesem Kapitel bezeichnet $\leqslant$ sei immer ein zweistelliges Relationssymbol. Für $\leqslant$ verwenden wir Infixschreibweise, d.h., wir schreiben $x \leqslant^{\mathcal{A}} y$ statt $(x, y) \in \leqslant^{\mathcal{A}}$.

(a) Eine *Präordnung* ist eine $\{\leqslant\}$-Struktur $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$, bei der $\leqslant^{\mathcal{A}}$ reflexiv und transitiv ist.

(b) Eine *partielle Ordnung* (oder *Halbordnung*) ist eine Präordnung $\mathcal{A}$, bei der $\leqslant^{\mathcal{A}}$ antisymmetrisch ist.

(c) Eine *lineare* (oder *totale*) *Ordnung* ist eine partielle Ordnung $\mathcal{A}$, bei der $\leqslant^{\mathcal{A}}$ konnex ist.

Beispiele.

(a) Die *„kleiner-gleich“* Relation auf $\mathbb{N}$ (oder $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$) ist eine lineare Ordnung; die *„größer-gleich“* auch.

(b) Für jede Menge M ist die *Teilmengenrelation* $\subseteq$ eine partielle Ordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$; aber keine lineare Ordnung, sofern M mindestens zwei Elemente besitzt (denn wenn a, b zwei verschiedene Elemente in M sind, gilt: $\{a\} \not\subseteq \{b\}$ und $\{b\} \not\subseteq \{a\}$ und $\{a\} \neq \{b\}$, und daher ist die Teilmengenrelation *nicht* konnex). Dasselbe gilt für die *Obermengenrelation* $\supseteq$.

(c) Die *Folgerungsrelation für aussagenlogische Formeln*: $\{(\varphi, \psi) \ : \ \varphi, \psi \in \mathsf{AL},\ \varphi \models \psi\}$ ist eine Präordnung auf der Menge AL, aber keine partielle Ordnung (denn beispielsweise gilt für $\varphi := \mathbf{1}$ und $\psi := \neg\mathbf{0}$, dass $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$ und $\varphi \neq \psi$, und daher ist die Folgerungsrelation *nicht* antisymmetrisch).

Folie 163

Arithmetische Strukturen

$+$ und $\cdot$ seien immer zweistellige Funktionssymbole, für die wir Infixschreibweise verwenden. $\underline{0}$ und $\underline{1}$ seien Konstantensymbole.

- Der *Körper der reellen Zahlen* ist die $\{+, \cdot, \underline{0}, \underline{1}\}$-Struktur $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, so dass $A_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}$, $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}$ und $\cdot^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}$ sind die normale Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{R}$, und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} := 1$.

- Der *Ring der ganzen Zahlen* ist die $\{+,\cdot,\underline{0},\underline{1}\}$-Struktur $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$, so dass $A_{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}$, $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}}$ und $\cdot^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}}$ sind die normale Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{Z}$, und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}} := 1$.
- Das *Standardmodell der Arithmetik* ist die $\{+,\cdot,\leqslant,\underline{0},\underline{1}\}$-Struktur $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$, so dass $A_{\mathbb{N}} := \mathbb{N}$ ist; die Funktionen $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ und $\cdot^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ und die Relation $\leqslant^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ sind die normale Addition, Multiplikation bzw. Ordnung auf $\mathbb{N}$, und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}} := 1$.
- Der *zweielementige Körper* ist die $\{+,\cdot,\underline{0},\underline{1}\}$-Struktur $\mathcal{F}_2$ mit Universum $F_2 := \{0,1\}$, den Funktionen $+^{\mathcal{F}_2}$ und $\cdot^{\mathcal{F}_2}$ der Addition bzw. Multiplikation modulo 2, und $\underline{0}^{\mathcal{F}_2} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{F}_2} := 1$.

Folie 164

Wörter als Strukturen

Sei Σ ein endliches, nicht-leeres Alphabet. Für jedes $a \in \Sigma$ sei P_a ein einstelliges Relationssymbol, und es sei

$$\sigma_\Sigma \quad := \quad \{\leqslant\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\}.$$

Für jedes nicht-leere Wort $w := w_1 \cdots w_n \in \Sigma^*$ mit $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma$ sei $\mathcal{A}_w$ die σ_Σ*-Struktur*

- mit Universum $A_w := [n]$, für die gilt:
- $\leqslant^{\mathcal{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $[n]$, d.h., $\leqslant^{\mathcal{A}_w} = \{\ (i,j)\ :\ i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\ \}$,
- Für jedes $a \in \Sigma$ ist $P_a^{\mathcal{A}_w} := \{i \in [n] : w_i = a\}$.

Beispiel. Sei $\Sigma := \{a,b,c\}$.
Für $w := abacaba$ ist $\mathcal{A}_w$ die folgende σ_Σ-Struktur:

- $A_w = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $\leqslant^{\mathcal{A}_w} = \ \{\ (i,j)\ :\ i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 7\ \}$
- $P_a^{\mathcal{A}_w} = \{1,3,5,7\}, \quad P_b^{\mathcal{A}_w} = \{2,6\}, \quad P_c^{\mathcal{A}_w} = \{4\}.$

Folie 165

Wortstrukturen

Eine *Wortstruktur über* Σ ist eine σ_Σ-Struktur $\mathcal{A}$ für die gilt:

- das Universum A von $\mathcal{A}$ ist endlich,
- $(A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ ist eine lineare Ordnung,
- für jedes $i \in A$ gibt es *genau ein* $a \in \Sigma$, so dass $i \in P_a^{\mathcal{A}}$.

Beispiel 3.4. Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$. Die σ_Σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit

- Universum $B = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$,
- linearer Ordnung $\leqslant^{\mathcal{B}}$, die besagt, dass $\diamondsuit < \heartsuit < \spadesuit < \clubsuit$ ist, d.h.
  $\leqslant^{\mathcal{B}} = \{(\diamondsuit,\diamondsuit), (\diamondsuit,\heartsuit), (\diamondsuit,\spadesuit), (\diamondsuit,\clubsuit), (\heartsuit,\heartsuit), (\heartsuit,\spadesuit), (\heartsuit,\clubsuit), (\spadesuit,\spadesuit), (\spadesuit,\clubsuit), (\clubsuit,\clubsuit)\}$,
- $P_a^{\mathcal{B}} = \{\diamondsuit,\ \clubsuit\}$
- $P_b^{\mathcal{B}} = \{\heartsuit,\ \spadesuit\}$,
- $P_c^{\mathcal{B}} = \emptyset$,

ist eine Wortstruktur, die das Wort $w = abba$ repräsentiert.

Folie 166

Relationale Datenbanken

- *Relationale Datenbanken* bestehen aus endlich vielen endlichen Tabellen.
- Jede solche Tabelle lässt sich als Relation auffassen, die Zeilen der Tabelle entsprechen dabei den Tupeln in der Relation.
- Eine relationale Datenbank entspricht dann einer endlichen Struktur, deren Universum aus allen potentiellen Einträgen in einzelnen Zellen der Tabellen besteht, und die für jede Tabelle in der Datenbank eine Relation enthält.

Folie 167

Beispiel: Eine Kinodatenbank

Kino			
Name	Adresse	Stadtteil	Telefonnummer
Babylon	Dresdner Str. 126	Kreuzberg	030 61 60 96 93
Casablanca	Friedenstr. 12-13	Adlershof	030 67 75 75 2
Filmtheater am Friedrichshain	Bötzowstr. 1-5	Prenzlauer Berg	030 42 84 51 88
Kino International	Karl-Marx-Allee 33	Mitte	030 24 75 60 11
Moviemento	Kotbusser Damm 22	Kreuzberg	030 692 47 85
Urania	An der Urania 17	Schöneberg	030 21 89 09 1

Film		
Name	Regisseur	Schauspieler
Alien	Ridley Scott	Sigourney Weaver
Blade Runner	Ridley Scott	Harrison Ford
Blade Runner	Ridley Scott	Sean Young
Brazil	Terry Gilliam	Jonathan Pryce
Brazil	Terry Gilliam	Kim Greist
Casablanca	Michael Curtiz	Humphrey Bogart
Casablanca	Michael Curtiz	Ingrid Bergmann
Gravity	Alfonso Cuaron	Sandra Bullock
Gravity	Alfonso Cuaron	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	Matt Damon
Resident Evil	Paul Anderson	Milla Jovovich
Terminator	James Cameron	Arnold Schwarzenegger
Terminator	James Cameron	Linda Hamilton
Terminator	James Cameron	Michael Biehn
...	...	...

Folie 168

Programm		
Kino	Film	Zeit
Babylon	Casablanca	17:30
Babylon	Gravity	20:15
Casablanca	Blade Runner	15:30
Casablanca	Alien	18:15
Casablanca	Blade Runner	20:30
Casablanca	Resident Evil	20:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	20:00
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	21:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	23:00
Kino International	Casablanca	18:00
Kino International	Brazil	20:00
Kino International	Brazil	22:00
Moviemento	Gravity	17:00
Moviemento	Gravity	19:30
Moviemento	Alien	22:00
Urania	Monuments Men	17:00
Urania	Monuments Men	20:00

Folie 169

Die Kinodatenbank als Struktur

Signatur: $\sigma_{\mathsf{KINO}} := \{ R_{Kino}/4,\ R_{Film}/3,\ R_{Prog}/3 \} \cup \{ \text{‘}c\text{’} : c \in \texttt{ASCII}^* \}$

Die Kinodatenbank wird dargestellt als σ_{KINO}-*Struktur* $\mathcal{D}$.

Universum:

$$D \ := \ \texttt{ASCII}^* \ \supseteq \ \{ \text{Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93, Casablanca, \dots, 20:00} \}.$$

Relationen:

$R^{\mathcal{D}}_{\mathit{Kino}} := \{$ (Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93),
(Casablanca, Friedenstr. 12-13, Adlershof, 030 67 75 75 2),
(Filmtheater am Friedrichshain, Bötzowstr. 1-5, Prenzlauer Berg, 030 42 84 51 88),
(Kino International, Karl-Marx-Allee 33, Mitte, 030 24 75 60 11),
(Moviemento, Kotbusser Damm 22, Kreuzberg, 030 692 47 85),
(Urania, An der Urania 17, Schöneberg, 030 21 89 09 1) $\}$

$R^{\mathcal{D}}_{\mathit{Film}} := \{$ (Alien, Ridley Scott, Sigourney Weaver),
(Blade Runner, Ridley Scott, Harrison Ford), $\dots$ $\}$

$R^{\mathcal{D}}_{\mathit{Prog}} := \{$ (Babylon, Casablanca, 17:30),
(Babylon, Gravity, 20:15), $\dots$ $\}$.

Konstanten: $\text{`}c\text{'}^{\mathcal{D}} \ := \ c$, für jedes $c \in \texttt{ASCII}^*$.
D.h.: jedes Konstantensymbol wird durch den zwischen den Hochkommas stehenden Text interpretiert.

Folie 170

Restriktionen und Expansionen

Definition 3.5. Seien σ und τ Signaturen mit $\sigma \subseteq \tau$.

(a) Die σ-*Restriktion* einer τ-Struktur $\mathcal{B}$ ist die σ-Struktur $\mathcal{B}|_\sigma$ mit $B|_\sigma := B$ und $S^{\mathcal{B}|_\sigma} := S^{\mathcal{B}}$ für jedes $S \in \sigma$.
D.h.: Ist $\mathcal{B} = \big(B,\, (S^{\mathcal{B}})_{S\in\tau}\big)$, so ist $\mathcal{B}|_\sigma = \big(B,\, (S^{\mathcal{B}})_{S\in\sigma}\big)$.

(b) Eine τ-Struktur $\mathcal{B}$ ist eine τ-*Expansion* einer σ-Struktur $\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_\sigma$.

Beispiel. Die $\{+,\underline{0}\}$-*Restriktion des Standardmodells der Arithmetik* ist die Struktur

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}}|_{\{+,\underline{0}\}} \quad = \quad (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}, \underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}),$$

wobei $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ die natürliche Addition auf $\mathbb{N}$ und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ die natürliche Zahl 0 ist.
Man bezeichnet diese Struktur als das *Standardmodell der Presburger Arithmetik.*

Folie 171

Prinzipielle Gleichheit von Strukturen

Frage: Wann sind zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ „prinzipiell gleich"?

Antwort: Wenn $\mathcal{B}$ aus $\mathcal{A}$ entsteht, indem man die Elemente des Universums von $\mathcal{A}$ umbenennt.

Dies wird in der folgenden Definition präzisiert.

Folie 172

Isomorphismen

Definition 3.6. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Ein *Isomorphismus* von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung $\pi : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

1. π ist *bijektiv*.
2. Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ gilt:
$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff \big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}.$$
3. Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt:
$$\pi\big(c^{\mathcal{A}}\big) \;=\; c^{\mathcal{B}}.$$
4. Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ gilt:
$$\pi\big(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k)\big) \;=\; f^{\mathcal{B}}\big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)\big).$$

Folie 173

Isomorphie

Notation. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Wir schreiben $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, um anzudeuten, dass π ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

Definition 3.7. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen *isomorph* (wir schreiben: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), wenn es einen Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt.

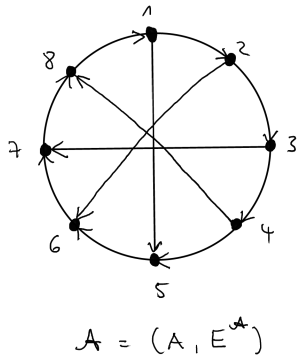
Folie 174

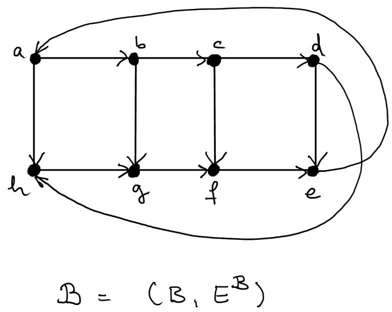
Beispiele 3.8.

(a) Seien A, B nicht-leere Mengen. Dann sind die $\emptyset$-Strukturen $\mathcal{A} := (A)$ und $\mathcal{B} := (B)$ genau dann isomorph, wenn A und B gleichmächtig sind (d.h. es gibt eine Bijektion von A nach B).

Folie 175

(b) Seien $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, E^{\mathcal{B}})$ die beiden folgenden Digraphen:





Dann ist $\pi : A \to B$ mit

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(i)$	a	b	c	d	h	g	f	e

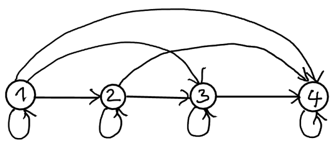
ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

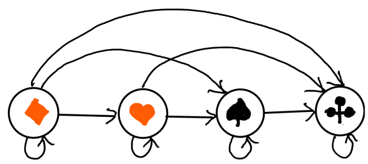
Folie 176

(c) Sei $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und

$$\leqslant^{\mathcal{A}} \quad = \quad \{\, (i,j) \ : \ i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4 \,\},$$

und sei $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{A}})$ mit $B = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, wobei $\leqslant^{\mathcal{B}}$ wie in Beispiel 3.4 definiert ist. Skizze:





Dann ist $\pi : A \to B$ mit

i	1	2	3	4
$\pi(i)$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$

ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Allgemein gilt: Sind A und B endliche Mengen mit $|A| = |B|$, und sind $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ lineare Ordnungen auf A und B, so ist die Abbildung $\pi : A \to B$, die das (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}}$) kleinste Element in A auf das (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$) kleinste Element in B abbildet, und allgemein für jedes $i \in \{1, \ldots, |A|\}$ das (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}}$) i-kleinste Element in A auf das (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$) i-kleinste Element in B abbildet, ein Isomorphismus von $\mathcal{A} := (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ nach $\mathcal{B} := (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$.

Folie 177

(d) Sind $\leqslant^{\mathbb{N}}$ und $\leqslant^{\mathbb{Z}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$, so sind die $\{\leqslant\}$-Strukturen $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathbb{N}})$ und $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathbb{Z}})$ <u>*nicht*</u> *isomorph* (kurz: $\mathcal{N} \ncong \mathcal{Z}$).

Beweis: Angenommen, $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{Z}$. Sei $z := \pi(0)$. In $\mathbb{Z}$ gibt es ein Element $z' \in \mathbb{Z}$ mit $z' < z$ (z.B. $z' = z - 1$). Da π surjektiv ist, muss es ein $n' \in \mathbb{N}$ geben, so dass $\pi(n') = z'$. Wegen $z' \neq z$ muss $n' \neq 0$ gelten (da π injektiv ist). Somit gilt:

$$0 \leqslant^{\mathbb{N}} n' \qquad \text{aber} \qquad z \not\leqslant^{\mathbb{Z}} z'.$$

Also ist π kein Isomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{Z}$. Widerspruch!

Folie 178

(e) Sei $\sigma := \{f, c\}$, wobei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, wobei gilt:

- $A := \mathbb{N}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen,
- $f^{\mathcal{A}} := +^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ ist die natürliche Addition auf $\mathbb{N}$,
- $c^{\mathcal{A}} := 0$ ist die natürliche Zahl 0

und sei $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$, wobei

- $B := \{2^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller Zweierpotenzen,

- $f^{\mathcal{B}} : B \times B \to B$ ist die Funktion mit

$$f^{\mathcal{B}}(b_1, b_2) \quad := \quad b_1 \cdot b_2, \qquad \text{für alle } \ b_1, b_2 \in B$$

- $c^{\mathcal{B}} := 1 = 2^0 \in B$.

Dann gilt: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, und die Abbildung $\pi : A \to B$ mit $\pi(n) := 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ein *Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$*, denn:

1. π ist eine bijektive Abbildung von A nach B.
2. Für das Konstantensymbol $c \in \sigma$ gilt:
$$\pi(c^{\mathcal{A}}) \ = \ \pi(0) \ = \ 2^0 \ = \ c^{\mathcal{B}}.$$
3. Für das Funktionssymbol $f \in \sigma$ und für alle $(a_1, a_2) \in A^2$ gilt:
$$\pi(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2)) \ = \ \pi(a_1 + a_2) \ = \ 2^{a_1 + a_2}$$
und
$$f^{\mathcal{B}}(\pi(a_1), \pi(a_2)) \ = \ f^{\mathcal{B}}(2^{a_1}, 2^{a_2}) \ = \ 2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \ = \ 2^{a_1 + a_2},$$
also $\pi(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2)) = f^{\mathcal{B}}(\pi(a_1), \pi(a_2))$.

Somit ist π ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Folie 179

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation

Lemma 3.9. *Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller σ-Strukturen. D.h.: Für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ gilt:*

1. $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ *(Reflexivität),*
2. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \implies \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$ *(Symmetrie),*
3. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ *und* $\mathcal{B} \cong \mathcal{C} \implies \mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ *(Transitivität).*

Beweis: Übung.

3.2 Terme der Logik erster Stufe

Folie 180

Individuenvariablen

Definition 3.10. Eine *Individuenvariable* (auch: *Variable erster Stufe*; kurz: *Variable*) hat die Form v_i für ein $i \in \mathbb{N}$.

Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit VAR, d.h.

$$\mathsf{VAR} \quad = \quad \{v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\} \quad = \quad \{v_i \ :\ i \in \mathbb{N}\}.$$

Folie 181

Terme der Logik erster Stufe

Definition 3.11.

(a) Für eine Signatur σ sei $A_{\sigma\text{-}\mathsf{Terme}}$ das *Alphabet*, das aus allen Elementen in VAR, allen *Konstanten- und Funktionssymbolen in* σ, den Klammern (,) und dem Komma , besteht.

(b) Die Menge T_σ aller σ-*Terme* ist die wie folgt rekursiv definierte Teilmenge von ${A_{\sigma\text{-}\mathsf{Terme}}}^*$:

Basisregeln:

- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c \in \mathsf{T}_\sigma$.
- Für jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$ ist $x \in \mathsf{T}_\sigma$.

Rekursive Regel:

- Für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ und für $k := \mathrm{ar}(f)$ gilt: Sind $t_1 \in \mathsf{T}_\sigma, \ldots, t_k \in \mathsf{T}_\sigma$, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_k) \in \mathsf{T}_\sigma$.

(c) Die Menge aller *Terme der Logik der ersten Stufe* ist $\mathsf{T} := \bigcup_{\sigma \text{ Signatur}} \mathsf{T}_\sigma$.

Folie 182

Beispiele

Sei $\sigma := \{ f/2,\ c \}$.
Folgende Worte sind σ-Terme:

$$c, \quad v_4, \quad f(c,c), \quad f(c, f(c, v_0))\,.$$

Folgende Worte sind <u>keine</u> σ-Terme:

$$0, \quad f(0,c), \quad f(v_0, c, v_1), \quad f^{\mathcal{A}}(2,3)\,.$$

Folie 183

Belegungen und Interpretationen

Definition 3.12. Sei σ eine Signatur.

(a) Eine *Belegung in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$* ist eine Abbildung $\beta : \mathsf{VAR} \to A$.

D.h.: β ordnet jeder Variablen $x \in \mathsf{VAR}$ ein Element $\beta(x)$ aus dem Universum von $\mathcal{A}$ zu.

(b) Eine *σ-Interpretation* ist ein Paar

$$\mathcal{I} \ = \ (\mathcal{A}, \beta)\,,$$

bestehend aus einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ und einer Belegung β in $\mathcal{A}$.

Folie 184

Die Auswertung von Termen in Interpretationen

Wir wollen Terme nun in Interpretationen „auswerten“.
Die Auswertung von Term t in einer Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ soll dasjenige Element aus A liefern, das man erhält, wenn man

- die in t vorkommenden Variablen gemäß der Belegung β interpretiert,
- die in t vorkommenden Konstantensymbole c gemäß ihrer Interpretation $c^{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}$ belegt,
- die in t vorkommenden Funktionssymbole f gemäß ihrer Interpretation $f^{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}$ belegt

und dann nach und nach den resultierenden Term ausrechnet.

Dies wird in der folgenden Definition präzisiert.

Folie 185

Semantik von σ-Termen

Definition 3.13. Sei σ eine Signatur.
Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem σ-Term t und jeder σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet:

- Für alle $x \in \mathsf{VAR}$ ist $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$.
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $[\![c]\!]^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$.
- Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$, und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in \mathsf{T}_\sigma$ gilt:

$$[\![\, f(t_1, \ldots, t_k)\,]\!]^{\mathcal{I}} \quad := \quad f^{\mathcal{A}}\left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}} \right).$$

Folie 186

Beispiel

Sei $\sigma = \{\, f/2,\ c\,\}$, und sei $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ die σ-Struktur mit $A = \mathbb{N}$, $f^{\mathcal{A}} = +^{\mathcal{A}_\mathbb{N}}$ (die Addition auf den natürlichen Zahlen) und $c^{\mathcal{A}} = 0$ (die natürliche Zahl 0).

Sei $\beta : \mathsf{VAR} \to A$ eine Belegung mit $\beta(v_1) = 1$ und $\beta(v_2) = 7$, und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$.

Sei t der σ-Term $f(v_2, f(v_1, c))$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} [\![t]\!]^{\mathcal{I}} &= f^{\mathcal{A}}\Big(\beta(v_2),\ f^{\mathcal{A}}\left(\beta(v_1),\ c^{\mathcal{A}} \right) \Big) \\ &= f^{\mathcal{A}}\Big(7,\ f^{\mathcal{A}}(1,\ 0) \Big) \\ &= \Big(7 + (\,1 + 0\,) \Big) \\ &= 8. \end{aligned}$$

3.3 Syntax der Logik erster Stufe

Folie 187

Vergleich zwischen Aussagenlogik und Logik erster Stufe

Die Logik erster Stufe übernimmt, verändert und erweitert die Syntax der Aussagenlogik.

- Was gleich bleibt:
  - Die Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ werden übernommen.
- Was sich verändert:
  - *Variablen stehen* nicht mehr für „wahre“ oder „falsche“ Ausagen, sondern *für Elemente im Universum einer σ-Struktur.*
  - *Variablen sind keine atomaren Formeln mehr.*
- Was neu hinzukommt:
  - Es gibt *Quantoren* $\exists$ und $\forall$ (für „es existiert“ und „für alle“).
  - Es gibt Symbole für Elemente aus der Signatur σ.
  - Es können σ-Terme benutzt werden, um Elemente im Universum einer σ-Struktur zu bezeichnen.

Folie 188

Das Alphabet der Logik erster Stufe

Definition 3.14. Sei σ eine Signatur.
Das *Alphabet* $A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ der Logik erster Stufe über σ besteht aus

- allen Symbolen in $A_{\sigma\text{-Terme}}$,
- allen Symbolen in σ,
- den Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor),
- dem Gleichheitssymbol $=$,
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.

D.h.:

$$A_{\mathsf{FO}[\sigma]} \;=\; \mathsf{VAR} \,\cup\, \sigma \,\cup\, \{\exists, \forall\} \,\cup\, \{=\} \,\cup\, \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\} \,\cup\, \{(,)\} \,\cup\, \{,\}.$$

Folie 189

Syntax der Logik erster Stufe

Definition 3.15. Sei σ eine Signatur.
Die Menge $\mathsf{FO}[\sigma]$ aller *Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ* (kurz: $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln; „FO“ steht für die englische Bezeichnung der Logik erster Stufe: first-order logic) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$:

Basisregeln:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:

$$t_1 = t_2 \quad \in \quad \mathsf{FO}[\sigma].$$

- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k$ in T_σ gilt:

$$R(t_1, \ldots, t_k) \quad \in \quad \mathsf{FO}[\sigma].$$

$\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln der Form $t_1 = t_2$ oder $R(t_1, \ldots, t_k)$ heißen *atomare σ-Formeln.*

Folie 190

Rekursive Regeln:

- Ist $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so ist auch $\neg\varphi \ \in \ \mathsf{FO}[\sigma]$.
- Ist $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so ist auch
  - $(\varphi \land \psi) \ \in \ \mathsf{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \lor \psi) \ \in \ \mathsf{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \to \psi) \ \in \ \mathsf{FO}[\sigma]$.
- Ist $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathsf{VAR}$, so ist auch
  - $\exists x\, \varphi \ \in \ \mathsf{FO}[\sigma]$,
  - $\forall x\, \varphi \ \in \ \mathsf{FO}[\sigma]$.

Folie 191

Beispiel 3.16. Sei $\sigma = \{\, f/2,\ c\,\}$.

Folgende Worte aus $A^*_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ sind $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln:

- $f(v_0, v_1) = c$ (atomare σ-Formel)
- $\forall v_2\, f(v_2, c) = v_2$
- $\neg\exists v_3\, \big(f(v_3, v_3) = v_3 \ \wedge\ \neg\, v_3{=}c\big)$

Folgende Worte sind <u>keine</u> $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln:

- $\big(f(v_0, v_1) = c\big)$
- $\big(\exists v_2\, f(v_2, c) = v_2\big)$
- $f(f(c, c), v_1)$ (ist ein σ-Term, aber keine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel)
- $\exists c\, f(v_0, c) = v_0$

Folie 192

Beispiel 3.17. Sei $\sigma = \{E/2\}$.
Folgendes ist eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel:

$$\forall v_0\, \forall v_1 \Big(\big(E(v_0, v_1) \ \wedge\ E(v_1, v_0)\big) \ \rightarrow\ v_0 = v_1 \Big)$$

Intuition zur Semantik:
In einem gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ sagt diese Formel Folgendes aus:

„Für alle Knoten $a_0 \in A$ und
für alle Knoten $a_1 \in A$ gilt:
falls $(a_0, a_1) \in E^{\mathcal{A}}$ und $(a_1, a_0) \in E^{\mathcal{A}}$, so ist $a_0 = a_1$.“

Die Formel sagt in einem Digraph $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ also aus, dass die Kantenrelation $E^{\mathcal{A}}$ antisymmetrisch ist.

Folie 193

Notation

- Statt mit $v_0, v_1, v_2, \ldots$ bezeichnen wir Variablen oft auch mit $x, y, z, \ldots$ oder mit Varianten wie $x', y_1, y_2, \ldots$.
- Ähnlich wie bei der Aussagenlogik schreiben wir $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ als Abkürzung für die Formel $\big((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)\big)$.
- Die Menge aller *Formeln der Logik der ersten Stufe* ist

$$\mathsf{FO} \ := \bigcup_{\sigma \text{ Signatur}} \mathsf{FO}[\sigma].$$

3.4 Semantik der Logik erster Stufe

Folie 194

Bevor wir die Semantik der Logik erster Stufe formal definieren, betrachten wir zunächst einige Beispiele, um ein intuitives Verständnis der Semantik der Logik erster Stufe zu erlangen.

Beispiele zur Semantik der Logik erster Stufe

Folie 195

Gerichtete Graphen

Beispiel 3.18. Sei $\sigma = \{E/2\}$.

(a) Die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi \quad := \quad \forall x \forall y \big(E(x,y) \rightarrow E(y,x)\big)$$

besagt:

> „Für alle Knoten x und für alle Knoten y gilt: Falls es eine Kante von x nach y gibt, so gibt es auch eine Kante von y nach x."

Für jeden Digraphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt daher:

$$\mathcal{A} \text{ erfüllt } \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad E^{\mathcal{A}} \text{ ist symmetrisch.}$$

Umgangssprachlich sagen wir auch: „Die Formel φ *sagt in einem Digraphen* $\mathcal{A}$ *aus*, dass dessen Kantenrelation symmetrisch ist."

Folie 196

(b) Die folgende $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel drückt aus, dass es von Knoten x zu Knoten y einen Weg der Länge 3 gibt:

$$\varphi(x,y) \quad := \quad \exists z_1\, \exists z_2\, \Big(\big(E(x,z_1) \ \wedge\ E(z_1,z_2)\big) \ \wedge\ E(z_2,y)\Big).$$

(c) Die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\forall x\, \forall y\, \exists z_1\, \exists z_2\, \Big(\big(E(x,z_1) \ \wedge\ E(z_1,z_2)\big) \ \wedge\ E(z_2,y)\Big)$$

sagt in einem Digraph $\mathcal{A}$ aus, dass es zwischen je 2 Knoten einen Weg der Länge 3 gibt.

Folie 197

Verwandtschaftsbeziehungen

Um Verwandtschaftsbeziehungen zu modellieren, können wir eine Signatur σ nutzen, die aus den folgenden Symbolen besteht:

- 1-stellige Funktionssymbole *Vater*, *Mutter*

  (Bedeutung: $x{=}\mathit{Mutter}(y)$ besagt: „x ist die Mutter von y".)

- 2-stellige Relationssymbole *Geschwister*, *Vorfahr*

  (Bedeutung: $\mathit{Geschwister}(x,y)$ besagt, dass x und y Geschwister sind; $\mathit{Vorfahr}(x,y)$ besagt, dass x ein Vorfahr von y ist.)

Generelles Wissen über Verwandtschaftsbeziehungen lässt sich durch Formeln der Logik erster Stufe repräsentieren, z.B.:

- „Personen mit gleichem Vater und gleicher Mutter sind Geschwister":

$$\forall x \forall y \Big(\big(\big(\mathit{Vater}(x){=}\mathit{Vater}(y) \ \land \ \mathit{Mutter}(x){=}\mathit{Mutter}(y) \big) \ \land \ \neg\, x{=}y \big) \\ \to \ \mathit{Geschwister}(x,y) \Big)$$

Folie 198

- „Eltern sind gerade die unmittelbaren Vorfahren":

$$\forall x \forall y \Big(\big(x{=}\mathit{Vater}(y) \ \lor \ x{=}\mathit{Mutter}(y) \big) \\ \leftrightarrow \ \big(\mathit{Vorfahr}(x,y) \ \land \ \neg \exists z \left(\mathit{Vorfahr}(x,z) \land \mathit{Vorfahr}(z,y) \right) \big) \Big)$$

- „Die Relation *Vorfahr* ist transitiv":

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(\mathit{Vorfahr}(x,y) \land \mathit{Vorfahr}(y,z) \big) \ \to \ \mathit{Vorfahr}(x,z) \Big)$$

- Die folgende Formel $\varphi(x,y)$ besagt „x ist Tante oder Onkel von y":

$$\varphi(x,y) \ := \quad \exists z \Big(\mathit{Geschwister}(x,z) \ \land \ \big(z{=}\mathit{Mutter}(y) \ \lor \ z{=}\mathit{Vater}(y) \big) \Big)$$

Folie 199

- Die folgende Formel $\psi(x)$ besagt „x ist Vater von genau 2 Kindern":

$$\psi(x) \ := \quad \exists y_1 \exists y_2 \Big(\big(\big(x{=}\mathit{Vater}(y_1) \land x{=}\mathit{Vater}(y_2) \big) \land \neg\, y_1{=}y_2 \big) \\ \land \ \forall z \ \big(x{=}\mathit{Vater}(z) \ \to \ (z{=}y_1 \ \lor \ z{=}y_2) \big) \Big)$$

Formale Definition der Semantik der Logik erster Stufe

Folie 200

Um die formale Definition der Semantik der Logik erster Stufe angeben zu können, benötigen wir noch folgende Begriffe:

Folie 201

Notation

- Ist β eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$, ist $x \in \mathsf{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei
$$\beta\tfrac{a}{x}$$
die Belegung mit $\beta\frac{a}{x}(x) = a$ und $\beta\frac{a}{x}(y) = \beta(y)$ für alle $y \in \mathsf{VAR} \setminus \{x\}$.
- Ist $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, ist $x \in \mathsf{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei
$$\mathcal{I}\tfrac{a}{x} \;:=\; (\mathcal{A}, \beta\tfrac{a}{x}).$$

Folie 202

Semantik der Logik erster Stufe

Definition 3.19. Sei σ eine Signatur.
Rekursiv über den Aufbau von $\mathsf{FO}[\sigma]$ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ und jeder σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen *Wahrheitswert* (kurz: *Wert*) $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{0, 1\}$ zuordnet:

Rekursionsanfang:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:
$$[\![t_1{=}t_2]\!]^{\mathcal{I}} \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in \mathsf{T}_\sigma$ gilt:
$$[\![R(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } \left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\right) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folie 203

Rekursionsschritt:

- Ist $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und ist $x \in \mathsf{VAR}$, so ist

$$[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}} \ := \ \begin{cases} 1, & \text{falls es (mind.) ein } a \in A \text{ gibt, so dass } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}} \ := \ \begin{cases} 1, & \text{falls für } \textit{jedes } a \in A \text{ gilt: } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Folie 204

- Die Semantik der Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \to$ ist wie in der Aussagenlogik definiert, d.h. für alle $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gilt:

$$[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \ := \ \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]^{\mathcal{I}} \ := \ \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![(\varphi \vee \psi)]\!]^{\mathcal{I}} \ := \ \begin{cases} 0, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![(\varphi \to \psi)]\!]^{\mathcal{I}} \ := \ \begin{cases} 0, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Folie 205

Beispiel 3.20. Sei $\sigma = \{E/2\}$. Betrachte die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi \ := \ \forall x \forall y\, \big(\, E(x,y) \to E(y,x) \,\big)$$

Für jede σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \quad &\iff \quad \text{für alle } a \in A \text{ gilt: } [\![\forall y(E(x,y) \to E(y,x))]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\
&\iff \quad \text{für alle } a \in A \text{ gilt: für alle } b \in A \text{ gilt:} \\
&\qquad\qquad [\![(E(x,y) \to E(y,x))]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1 \\
&\iff \quad \text{für alle } a \in A \text{ und alle } b \in A \text{ gilt:} \\
&\qquad\qquad \text{Falls } [\![E(x,y)]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1, \text{ so } [\![E(y,x)]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1 \\
&\iff \quad \text{für alle } a \in A \text{ und alle } b \in B \text{ gilt:} \\
&\qquad\qquad \text{Falls } (a,b) \in E^{\mathcal{A}}, \text{ so } (b,a) \in E^{\mathcal{A}} \\
&\iff \quad E^{\mathcal{A}} \text{ ist symmetrisch}
\end{aligned}
$$

Folie 206

Die Modellbeziehung

Definition 3.21. Sei σ eine Signatur.

(a) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ *erfüllt* eine Formel $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ (wir schreiben: $\mathcal{I} \models \varphi$), wenn $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

(b) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ *erfüllt* eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ (wir schreiben: $\mathcal{I} \models \Phi$), wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt.

(c) Ein *Modell* einer Formel φ (bzw. einer Formelmenge Φ) ist eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \varphi$ (bzw. $\mathcal{I} \models \Phi$).

Folie 207

Konventionen

- Terme bezeichnen wir mit t, s und Varianten $s', t_1, t_2, \ldots$.
- Formeln bezeichnen wir mit φ, ψ, χ und Varianten $\psi', \varphi_1, \varphi_2, \ldots$.
- Formelmengen bezeichnen wir mit Φ, Ψ und Varianten $\Psi', \Phi_1, \Phi_2, \ldots$.

Folie 208

Subformeln, Subterme und Syntaxbäume

- Eine Formel ψ ist *Subformel* einer Formel φ, wenn ψ als Teilwort in φ vorkommt (insbes. ist jede Formel eine Subformel von sich selbst).

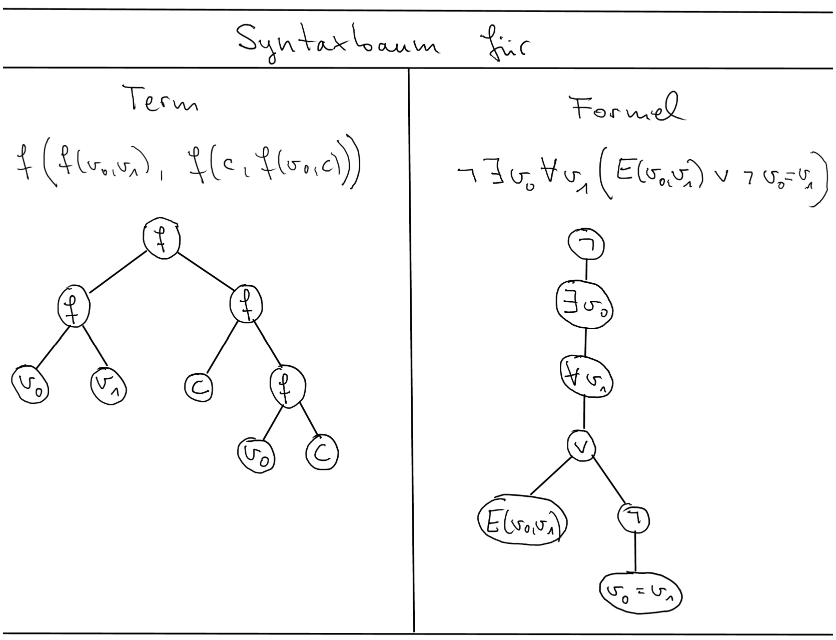
  Beispiel: $\psi := E(v_0, v_1)$ ist Subformel der Formel $\exists v_0 \forall v_1\, E(v_0, v_1)$

- Ein Term s ist *Subterm* eines Terms t, wenn s als Teilwort in t vorkommt (insbes. ist jeder Term ein Subterm von sich selbst).

  Beispiel: $f(c, c)$ ist Subterm des Terms $f(v_0, f(c, c))$.

- Sei $\xi \in \mathsf{T} \cup \mathsf{FO}$, d.h. ξ ist ein Term oder eine Formel der Logik erster Stufe.
  - Ähnlich wie bei aussagenlogischen Formeln können wir einen *Syntaxbaum* für ξ definieren.
  - Das *Lemma über die eindeutige Lesbarkeit von Termen und Formeln* besagt, dass jeder Term und jede Formel genau einen Syntaxbaum hat.
  - Die *Subterme* von ξ (falls $\xi \in \mathsf{T}$) bzw. *Subformeln* von ξ (falls $\xi \in \mathsf{FO}$) sind dann alle Terme bzw. Formeln, die im Syntaxbaum vorkommen.

Beispiel:



Das Isomorphielemma

Folie 209

Das *Isomorphielemma* besagt, dass isomorphe Objekte (Strukturen bzw. Interpretationen) dieselben Formeln der Logik erster Stufe erfüllen.

Um diese Aussage präzise formulieren zu können, benötigen wir die folgende Notation.

Folie 210

Isomorphismen, Belegungen und Interpretationen

Definition 3.22. Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ isomorphe σ-Strukturen und sei π ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ (kurz: $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$).

(a) Für jede Belegung β in $\mathcal{A}$ sei $\pi\beta$ die Belegung in $\mathcal{B}$, so dass für alle $x \in \mathsf{VAR}$ gilt:
$$\pi\beta\,(x) \quad = \quad \pi\big(\beta(x)\big).$$

(b) Für eine Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ schreiben wir $\pi\mathcal{I}$ für die Interpretation
$$\pi\mathcal{I} \quad := \quad (\mathcal{B}, \pi\beta).$$

Aus dieser Definition folgt direkt:

Lemma 3.23. *Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ isomorphe σ-Strukturen, sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, sei β eine Belegung in $\mathcal{A}$ und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$.*
Für jedes $x \in \mathsf{VAR}$, für jedes $a \in A$, für $\mathcal{I}' := \mathcal{I}\frac{a}{x}$ und für $b := \pi(a)$ gilt:
$$\pi\mathcal{I}' \quad = \quad (\pi\mathcal{I})\tfrac{b}{x}.$$

Beweis. Sei $\beta' := \beta\frac{a}{x}$. Somit ist $\mathcal{I}' = (\mathcal{A}, \beta')$ und daher $\pi\mathcal{I}' = (\mathcal{B}, \pi\beta')$. Andererseits ist $(\pi\mathcal{I})\frac{b}{x} = (\mathcal{B}, (\pi\beta)\frac{b}{x})$. Wir müssen also zeigen, dass $\pi\beta' = (\pi\beta)\frac{b}{x}$. D.h., wir müssen für jede Variable $z \in \mathsf{VAR}$ zeigen, dass gilt:
$$(\pi\beta')(z) \quad = \quad \big((\pi\beta)\tfrac{b}{x}\big)(z).$$

Wir betrachten zunächst die Variable $z := x$. Es gilt:

- $\big((\pi\beta)\frac{b}{x}\big)(x) \;=\; b.$
- $(\pi\beta')(x) \;=\; \pi\big(\beta'(x)\big) \;=\; \pi\big(\beta\frac{a}{x}(x)\big) \;=\; \pi(a) \;=\; b.$

Somit ist $(\pi\beta')(x) \;=\; \big((\pi\beta)\frac{b}{x}\big)(x)$.

Betrachte nun eine beliebige Variable $z \neq x$. Es gilt:

- $\big((\pi\beta)\frac{b}{x}\big)(z) \;=\; (\pi\beta)(z) \;=\; \pi\big(\beta(z)\big)$.
- $(\pi\beta')(z) \;=\; \pi\big(\beta'(z)\big) \;=\; \pi\big(\beta\frac{a}{x}(z)\big) \;=\; \pi\big(\beta(z)\big)$.

Somit ist $(\pi\beta')(z) \;=\; \big((\pi\beta)\frac{b}{x}\big)(z)$ für alle $z \in \mathsf{VAR} \setminus \{x\}$. $\square$

Folie 211

Das Isomorphielemma

Satz 3.24 (Das Isomorphielemma der Logik erster Stufe)**.**
Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ isomorphe σ-Strukturen und sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Für jede Belegung β in $\mathcal{A}$ und die σ-Interpretation $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ gilt:

(a) Für jeden σ-Term $t \in \mathsf{T}_\sigma$ ist $[\![t]\!]^{\pi\mathcal{I}} \;=\; \pi\big([\![t]\!]^{\mathcal{I}}\big)$.

(b) Für jede $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel φ gilt:* $\pi\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi$.

Wir werden das Isomorphielemma per Induktion über den Aufbau von Termen und Formeln beweisen. Hierzu zunächst ein kurzer Überblick darüber, wie solche Induktionsbeweise prinzipiell aufgebaut sind.

Folie 212

Beweise per Induktion über den Aufbau von Termen und Formeln

- Ähnlich wie Aussagen über die aussagenlogischen Formeln können wir Aussagen über Terme und Formeln der Logik der erster Stufe per *Induktion über den Aufbau* von T_σ bzw. $\mathsf{FO}[\sigma]$ beweisen.
- Im *Induktionsanfang* beweisen wir die Aussagen für die gemäß Basisregeln definierten Terme bzw. Formeln. Im *Induktionschritt* schließen wir von den Subtermen bzw. Subformeln auf den Term bzw. die Formel selbst.
- Wie bei der Aussagenlogik ist dieses Vorgehen gerechtfertigt, weil es sich auch als vollständige Induktion über die Höhe des Syntaxbaums auffassen lässt.

Folie 213

Beweise per Induktion über den Aufbau von Termen

Schematisch sieht der Beweis einer *Aussage* $\mathbb{A}(t)$ für alle Terme $t \in \mathsf{T}_\sigma$ wie folgt aus:

Induktionsanfang:

- Beweise, dass für alle *Konstantensymbole* $c \in \sigma$ die Aussage $\mathbb{A}(c)$ gilt.
- Beweise, dass für alle *Variablen* $x \in \mathsf{VAR}$ die Aussage $\mathbb{A}(x)$ gilt.

Induktionsschritt:

- Betrachte jedes *Funktionssymbol* $f \in \sigma$, sei $k := \operatorname{ar}(f)$, und seien $t_1, \ldots, t_k$ beliebige σ-Terme. Beweise, dass $\mathbb{A}\big(f(t_1, \ldots, t_k)\big)$ gilt, und verwende dazu die *Induktionsannahme*, dass $\mathbb{A}(t_i)$ *für jedes* $i \in [k]$ gilt.

Mit dieser Vorgehensweise beweisen wir nun Teil (a) des Isomorphielemmas.

Beweis von Teil (a) von Satz 3.24 (Isomorphielemma).
Per Induktion über den Aufbau von Termen. Die Aussage $\mathbb{A}(t)$, die wir für alle Terme $t \in \mathsf{T}_\sigma$ beweisen wollen, besagt: $[\![t]\!]^{\pi\mathcal{I}} = \pi\big([\![t]\!]^{\mathcal{I}}\big)$.

Induktionsanfang:

- Sei $c \in \sigma$ ein Konstantensymbol. **Behauptung:** $[\![c]\!]^{\pi\mathcal{I}} = \pi\big([\![c]\!]^{\mathcal{I}}\big)$.

  Beweis: Es gilt $[\![c]\!]^{\pi\mathcal{I}} \;=\; c^{\mathcal{B}} \;=\; \pi(c^{\mathcal{A}}) \;=\; \pi\big([\![c]\!]^{\mathcal{I}}\big)$.

- Sei $x \in \mathsf{VAR}$. **Behauptung:** $[\![x]\!]^{\pi\mathcal{I}} = \pi\big([\![x]\!]^{\mathcal{I}}\big)$.

  Beweis: Es gilt $[\![x]\!]^{\pi\mathcal{I}} \;=\; (\pi\beta)(x) \;=\; \pi\big(\beta(x)\big) \;=\; \pi\big([\![x]\!]^{\mathcal{I}}\big)$.

Induktionsschritt:

- Sei $f \in \sigma$ ein Funktionssymbol, sei $k := \operatorname{ar}(f)$, seien $t_1, \ldots, t_k$ beliebige σ-Terme.

  Induktionsannahme: Für jedes $i \in [k]$ gilt: $\pi\big([\![t_i]\!]^{\mathcal{I}}\big) = [\![t_i]\!]^{\pi\mathcal{I}}$.

  Behauptung: Es gilt: $[\![f(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\pi\mathcal{I}} = \pi\big([\![f(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}}\big)$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
[\![f(t_1,\dots,t_k)]\!]^{\pi\mathcal{I}} &\overset{\text{Semantik}}{=} f^{\mathcal{B}}\big(\,[\![t_1]\!]^{\pi\mathcal{I}},\dots,[\![t_k]\!]^{\pi\mathcal{I}}\,\big)\\
&\overset{\text{Ind.ann.}}{=} f^{\mathcal{B}}\big(\pi([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}),\dots,\pi([\![t_k]\!]^{\mathcal{I}})\big)\\
&\overset{\pi:\mathcal{A}\cong\mathcal{B}}{=} \pi\big(f^{\mathcal{A}}([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}},\dots,[\![t_k]\!]^{\mathcal{I}})\big)\\
&\overset{\text{Semantik}}{=} \pi\big([\![f(t_1,\dots,t_k)]\!]^{\mathcal{I}}\big).
\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis von Teil (a) von Satz 3.24. □

Folie 214

Teil (b) des Isomorphielemmas beweisen wir per Induktion über den Aufbau von Formeln. Prinzipiell sind solche Induktionsbeweise wie folgt aufgebaut.

Folie 215

Beweise per Induktion über den Aufbau von Formeln

Schematisch sieht der Beweis einer *Aussage* $\mathbb{A}(\varphi)$ für alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ wie folgt aus:

Induktionsanfang:

- Beweise, dass für alle σ-Terme $t_1, t_2 \in \mathsf{T}_\sigma$ die Aussage $\mathbb{A}(t_1{=}t_2)$ gilt.
- Beweise, dass für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \operatorname{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1,\dots,t_k \in \mathsf{T}_\sigma$ die Aussage $\mathbb{A}\big(R(t_1,\dots,t_k)\big)$ gilt

Folie 216

Induktionsschritt:
Seien φ und ψ beliebige $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln. Die *Induktionsannahme* besagt, dass die Aussagen $\mathbb{A}(\varphi)$ und $\mathbb{A}(\psi)$ gelten.
Im Induktionsschritt muss dann gezeigt werden, dass

- für jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$ die Aussage $\mathbb{A}(\exists x\,\varphi)$ gilt,
- für jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$ die Aussage $\mathbb{A}(\forall x\,\varphi)$ gilt,
- die Aussage $\mathbb{A}(\neg\varphi)$ gilt,
- die Aussage $\mathbb{A}\big((\varphi \wedge \psi)\big)$ gilt,
- die Aussage $\mathbb{A}\big((\varphi \vee \psi)\big)$ gilt,

- die Aussage $\mathbb{A}\big((\varphi \to \psi)\big)$ gilt.

Mit dieser Vorgehensweise beweisen wir nun Teil (b) des Isomorphielemmas.

Beweis von Teil (b) von Satz 3.24 (Isomorphielemma).
Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

Für jede Belegung β in $\mathcal{A}$ und für $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ gilt:
$\pi\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi$.

Induktionsanfang:

- Seien $t_1, t_2 \in \mathsf{T}_\sigma$ zwei σ-Terme.

  Behauptung: Für jede Belegung β in $\mathcal{A}$ und für $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ gilt:
  $\pi\mathcal{I} \models t_1{=}t_2 \iff \mathcal{I} \models t_1{=}t_2$.

  Beweis: Sei β eine beliebige Belegung in $\mathcal{A}$ und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$. Gemäß Teil (a) des Isomorphielemmas gilt für jedes $i \in \{1, 2\}$, dass $[\![t_i]\!]^{\pi\mathcal{I}} = \pi\big([\![t_i]\!]^{\mathcal{I}}\big)$. Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
\pi\mathcal{I} \models t_1{=}t_2 \quad &\overset{\text{Semantik}}{\iff} \quad [\![t_1]\!]^{\pi\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\pi\mathcal{I}} \\
&\overset{\text{(a)}}{\iff} \quad \pi\big([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}\big) = \pi\big([\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}\big) \\
&\overset{\pi \text{ bijektiv}}{\iff} \quad [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}} \\
&\overset{\text{Semantik}}{\iff} \quad \mathcal{I} \models t_1{=}t_2.
\end{aligned}
$$

- Sei $R \in \sigma$ ein Relationssymbol, sei $k = \mathrm{ar}(R)$ und seien $t_1, \ldots, t_k \in \mathsf{T}_\sigma$.

  Behauptung: Für jede Belegung β in $\mathcal{A}$ und für $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ gilt:
  $\pi\mathcal{I} \models R(t_1, \ldots, t_k) \iff \mathcal{I} \models R(t_1, \ldots, t_k)$.

  Beweis: Sei β eine beliebige Belegung in $\mathcal{A}$ und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$. Gemäß Teil (a) des Isomorphielemmas gilt für jedes $i \in [k]$, dass $[\![t_i]\!]^{\pi\mathcal{I}} = \pi\big([\![t_i]\!]^{\mathcal{I}}\big)$. Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
\pi\mathcal{I} \models R(t_1, \ldots, t_k) \quad &\overset{\text{Semantik}}{\iff} \quad \big([\![t_1]\!]^{\pi\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\pi\mathcal{I}}\big) \in R^{\mathcal{B}} \\
&\overset{\text{(a)}}{\iff} \quad \Big(\pi\big([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}\big), \ldots, \pi\big([\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\big)\Big) \in R^{\mathcal{B}} \\
&\overset{\pi: \mathcal{A} \cong \mathcal{B}}{\iff} \quad \big([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\big) \in R^{\mathcal{A}} \\
&\overset{\text{Semantik}}{\iff} \quad \mathcal{I} \models R(t_1, \ldots, t_k).
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt:
Seien φ und ψ beliebige $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln.

Induktionsannahme: Für jede Belegung β' in $\mathcal{A}$, für $\mathcal{I}' := (\mathcal{A}, \beta')$ und für jede Formel $\chi \in \{\varphi, \psi\}$ gilt: $\pi\mathcal{I}' \models \chi \iff \mathcal{I}' \models \chi$.

- **Behauptung 1:** Für jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$, für jede Belegung β in $\mathcal{A}$ und für $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ gilt: $\pi\mathcal{I} \models \exists x\, \varphi \iff \mathcal{I} \models \exists x\, \varphi$.

  Beweis: Sei $x \in \mathsf{VAR}$ eine beliebige Variable, und sei β eine beliebige Belegung in $\mathcal{A}$.

  Wir nutzen, dass gemäß Lemma 3.23 für jedes $a \in A$, die Belegung $\beta' := \beta\frac{a}{x}$, die Interpretation $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\frac{a}{x} = (\mathcal{A}, \beta')$ und den Wert $b := \pi(a)$ gilt: $\pi\mathcal{I}' = (\pi\mathcal{I})\frac{b}{x}$.
  Gemäß Induktionsannahme gilt: $\pi\mathcal{I}' \models \varphi \iff \mathcal{I}' \models \varphi$.

  Somit gilt für alle $a \in A$ und für $b := \pi(a)$, dass

  $$(\pi\mathcal{I})\frac{b}{x} \models \varphi \iff \mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi. \tag{3.1}$$

  Es folgt:

  $$\begin{aligned} \mathcal{I} \models \exists x\, \varphi &\overset{\text{Semantik}}{\iff} \text{es gibt (mind.) ein } a \in A, \text{ so dass } \mathcal{I}\tfrac{a}{x} \models \varphi \\ &\overset{(3.1)\text{ mit } b=\pi(a)}{\iff} \text{es gibt (mind.) ein } a \in A, \text{ so dass } (\pi\mathcal{I})\tfrac{\pi(a)}{x} \models \varphi \\ &\overset{\pi \text{ bijektiv}}{\iff} \text{es gibt (mind.) ein } b \in B, \text{ so dass } (\pi\mathcal{I})\tfrac{b}{x} \models \varphi \\ &\overset{\text{Semantik}}{\iff} \pi\mathcal{I} \models \exists x\, \varphi. \end{aligned}$$

- **Behauptung 2:** Für jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$, für jede Belegung β in $\mathcal{A}$ und für $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ gilt: $\pi\mathcal{I} \models \forall x\, \varphi \iff \mathcal{I} \models \forall x\, \varphi$.

  Beweis: Der Beweis folgt analog zum Beweis der Behauptung 1:
  Sei $x \in \mathsf{VAR}$ eine beliebige Variable, und sei β eine beliebige Belegung in $\mathcal{A}$. Dann gilt:

  $$\begin{aligned} \mathcal{I} \models \forall x\, \varphi &\overset{\text{Semantik}}{\iff} \text{für jedes } a \in A \text{ gilt: } \mathcal{I}\tfrac{a}{x} \models \varphi \\ &\overset{(3.1)\text{ mit } b=\pi(a)}{\iff} \text{für jedes } a \in A \text{ gilt: } (\pi\mathcal{I})\tfrac{\pi(a)}{x} \models \varphi \\ &\overset{\pi \text{ bijektiv}}{\iff} \text{für jedes } b \in B \text{ gilt: } (\pi\mathcal{I})\tfrac{b}{x} \models \varphi \\ &\overset{\text{Semantik}}{\iff} \pi\mathcal{I} \models \forall x\, \varphi. \end{aligned}$$

- **Behauptung 3:** Für jede Belegung β in $\mathcal{A}$ und für $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ gilt: $\pi\mathcal{I} \models \neg\varphi \iff \mathcal{I} \models \neg\varphi$.

  Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus der Induktionsannahme und der Definition der Semantik von „$\neg$“.

- **Behauptung 4:** Für jede Belegung β in $\mathcal{A}$, für $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ und für jedes $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ gilt: $\pi\mathcal{I} \models (\varphi * \psi) \iff \mathcal{I} \models (\varphi * \psi)$.

  Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus der Induktionsannahme und der Definition der Semantik von „$\wedge$“, „$\vee$“ und „$\rightarrow$“.

Dies beendet den Beweis von Teil (b) von Satz 3.24. $\square$

Das Koinzidenzlemma

Folie 217

Ähnlich wie für die Aussagenlogik gilt auch für die Logik erster Stufe ein *Koinzidenzlemma*, das besagt, dass der Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ eines Terms t bzw. der Wert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$ einer Formel φ nur abhängt von

- denjenigen Bestandteilen von $\mathcal{A}$, die explizit in t bzw. φ vorkommen, und
- den Belegungen $\beta(x)$ derjenigen Variablen x, die in t vorkommen bzw. die in φ vorkommen und <u>*nicht*</u> *im Wirkungsbereich eines Quantors* stehen.

Um diese Aussage präzise zu formulieren, sind folgende Begriffe nützlich.

Folie 218

Definition 3.25.

(a) Ist ξ ein Term oder eine Formel der Logik erster Stufe, so schreiben wir

- $\sigma(\xi)$, um die Menge aller Relations-, Funktions- und Konstantensymbole zu bezeichnen, die in ξ vorkommen,
- $\text{var}(\xi)$, um die Menge aller in ξ vorkommenden Variablen zu bezeichnen.

(b) Ist φ eine Formel und x eine Variable, so heißt jedes Vorkommen von x in einer Subformel von φ, die von der Form $\exists x\psi$ oder $\forall x\psi$ ist, *gebunden*. Jedes andere Vorkommen von x in φ heißt *frei*.

Beispiel:

$$\varphi \ := \quad \big(\, f(v_0, c){=}v_3 \ \wedge \ \exists v_0\, f(v_0, v_1){=}c \,\big)$$

Das erste Vorkommen von v_0 in φ ist frei, das zweite und dritte Vorkommen von v_0 in φ ist gebunden. Die Vorkommen von v_1 und v_3 in φ sind frei.

Folie 219

Freie Variablen

Definition 3.26. Die Menge $\text{frei}(\varphi)$ aller *freien Variablen* einer Formel φ besteht aus allen Variablen, die mindestens ein freies Vorkommen in φ haben.
Die Menge $\text{frei}(\varphi)$ lässt sich rekursiv über den Aufbau von Formeln wie folgt definieren:

$$\begin{array}{rcl}
\text{frei}(R(t_1, \ldots, t_k)) & := & \text{var}(t_1) \cup \cdots \cup \text{var}(t_k) \\
\text{frei}(t_1{=}t_2) & := & \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2) \\
\text{frei}(\neg\varphi) & := & \text{frei}(\varphi) \\
\text{frei}((\varphi * \psi)) & := & \text{frei}(\varphi) \cup \text{frei}(\psi) \qquad \text{für alle } * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \\
\text{frei}(\exists x\, \varphi) & := & \text{frei}(\forall x\, \varphi) \quad := \quad \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\}.
\end{array}$$

Beispiele:

- $\text{frei}(f(v_0, c){=}v_3) \ = \ \{v_0, v_3\}$
- $\text{frei}(\exists v_0\, f(v_0, v_1){=}c) \ = \ \{v_1\}$
- $\text{frei}(\big(\, f(v_0, c){=}v_3 \ \wedge \ \exists v_0\, f(v_0, v_1){=}c \,\big)) \ = \ \{v_0, v_3, v_1\}$

Folie 220

Das Koinzidenzlemma

Satz 3.27 (Koinzidenzlemma für Terme)**.**
Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ *eine* σ_1*-Interpretation und sei* $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ *eine* σ_2*-Interpretation, wobei* σ_1 *und* σ_2 *Signaturen seien.*
Sei $t \in \mathsf{T}$ *ein Term mit* $\sigma(t) \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$*, so dass gilt:*

1. $\mathcal{A}_1|_{\sigma(t)} \;=\; \mathcal{A}_2|_{\sigma(t)}$
   (d.h., die $\sigma(t)$*-Redukte von* $\mathcal{A}_1$ *und* $\mathcal{A}_2$ *sind identisch), und*
2. $\beta_1(x) = \beta_2(x)$*, für alle* $x \in \mathrm{var}(t)$*.*

Dann gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_1} \;=\; [\![t]\!]^{\mathcal{I}_2}$*.*

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von Termen. Details: Übung. □

Satz 3.28 (Koinzidenzlemma für FO-Formeln)**.**
Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ *eine* σ_1*-Interpretation und sei* $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ *eine* σ_2*-Interpretation, wobei* σ_1 *und* σ_2 *Signaturen seien.*
Sei $\varphi \in \mathsf{FO}$ *eine Formel der Logik erster Stufe mit* $\sigma(\varphi) \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$*, so dass gilt:*

1. $\mathcal{A}_1|_{\sigma(\varphi)} \;=\; \mathcal{A}_2|_{\sigma(\varphi)}$*, und*
2. $\beta_1(x) = \beta_2(x)$*, für alle* $x \in \mathrm{frei}(\varphi)$*.*

Dann gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$*.*

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Details: Übung. □

Folie 221

Notation für Terme

- Für einen Term $t \in \mathsf{T}_\sigma$ schreiben wir $t(x_1, \ldots, x_n)$, um anzudeuten, dass $\mathrm{var}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und seien $a_1, \ldots, a_n \in A$ Elemente des Universums von $\mathcal{A}$.

  Auf Grund des Koinzidenzlemmas gilt

$$[\![t]\!]^{(\mathcal{A},\beta)} \;=\; [\![t]\!]^{(\mathcal{A},\beta')}$$

für alle Belegungen $\beta, \beta' : \mathsf{VAR} \to A$, so dass $\beta(x_i) = a_i = \beta'(x_i)$ für alle $i \in [n]$ gilt. Wir schreiben oft

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n],$$

um das Element $[\![t]\!]^{(\mathcal{A},\beta)}$ zu bezeichnen.

- Für Terme $t \in \mathsf{T}_\sigma$, in denen keine Variable vorkommt, d.h. $\text{var}(t) = \emptyset$ (so genannte *Grundterme*), schreiben wir einfach $t^{\mathcal{A}}$.

Folie 222

Notation für Formeln

- Für eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ schreiben wir $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, um anzudeuten, dass $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und sind $a_1, \ldots, a_n \in A$, so schreiben wir

  $$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

  wenn $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ für eine Belegung $\beta : \mathsf{VAR} \to A$ mit $\beta(x_i) = a_i$ für alle $i \in [n]$ gilt. Auf Grund des Koinzidenzlemmas gilt dann auch für alle Belegungen $\beta' : \mathsf{VAR} \to A$ mit $\beta'(x_i) = a_i$ für alle $i \in [n]$, dass $(\mathcal{A}, \beta') \models \varphi$.

Sätze der Logik erster Stufe

Folie 223

Definition 3.29. Sei σ eine Signatur.

(a) Ein $\mathsf{FO}[\sigma]$-*Satz* (kurz: *Satz*) ist eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ mit $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$.

(b) Wir schreiben S_σ, um die Menge aller $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätze zu bezeichnen und setzen

$$\mathsf{S} := \bigcup_{\sigma \text{ Signatur}} \mathsf{S}_\sigma.$$

(c) Für einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ und eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ schreiben wir $\mathcal{A} \models \varphi$, um auszudrücken, dass $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ für eine (und gemäß Koinzidenzlemma daher für jede) Belegung β in $\mathcal{A}$ gilt.

(d) Für eine Menge $\Phi \subseteq \mathsf{S}_\sigma$ von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen schreiben wir $\mathcal{A} \models \Phi$, falls $\mathcal{A} \models \varphi$ für *jedes* $\varphi \in \Phi$ gilt.

Als direkte Folgerung aus dem Isomorphielemma erhalten wir, dass für *isomorphe* σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und für alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätze φ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi.$$

Folie 224

Modellklassen und Definierbarkeit

Definition 3.30. Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathsf{S}_\sigma$ (d.h. Φ ist eine Menge von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen).

(a) Die *Modellklasse von* Φ ist die Klasse $\mathsf{MOD}_\sigma(\Phi)$ aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$ für die gilt: $\mathcal{A} \models \Phi$.

(b) Für eine Klasse $\mathfrak{C}$ von σ-Strukturen sagen wir

$$\Phi \textit{ definiert } (\text{oder } \textit{axiomatisiert}) \ \mathfrak{C},$$

falls $\mathfrak{C} = \mathsf{MOD}_\sigma(\Phi)$.

(c) Für einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ setzen wir $\mathsf{MOD}_\sigma(\varphi) := \mathsf{MOD}_\sigma(\{\varphi\})$ und sagen, dass φ die Klasse $\mathfrak{C} := \mathsf{MOD}_\sigma(\varphi)$ definiert (bzw. axiomatisiert).

Als direkte Folgerung aus dem Isomorphielemma erhalten wir:

Korollar 3.31. *Für jede Signatur σ und jedes $\Phi \subseteq \mathsf{S}_\sigma$ ist $\mathsf{MOD}_\sigma(\Phi)$ unter Isomorphie abgeschlossen. D.h. für isomorphe σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt:*

$$\mathcal{A} \in \mathsf{MOD}_\sigma(\Phi) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \in \mathsf{MOD}_\sigma(\Phi).$$

Beweis: klar. $\square$

3.5 Beispiele für Formeln der Logik erster Stufe in verschiedenen Anwendungsbereichen

Folie 225

Notation

- Ab jetzt verwenden wir für die Logik erster Stufe ähnliche *Klammerkonventionen* wie bei der Aussagenlogik.
- Für gewisse zweistellige Funktionssymbole wie $+, \cdot$ und zweistellige Relationssymbole wie $\leqslant$ verwenden wir *Infix*- statt Präfixnotation. Dabei setzen wir auf natürliche Weise Klammern, um die eindeutige Lesbarkeit zu gewährleisten.
- Wir schreiben $x < y$ als Abkürzung für die Formel $\big(x \leqslant y \ \land \ \neg\, x{=}y\big)$.

Folie 226

Ordnungen

Beispiel 3.32. Wir betrachten Strukturen und Formeln über der Signatur $\sigma := \{\leqslant\}$.
Zur Erinnerung: Eine σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ ist eine *lineare Ordnung*, falls gilt:

(1) $\leqslant^{\mathcal{A}}$ ist *reflexiv*,

- d.h. für alle $a \in A$ gilt: $a \leqslant^{\mathcal{A}} a$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{\mathit{refl}}$, wobei

$$\varphi_{\mathit{refl}} \ := \quad \forall x \ \ x \leqslant x$$

(2) $\leqslant^{\mathcal{A}}$ ist *transitiv*,

- d.h. für alle $a, b, c \in A$ gilt: Wenn $a \leqslant^{\mathcal{A}} b$ und $b \leqslant^{\mathcal{A}} c$, dann auch $a \leqslant^{\mathcal{A}} c$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{\mathit{trans}}$, wobei

$$\varphi_{\mathit{trans}} \ := \quad \forall x \forall y \forall z \ \Big(\big(x \leqslant y \ \land \ y \leqslant z \big) \ \to \ x \leqslant z \Big)$$

Folie 227

(3) $\leqslant^{\mathcal{A}}$ ist *antisymmetrisch*,

- d.h. für alle $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt: Wenn $a \leqslant^{\mathcal{A}} b$, dann $b \not\leqslant^{\mathcal{A}} a$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{antisym}$, wobei

$$\varphi_{antisym} \ := \quad \forall x \forall y \ \Big(\neg\, x = y \ \rightarrow \big(x \leqslant y \ \rightarrow \ \neg\, y \leqslant x \big) \Big)$$

(4) $\leqslant^{\mathcal{A}}$ ist *konnex*,

- d.h. für alle $a, b \in A$ gilt: $a \leqslant^{\mathcal{A}} b$ oder $b \leqslant^{\mathcal{A}} a$ oder $a = b$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{konnex}$, wobei

$$\varphi_{konnex} \ := \quad \forall x \forall y \ \Big(x \leqslant y \ \vee \ y \leqslant x \ \vee \ x = y \Big)$$

Insgesamt gilt für jede $\{\leqslant\}$-Struktur $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$:
$\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ ist eine lineare Ordnung $\iff$ $\mathcal{A} \models \varphi_{lin.Ord}$, wobei

$$\varphi_{lin.Ord} \ := \quad \varphi_{refl} \ \wedge \ \varphi_{antisym} \ \wedge \ \varphi_{trans} \ \wedge \ \varphi_{konnex}$$

Der $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz $\varphi_{lin.Ord}$ *definiert* (bzw. axiomatisiert) also die Klasse aller linearen Ordnungen.

Folie 228

Arithmetik

Beispiel 3.33. Wir betrachten Formeln über der Signatur $\sigma := \{+, \cdot, \leqslant, \underline{0}, \underline{1}\}$ und ihre Bedeutung im *Standardmodell* $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ *der Arithmetik.*

- *Gesucht:* Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\varphi_{-}(x, y, z)$, die besagt „$x - y = z$“.

  Präzise: Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ soll gelten:

  $$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{-}[a, b, c] \quad \iff \quad a - b = c.$$

  Lösung:

  $$\varphi_{-}(x, y, z) \ := \quad x = z + y$$

- *Gesucht:* Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\varphi_{|}(x, y)$, die besagt „x teilt y“.

  Präzise: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ soll gelten:

  $$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{|}[a, b] \quad \iff \quad \text{es gibt ein } c \in \mathbb{N}, \text{ so dass } a \cdot c = b.$$

  Lösung:

  $$\varphi_{|}(x, y) \ := \quad \exists z \ \ x \cdot z = y$$

Folie 229

- *Gesucht:* Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\varphi_{\equiv}(x,y,z)$, die besagt „$x \equiv y \pmod{z}$“.

  Präzise: Für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$ soll gelten:

  $$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{\equiv}[a,b,c] \quad\Longleftrightarrow\quad a \equiv b \pmod{c} \quad \text{d.h.} \quad c \;\big|\; |a-b|$$

  Lösung:

  $$\varphi_{\equiv}(x,y,z) \;:=\; \exists w \left(\underbrace{\big(\varphi_{-}(x,y,w) \,\vee\, \varphi_{-}(y,x,w)\big)}_{\text{„}w = |x-y|\text{“}} \,\wedge\, \underbrace{\varphi_{|}(z,w)}_{\text{„}z \,|\, w\text{“}} \right)$$

Folie 230

- *Gesucht:* Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\varphi_{prim}(x)$, die besagt „x ist eine Primzahl“.

  Präzise: Für alle $a \in \mathbb{N}$ soll gelten:

  $\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{prim}[a] \iff$ a ist eine Primzahl
  d.h. $a \geqslant 2$ und a ist nur durch sich selbst und durch 1 teilbar.

  Lösung:

  $$\varphi_{prim}(x) \;:=\; \underbrace{\underline{1}+\underline{1} \leqslant x}_{\text{„}x \,\geqslant\, 2\text{“}} \;\wedge\; \forall z \left(\underbrace{\varphi_{|}(z,x)}_{\text{„}z \,|\, x\text{“}} \;\to\; \big(z = x \;\vee\; z = \underline{1} \big) \right)$$

- *Gesucht:* Ein $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ_{∞}, der in $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ besagt

  „Es gibt unendlich viele Primzahlen“.

  Lösung:

  $$\varphi_{\infty} \;:=\; \forall y\, \exists x \left(y \leqslant x \;\wedge\; \varphi_{prim}(x) \right)$$

  In $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ besagt dieser Satz, dass es für jede natürliche Zahl b eine natürliche Zahl $a \geqslant b$ gibt, die eine Primzahl ist.

Folie 231

Worte

Beispiel 3.34. Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ und die Signatur $\sigma_\Sigma = \{\leqslant, P_a, P_b\}$.

Zur Erinnerung: Wir repräsentieren ein nicht-leeres Wort $w \in \Sigma^*$ durch die σ_Σ-Struktur $\mathcal{A}_w$, deren Universum aus der Menge $\{1, \ldots, |w|\}$ aller Positionen in w besteht, und bei der $P_a^{\mathcal{A}_w}$ (bzw. $P_b^{\mathcal{A}_w}$) aus allen Positionen besteht, an denen der Buchstabe a (bzw. b) steht.

Gesucht: Ein $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz φ, so dass für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\mathcal{A}_w \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad w \text{ ist von der Form } a^*b^*.$$

Lösung: Wir konstruieren eine Formel φ, die besagt, dass es eine Position x gibt, so dass alle Positionen links von x den Buchstaben a tragen und alle Positionen rechts von x den Buchstaben b tragen. Dies wird durch folgenden $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz realisiert:

$$\varphi \ := \quad \exists x\, \forall y\, \Big(\big(y < x \to P_a(y)\big) \ \land \ \big(x < y \to P_b(y)\big) \Big)$$

Wie bereits vereinbart, schreiben wir hier „$x < y$“ als Abkürzung für die Formel $(x \leqslant y \land \neg\, x = y)$.

3.6 Logik und Datenbanken

Folie 232

Datenbanken

Zur Erinnerung: Wir repräsentieren eine Kinodatenbank, die Informationen über Kinos, Filme und das aktuelle Programm enthält, durch eine Struktur über der Signatur $\sigma_{\mathsf{KINO}} :=$

$$\{\ R_{\mathit{Kino}}/4,\ \ R_{\mathit{Film}}/3,\ \ R_{\mathit{Prog}}/3\ \}\ \cup\ \{\ \text{‘}c\text{’}\ :\ c \in \mathtt{ASCII}^*\ \}$$

und können so z.B. die folgende Kinodatenbank als σ_{KINO}-Struktur $\mathcal{D}$ auffassen, deren Universum D aus der Menge aller Worte über dem `ASCII`-Alphabet besteht.

Folie 233

Beispiel: Eine Kinodatenbank

Kino			
Name	Adresse	Stadtteil	Telefonnummer
Babylon	Dresdner Str. 126	Kreuzberg	030 61 60 96 93
Casablanca	Friedenstr. 12-13	Adlershof	030 67 75 75 2
Filmtheater am Friedrichshain	Bötzowstr. 1-5	Prenzlauer Berg	030 42 84 51 88
Kino International	Karl-Marx-Allee 33	Mitte	030 24 75 60 11
Moviemento	Kotbusser Damm 22	Kreuzberg	030 692 47 85
Urania	An der Urania 17	Schöneberg	030 21 89 09 1

Film		
Name	Regisseur	Schauspieler
Alien	Ridley Scott	Sigourney Weaver
Blade Runner	Ridley Scott	Harrison Ford
Blade Runner	Ridley Scott	Sean Young
Brazil	Terry Gilliam	Jonathan Pryce
Brazil	Terry Gilliam	Kim Greist
Casablanca	Michael Curtiz	Humphrey Bogart
Casablanca	Michael Curtiz	Ingrid Bergmann
Gravity	Alfonso Cuaron	Sandra Bullock
Gravity	Alfonso Cuaron	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	Matt Damon
Resident Evil	Paul Anderson	Milla Jovovich
Terminator	James Cameron	Arnold Schwarzenegger
Terminator	James Cameron	Linda Hamilton
Terminator	James Cameron	Michael Biehn
...	...	...

Folie 234

Programm		
Kino	Film	Zeit
Babylon	Casablanca	17:30
Babylon	Gravity	20:15
Casablanca	Blade Runner	15:30
Casablanca	Alien	18:15
Casablanca	Blade Runner	20:30
Casablanca	Resident Evil	20:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	20:00
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	21:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	23:00
Kino International	Casablanca	18:00
Kino International	Brazil	20:00
Kino International	Brazil	22:00
Moviemento	Gravity	17:00
Moviemento	Gravity	19:30
Moviemento	Alien	22:00
Urania	Monuments Men	17:00
Urania	Monuments Men	20:00

Folie 235

Die Kinodatenbank als Struktur

Signatur: $\sigma_{\mathsf{KINO}} \ := \ \{ \ R_{Kino}/4, \ R_{Film}/3, \ R_{Prog}/3 \ \} \ \cup \ \{ \text{‘}c\text{’} \ : \ c \in \texttt{ASCII}^* \ \}$

Die Kinodatenbank wird dargestellt als σ_{KINO}-*Struktur* $\mathcal{D}$.

Universum:

$$D \;:=\; \texttt{ASCII}^* \;\supseteq\; \{\, \text{Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93,} \\ \text{Casablanca, } \ldots, \text{ 20:00}\}.$$

Relationen:

$$\begin{aligned}
R^{\mathcal{D}}_{\mathit{Kino}} := \{\; & (\text{Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93}),\\
& (\text{Casablanca, Friedenstr. 12-13, Adlershof, 030 67 75 75 2}),\\
& (\text{Filmtheater am Friedrichshain, Bötzowstr. 1-5, Prenzlauer Berg, 030 42 84 51 88}),\\
& (\text{Kino International, Karl-Marx-Allee 33, Mitte, 030 24 75 60 11}),\\
& (\text{Moviemento, Kotbusser Damm 22, Kreuzberg, 030 692 47 85}),\\
& (\text{Urania, An der Urania 17, Schöneberg, 030 21 89 09 1}) \;\}\\
R^{\mathcal{D}}_{\mathit{Film}} := \{\; & (\text{Alien, Ridley Scott, Sigourney Weaver}),\\
& (\text{Blade Runner, Ridley Scott, Harrison Ford}), \quad \ldots \quad \}\\
R^{\mathcal{D}}_{\mathit{Prog}} := \{\; & (\text{Babylon, Casablanca, 17:30}),\\
& (\text{Babylon, Gravity, 20:15}), \quad \ldots \quad \}.
\end{aligned}$$

Konstanten: $\quad `c\text{'}^{\mathcal{D}} \;:=\; c, \quad$ für jedes $c \in \texttt{ASCII}^*$.
D.h.: jedes Konstantensymbol wird durch den zwischen den Hochkommas stehenden Text interpretiert.

Folie 236

Beispiel 3.35. (a) Die Anfrage

„Gib die Titel aller Filme aus, die um 22:00 Uhr beginnen.“

lässt sich durch folgende $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{KINO}}]$-Formel $\varphi_1(x_T)$ beschreiben:

$$\varphi_1(x_T) \;:=\; \exists x_K\; R_{\mathit{Prog}}(x_K,\, x_T,\, \text{`22:00'})$$

(b) Die Anfrage

„Gib die Titel aller Filme aus, in denen George Clooney mitspielt oder Regie führt“

lässt sich durch folgende $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{KINO}}]$-Formel beschreiben: $\quad \varphi_2(x_T) :=$

$$\exists x_R\; R_{\mathit{Film}}(x_T, x_R, \text{`George Clooney'}) \lor \exists x_S\; R_{\mathit{Film}}(x_T, \text{`George Clooney'}, x_S)$$

Folie 237

(c) Die Anfrage

> *„Gib Name und Stadtteil aller Kinos aus, in denen ein Film läuft, in dem George Clooney mitspielt oder Regie führt"*

lässt sich durch folgende $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{KINO}}]$-Formel beschreiben:
$\varphi_3(x_K, x_{St}) :=$

$$\exists x_A \, \exists x_{Tel} \;\; R_{Kino}(x_K, x_A, x_{St}, x_{Tel}) \quad \wedge$$
$$\exists x_T \, \exists x_Z \; \Big(R_{Prog}(x_K, x_T, x_Z) \quad \wedge$$
$$\big(\exists x_R \; R_{Film}(x_T, x_R, \text{'George Clooney'}) \;\vee\; \exists x_S \; R_{Film}(x_T, \text{'George Clooney'}, x_S) \big) \Big)$$

Die erste Zeile der Formel stellt sicher, dass x_K ein Kino und x_S dessen Stadtteil ist; die Zeilen 2 und 3 stellen sicher, dass im Kino x_K ein Film läuft, in dem George Clooney mitspielt oder Regie führt.

Folie 238

Eine andere Sichtweise auf die Semantik

- Anstatt *Wahrheitswerte in Interpretationen* definieren Formeln der Logik der ersten Stufe auch *Relationen in Strukturen*.
- Junktoren und Quantoren entsprechen dann algebraischen Operatoren auf Relationen.
- Diese Sichtweise ist insbesondere in der Datenbanktheorie wichtig und bildet die Grundlage effizienter Algorithmen zur Auswertung von Datenbankanfragen.

Folie 239

Definition 3.36. Sei σ eine Signatur, sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.
Die von $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *in* $\mathcal{A}$ *definierte* n*-stellige Relation* ist

$$[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;:=\; \{\, (a_1, \dots, a_n) \in A^n \;:\; \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \,\}.$$

Vorsicht: Die Relation $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$ hängt nicht nur von der Formel φ ab, sondern auch von dem Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in \mathsf{VAR}^n$.

Beispiel 3.37. Die $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{KINO}}]$-Formeln $\varphi_2(x_T)$ und $\varphi_3(x_K, x_{St})$ aus Beispiel 3.35 definieren in unserer Beispiel-Datenbank $\mathcal{D}$ die Relationen

$$[\![\varphi_2(x_T)]\!]^{\mathcal{D}} \;=\; \{\; (\text{Gravity})\,,\; (\text{Monuments Men}) \;\}$$

und

$$[\![\varphi_3(x_K, x_{St})]\!]^{\mathcal{D}} \;=\; \{\; (\text{Babylon, Kreuzberg})\,,\; (\text{Moviemento, Kreuzberg})\,,\; (\text{Urania, Schöneberg}) \;\}$$

Folie 240

Ändern der Variablen

Lemma 3.38. *Sei σ eine Signatur, sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{FO}[\sigma]$.*

(a) Für jede Permutation[1] π von $[n]$ ist

$$\left[\!\!\left[\varphi(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})\right]\!\!\right]^{\mathcal{A}} \;=\; \left\{ (a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}) \;:\; (a_1, \ldots, a_n) \in [\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;\right\}.$$

(b) Für jede Variable $y \in \mathsf{VAR} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist

$$[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; [\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;\times\; A.$$

(c) Falls $x_n \notin \mathrm{frei}(\varphi)$, so ist

$$[\![\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; \big\{ (a_1, \ldots, a_{n-1}) \;:\; \textit{es gibt (mind.) ein } a \in A \textit{ so dass } (a_1, \ldots, a_{n-1}, a) \in [\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \big\}.$$

Beweis. (a) ist trivial. (b), (c) folgen direkt aus dem Koinzidenzlemma. □

Folie 241

[1]Eine *Permutation einer Menge M* ist eine bijektive Abbildung von M nach M.

Rekursive Beschreibung von $[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$

Beobachtung 3.39. Ist σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, so können wir für $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ und Variablentupel $(x_1,\ldots,x_n)$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$ die Relation $[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ rekursiv wie folgt beschreiben:

- Falls φ von der Form $t_1 = t_2$ für σ-Terme t_1, t_2 ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; \{\ (a_1,\ldots,a_n) \in A^n : \\ t_1^{\mathcal{A}}[a_1,\ldots,a_n] \;=\; t_2^{\mathcal{A}}[a_1,\ldots,a_n]\ \}$$

  Zur Erinnerung: Für einen σ-Term $t(x_1,\ldots,x_n)$ schreiben wir $t^{\mathcal{A}}[a_1,\ldots,a_n]$ um das Element $[\![t]\!]^{(\mathcal{A},\beta)} \in A$ zu bezeichnen, wobei β eine Belegung mit $\beta(x_i) = a_i$, für alle $i \in [n]$, ist.

- Falls φ von der Form $R(t_1,\ldots,t_k)$ für ein $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und für σ-Terme $t_1,\ldots,t_k$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; \{\ (a_1,\ldots,a_n) \in A^n : \\ \big(\, t_1^{\mathcal{A}}[a_1,\ldots,a_n],\ \ldots,\ t_k^{\mathcal{A}}[a_1,\ldots,a_n]\,\big) \in R^{\mathcal{A}}\ \}$$

Folie 242

- Falls φ von der Form $\neg\psi$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; A^n \setminus [\![\psi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$$

- Falls φ von der Form $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; [\![\psi_1(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \cap [\![\psi_2(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$$

- Falls φ von der Form $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; [\![\psi_1(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \cup [\![\psi_2(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$$

- Falls φ von der Form $(\psi_1 \to \psi_2)$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; [\![\neg\psi_1(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \cup [\![\psi_2(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$$

Folie 243

- Falls φ von der Form $\exists y\ \psi$ ist, so ist

$$\llbracket\varphi(x_1,\dots,x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}} \;=\; \{\ (a_1,\dots,a_n)\in A^n:\ \text{es gibt (mind.) ein } b\in A \text{ mit } (a_1,\dots,a_n,b)\in\llbracket\psi(x_1,\dots,x_n,y)\rrbracket^{\mathcal{A}}\ \}$$

  Somit ist $\llbracket\varphi(x_1,\dots,x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}}$ die *Projektion* von $\llbracket\psi(x_1,\dots,x_n,y)\rrbracket^{\mathcal{A}}$ auf die ersten n Stellen.

- Falls φ von der Form $\forall y\ \psi$ ist, so ist

$$\llbracket\varphi(x_1,\dots,x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}} \;=\; \{\ (a_1,\dots,a_n)\in A^n:\ \text{für jedes } b\in A \text{ ist } (a_1,\dots,a_n,b)\in\llbracket\psi(x_1,\dots,x_n,y)\rrbracket^{\mathcal{A}}\ \}$$

Folie 244

Das Auswertungsproblem für FO

Eingabe:	Eine endliche Signatur σ, eine σ-Struktur $\mathcal{A}$, deren Universum A endlich ist, eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ, eine Zahl $n\in\mathbb{N}$ und ein Variablentupel $(x_1,\dots,x_n)\in\mathsf{VAR}^n$, so dass $\text{frei}(\varphi)\subseteq\{x_1,\dots,x_n\}$ ist.
Aufgabe:	Berechne $\llbracket\varphi(x_1,\dots,x_n)\rrbracket^{\mathcal{A}}$.

Beobachtung 3.39 führt unmittelbar zu einem rekursiven Algorithmus, der das Auswertungsproblem für FO löst.
Eine Laufzeitanalyse zeigt, dass Folgendes gilt:

Folie 245

Satz 3.40. *Es gibt einen Algorithmus, der das Auswertungsproblem für* FO *bei Eingabe einer Signatur σ, eine σ-Struktur $\mathcal{A}$, einer* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel φ, einer Zahl n und eines Variablentupels $(x_1,\dots,x_n)$ mit* $\text{frei}(\varphi)\subseteq\{x_1,\dots,x_n\}$ *in Zeit*

$$O\big(\ \|\varphi\| \;+\; \|\mathcal{A}\| \;+\; \|\varphi\|\cdot w\cdot\|\mathcal{A}\|^{w}\ \big)$$

löst, wobei gilt:

- *$\|\varphi\|$ ist die Länge von φ, aufgefasst als Wort über dem Alphabet $A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$*

- *w ist die maximale Anzahl freier Variablen in Subformeln von φ — die so genannte Breite (engl.: width) von φ*
- *$\|\mathcal{A}\|$ ist ein Maß für die Größe einer geeigneten Repräsentation von $\mathcal{A}$ als Eingabe für einen Algorithmus; präzise:*

$$\|\mathcal{A}\| \ := \quad |\sigma| \ + \ \sum_{R\in\sigma} |R^{\mathcal{A}}|\cdot \mathrm{ar}(R) \ + \ \sum_{f\in\sigma} |A|^{\mathrm{ar}(f)}\cdot(\mathrm{ar}(f){+}1)$$

(Hier ohne Beweis)

3.7 Äquivalenz von Formeln der Logik erster Stufe

Folie 246

Äquivalenz

Definition 3.41. Sei σ eine Signatur.

(a) Zwei $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ und ψ heißen *äquivalent* (kurz: $\varphi \equiv \psi$), wenn für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi.$$

(b) Zwei Formelmengen $\Phi, \Psi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ heißen *äquivalent* (kurz: $\Phi \equiv \Psi$), wenn für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:[2]

$$\mathcal{I} \models \Phi \iff \mathcal{I} \models \Psi.$$

Folie 247

Beispiel 3.42.
Welche der folgenden Formeln sind äquivalent, welche nicht?

- $\varphi_1 := \ \exists y\ E(x,y)$
- $\varphi_2 := \ \exists z\ E(x,z)$
- $\varphi_3 := \ \exists z\ E(y,z)$

Anwort:

[2] *Zur Erinnerung:* $\mathcal{I} \models \Phi$ bedeutet, dass $\mathcal{I} \models \varphi$ für jede Formel $\varphi \in \Phi$ gilt.

(1) $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, denn für jede $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A}$ und jede Belegung $\beta : \mathsf{VAR} \to A$ gilt für $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ Folgendes: $\mathcal{I} \models \varphi_1 \iff$ es gibt ein Element $a \in A$, so dass es in $E^{\mathcal{A}}$ eine Kante von $\beta(x)$ zu a gibt (d.h. $\big(\beta(x), a\big) \in E^{\mathcal{A}}$) $\iff \mathcal{I} \models \varphi_2$.

(2) $\varphi_2 \not\equiv \varphi_3$, denn betrachte die $\{E\}$-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $A = \{1, 2\}$, $E^{\mathcal{A}} = \{(1, 2)\}$, $\beta(x) = 1$, $\beta(y) = 2$ und $\beta(v) = 1$ für alle $v \in \mathsf{VAR} \setminus \{x, y\}$.

Für dieses $\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi_2$, denn es gibt in $\mathcal{A}$ einen Knoten, zu dem von $\beta(x) = 1$ aus eine Kante führt — nämlich den Knoten 2. Andererseits gilt: $\mathcal{I} \not\models \varphi_3$, denn es gibt in $\mathcal{A}$ keinen Knoten, zu dem von $\beta(y) = 2$ aus eine Kante führt.

(3) Aus (1) und (2) und der Transitivität der Relation „$\equiv$“ folgt, dass $\varphi_1 \not\equiv \varphi_3$.

Folie 248

Aussagenlogische Äquivalenzen

Lemma 3.43. *Ersetzt man in äquivalenten aussagenlogischen Formeln alle Aussagenymbole durch* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formeln, so erhält man äquivalente* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formeln.*

Beispiel. Aus der aussagenlogische Äquivalenz $(X \to Y) \equiv \neg X \vee Y$ folgt, dass

$$(\varphi \to \psi) \quad \equiv \quad \neg\varphi \vee \psi$$

für alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ und ψ gilt.

Beweis von Lemma 3.43:
Seien $\alpha, \alpha' \in \mathsf{AL}$ zwei aussagenlogische Formeln.
Seien $X_1, \ldots, X_n$ die Aussagensymbole, die in α oder α' vorkommen.
Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathsf{FO}[\sigma]$.
Seien $\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ bzw. $\alpha'(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln, die aus α bzw. α' entstehen, indem man jedes Vorkommen einer aussagenlogischen Variablen X_i (für $i \in [n]$) durch die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ_i ersetzt.
Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige σ-Interpretation. Wir müssen zeigen, dass gilt:

$$\mathcal{I} \models \alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \quad \iff \quad \mathcal{I} \models \alpha'(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Sei $\tilde{\mathcal{I}}$ eine aussagenlogische Interpretation mit $\tilde{\mathcal{I}}(X_i) = [\![\varphi_i]\!]^{\mathcal{I}}$ jedes $i \in [n]$.

Per Induktion nach dem Aufbau von α lässt sich leicht zeigen (Details: Übung), dass Folgendes gilt:

$$\mathcal{I} \models \alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \quad \iff \quad \tilde{\mathcal{I}} \models \alpha.$$

Analog erhält man auch, dass gilt:

$$\mathcal{I} \models \alpha'(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \quad \iff \quad \tilde{\mathcal{I}} \models \alpha'.$$

Laut Voraussetzung sind α und α' äquivalente aussagenlogische Formeln. Daher gilt:

$$\tilde{\mathcal{I}} \models \alpha \quad \iff \quad \tilde{\mathcal{I}} \models \alpha'.$$

Somit gilt auch:

$$\mathcal{I} \models \alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \quad \iff \quad \mathcal{I} \models \alpha'(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Insgesamt erhalten wir, dass $\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ und $\alpha'(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ äquivalente $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln sind. □

Folie 249

Quantoren und Negation

Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

Lemma 3.44. *Für alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ und alle Variablen $x \in \mathsf{VAR}$ gilt:*

$$\neg \exists x \, \varphi \;\equiv\; \forall x \, \neg\varphi \qquad \textit{und} \qquad \neg \forall x \, \varphi \;\equiv\; \exists x \, \neg\varphi.$$

Beweis: Folgt direkt aus der Definition der Semantik (Details: Übung). □

Folie 250

Das Ersetzungslemma

Lemma 3.45. *Sei σ eine beliebige Signatur und sei φ eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel. Ist φ' eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel, die aus φ entsteht, indem man eine Subformel ψ von φ durch eine zu ψ äquivalente $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel ψ' ersetzt, so ist $\varphi \equiv \varphi'$.*

Beweis: Übung.

Satz 3.46. *Jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel ist äquivalent zu einer $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel, in der* *(a) keiner der Junktoren* $\{\wedge, \rightarrow\}$ *vorkommt*

(d.h., es kommen nur die Junktoren $\neg, \vee$ *und die Quantoren* $\exists, \forall$ *vor).*

(b) nur Existenzquantoren und die Junktoren $\neg, \vee$ *vorkommen.*

(c) nur Existenzquantoren und die Junktoren $\neg, \wedge$ *vorkommen.*

(d) nur Allquantoren und die Junktoren $\neg, \vee$ *vorkommen.*

(e) nur Allquantoren und die Junktoren $\neg, \wedge$ *vorkommen.*

Daher genügt es, bei Beweisen per Induktion über den Aufbau von Formeln von nun an im Induktionsschritt i.d.R. nur noch die Fälle für $\exists$, $\neg$, $\vee$ zu betrachten.

Beweis von Satz 3.46:
Aus Lemma 3.43 folgt, dass „$\wedge$" und „$\rightarrow$" mit Hilfe von „$\vee$" und „$\neg$" ausgedrückt werden können. Somit gilt (a).
Aus Lemma 3.44 folgt, dass „$\forall$" mit Hilfe von „$\exists$" und „$\neg$" ausgedrückt werden. Daher gilt (b).
Da „$\vee$" mit Hilfe von „$\wedge$" und „$\neg$" ausgedrückt werden kann, gilt auch (c).
Außerdem folgt aus Lemma 3.44, dass „$\exists$" mit Hilfe von „$\forall$" und „$\neg$" ausgedrückt werden kann. Aus (b) und (c) folgt daher (d) und (e). $\square$

3.8 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Folie 251

In diesem Abschnitt werden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (kurz: EF-Spiele) eingeführt. Diese liefern ein Werkzeug, mit dessen Hilfe man zeigen kann, dass bestimmte Anfragen oder Klassen von Strukturen nicht in Logik erster Stufe definiert werden können.

Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur Signaturen, die keine Funktionssymbole und keine Konstantensymbole enthalten. Solche Signaturen werden im Folgenden *relationale Signaturen* genannt.

Außerdem werden wir im Folgenden bei zwei gegebenen Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ immer o.B.d.A. annehmen, dass ihre Universen disjunkt sind, d.h. $A \cap B = \emptyset$.

Folie 252

Das m-Runden EF-Spiel

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.
Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$ Folgen der Länge k von Elementen aus A bzw. B.
Sei $m \in \mathbb{N}$.
Das *m-Runden EF-Spiel auf* $(\mathcal{A}, \overline{a})$ *und* $(\mathcal{B}, \overline{b})$ (bzw. *auf* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$, falls $k = 0$ ist) wird gemäß folgender *Spielregeln* gespielt:

Folie 253

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt *Spoiler* (kurz: *Sp*) und *Duplicator* (kurz: *Dupl*).
- Das *Spielbrett* besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ *und* $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine *Partie* des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \ldots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt *Spoiler* entweder ein Element in A, das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B, das im Folgenden mit b_{k+i} bezeichnet wird.

     Beachte: Insbes. kann Spoiler in jeder Runde neu entscheiden, in welcher der beiden Strukturen er ein Element wählen möchte.
  2. Danach antwortet *Duplicator* mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur, d.h. er wählt ein $b_{k+i} \in B$, falls Spoiler ein $a_{k+i} \in A$ gewählt hat, bzw. ein Element $a_{k+i} \in A$, falls Spoiler ein $b_{k+i} \in B$ gewählt hat.

  Nach Runde m ist die Partie beendet und der Gewinner wird wie folgt ermittelt:

Folie 254

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für alle $j, j' \in \{1, \ldots, k{+}m\}$ gilt: $\quad a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

(2) Die Abbildung $\pi : \{a_1, \ldots, a_{k+m}\} \to \{b_1, \ldots, b_{k+m}\}$ mit

$$\pi(a_j) \ := \ b_j\,, \qquad \text{für jedes } \ j \in \{1, \ldots, k{+}m\}$$

ist ein *partieller Isomorphismus* von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ (siehe Definition 3.47).

Spoiler hat gewonnen, falls mindestens eine der beiden obigen Bedingungen verletzt ist.

Definition 3.47 (partieller Isomorphismus)**.**
Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturenund sei $X \subseteq A$. Eine Abbildung $\pi : X \to B$ heißt *partieller Isomorphismus* von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, falls gilt:

(1) π ist injektiv und

(2) für jedes $R \in \sigma$, für $r := \mathrm{ar}(R)$ und für alle $(x_1, \ldots, x_r) \in X^r$ gilt:

$$\big(x_1, \ldots, x_r\big) \in R^{\mathcal{A}} \quad \iff \quad \big(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_r)\big) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Folie 255

Beispiel 3.48. Sei $\sigma := \{\, E/2 \,\}$ und sei $k := 0$.
In den folgenden Darstellungen von Graphen repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen Knoten x und y die beiden gerichteten Kanten (x, y) und (y, x).

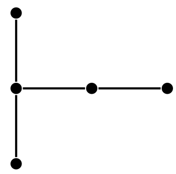
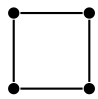
(a) Betrachte die folgenden beiden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

Spoiler gewinnt das 2-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, indem er folgendermaßen spielt:

- Runde 1: Wähle denjenigen Knoten a_1 in $\mathcal{A}$, der mit allen anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist.
- Runde 2: Wähle einen Knoten b_2 in $\mathcal{B}$, der nicht zum Knoten b_1 benachbart ist.

Folie 256

(b) Betrachte die beiden folgenden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$:

$\mathcal{B}$:


Duplicator gewinnt das 2-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, denn in beiden Graphen gibt es zu jedem Knoten sowohl einen Nachbarn, als auch einen Nicht-Nachbarn.

(c) *Spoiler* gewinnt das 3-Runden EF-Spiel auf den Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ aus (b), indem er in den ersten 3 Runden 3 verschiedene nicht benachbarte Knoten in $\mathcal{A}$ wählt.

Folie 257

Die Ziele von Spoiler und Duplicator

Die Gewinnbedingung im EF-Spiel ist so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:

- *Spoilers Ziel* ist es, zu zeigen, dass die beiden Strukturen $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ verschieden sind.
- *Duplicators Ziel* ist es, einen etwaigen Unterschied zwischen den beiden Strukturen zu vertuschen.

Folie 258

Gewinnstrategien

Eine *Strategie* für einen der beiden Spieler im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als Nächstes machen soll. Formal:

- Eine *Strategie für Spoiler* ist eine Abbildung

$$f_{Sp} \ : \ \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \quad \longrightarrow \quad A \cup B.$$

Sind $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente, so gibt

$$f_{Sp}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i})$$

an, welches Element Spoiler in der $(i{+}1)$-ten Runde wählen soll.

Folie 259

- Eine *Strategie für Duplicator* ist eine Abbildung

$$f_{Dupl} \ : \ \bigcup_{i=0}^{m-1} \ (A \times B)^i \times (A \cup B) \quad \longrightarrow \quad B \cup A,$$

so dass für alle $i \in \{0, \ldots, m{-}1\}$, alle $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$, alle $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ und alle $c_{k+i+1} \in A \cup B$ gilt:

$$c_{k+i+1} \in A \quad \iff \quad f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1}) \ \in \ B.$$

Sind $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden und ist $c_{k+i+1} \in A \cup B$ das von Spoiler in Runde $i{+}1$ gewählte Element, so gibt

$$f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1})$$

an, welches Element Duplicator in der $(i{+}1)$-ten Runde wählen soll.

- Eine *Gewinnstrategie* ist eine Strategie für einen der beiden Spieler, mit der er <u>jede</u> Partie des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ gewinnt.

Folie 260

Der Satz von Ehrenfeucht

Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$.

Der Satz von Ehrenfeucht besagt, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Duplicator hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

(2) Für jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *der Quantorentiefe* $\leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \quad \iff \quad \mathcal{B} \models \varphi[b_1, \ldots, b_k].$$

Anschaulich bedeutet dies, dass $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ aus Perspektive von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$ „gleich" aussehen, d.h. dass $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ von solchen Formeln nicht unterschieden werden können.

Die Quantorentiefe einer Formel φ ist dabei die maximale Anzahl von ineinander geschachtelten Quantoren, die in φ vorkommen:

Folie 261

Definition 3.49. Die *Quantorentiefe* (bzw. der *Quantorenrang*, engl.: *quantifier rank*) $\mathrm{qr}(\varphi)$ einer $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ ist rekursiv wie folgt definiert:

- Ist φ *atomar*, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := 0$.
- Ist φ von der Form $\neg\psi$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \mathrm{qr}(\psi)$.
- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \max\{\mathrm{qr}(\psi_1),\ \mathrm{qr}(\psi_2)\}$.
- Ist φ von der Form $\exists x\, \psi$ oder $\forall x\, \psi$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \mathrm{qr}(\psi) + 1$.

Beispiele:

- $\mathrm{qr}\big(\exists x \forall y\, \big(x{=}y \vee E(x,y)\big)\big) = 2.$
- $\mathrm{qr}\big(\exists x\, \big(E(x,x) \vee \forall y\, \neg E(x,y)\big)\big) = 2.$
- $\mathrm{qr}\big(\big(\exists x\, E(x,x) \vee \forall y\, \neg E(x,y)\big)\big) = 1.$

Bemerkung 3.50. Gemäß Satz 3.46 ist jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ äquivalent zu einer $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ', in der nur Existenzquantoren und die Junktoren $\neg, \vee$ vorkommen (d.h.: in φ' kommt keins der Symbole $\forall, \wedge, \rightarrow$ vor).

Man sieht leicht, dass φ' sogar so gewählt werden kann, dass gilt: $\mathrm{qr}(\varphi') = \mathrm{qr}(\varphi)$ und $\mathrm{frei}(\varphi') = \mathrm{frei}(\varphi)$.

Folie 262

Wir beweisen hier nur die Richtung „(1) $\Longrightarrow$ (2)" des Satzes von Ehrenfeucht, deren Kontraposition in folgendem Satz formuliert wird.

Satz 3.51 (Satz von Ehrenfeucht, einfache Version)**.**
Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und sei $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$. Falls es eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ und $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ gibt, so dass

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \ldots, b_k],$$

so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Folie 263

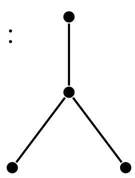
Beweisidee

Zunächst illustrieren wir die Beweisidee an einem Beispiel. Betrachte dazu die Formel

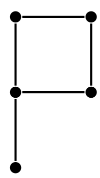
$$\varphi \; := \; \exists x_1 \, \forall x_2 \, \big(\, x_1 {=} x_2 \; \vee \; E(x_1, x_2) \, \big)$$

und die beiden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aus Beispiel 3.48(a).

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$, d.h. $\mathcal{B} \models \neg\varphi$.

Klar:

$$\neg\varphi \quad \equiv \quad \forall x_1 \, \exists x_2 \, \big(\, \neg \, x_1 {=} x_2 \; \wedge \; \neg \, E(x_1, x_2) \, \big).$$

Also gilt:

$$\mathcal{A} \models \quad \exists x_1\, \forall x_2 \,\big(\, x_1{=}x_2 \;\vee\; E(x_1,x_2)\,\big) \tag{3.2}$$

und

$$\mathcal{B} \models \quad \forall x_1\, \exists x_2 \,\big(\, \neg\, x_1{=}x_2 \;\wedge\; \neg\, E(x_1,x_2)\,\big) \tag{3.3}$$

Eine Gewinnstrategie für Spoiler im 2-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lässt sich daran direkt ablesen — Spoiler gewinnt, indem er wie folgt „die Formel φ ausspielt“:

Wegen (3.2) kann Spoiler in Runde 1 ein $a_1 \in A$ wählen, so dass gilt:

$$\mathcal{A} \models \quad \Big(\, \forall x_2 \,\big(\, x_1{=}x_2 \;\vee\; E(x_1,x_2)\,\big)\,\Big)\,[a_1] \tag{3.4}$$

Dieses a_1 ist gerade der Knoten „in der Mitte“ des Graphen $\mathcal{A}$, d.h. der Knoten, der Kanten zu allen anderen Knoten von $\mathcal{A}$ besitzt.

Wegen (3.3) gilt dann für jedes Element $b_1 \in B$, mit dem Duplicator in Runde 1 antworten könnte, dass

$$\mathcal{B} \models \quad \Big(\, \exists x_2 \,\big(\, \neg\, x_1{=}x_2 \;\wedge\; \neg\, E(x_1,x_2)\,\big)\,\Big)\,[b_1] \tag{3.5}$$

In Runde 2 kann Spoiler daher ein Element $b_2 \in B$ auswählen, für das gilt:

$$\mathcal{B} \models \quad \Big(\, \neg\, x_1{=}x_2 \;\wedge\; \neg\, E(x_1,x_2)\,\Big)\,[b_1,\, b_2] \tag{3.6}$$

Wegen (3.4) gilt für jedes Element $a_2 \in A$, mit dem Duplicator in Runde 2 antworten könnte, dass

$$\mathcal{A} \models \quad \Big(\, x_1{=}x_2 \;\vee\; E(x_1,x_2)\,\Big)\,[a_1,\, a_2] \tag{3.7}$$

Am Ende der Partie wissen wir gemäß (3.7) und (3.6) also, dass Folgendes gilt:

$$\Big(\; a_1 = a_2 \;\; \text{oder} \;\; (a_1,a_2) \in E^{\mathcal{A}} \;\Big) \quad \text{und} \quad \Big(\; b_1 \neq b_2 \;\; \text{und} \;\; (b_1,b_2) \notin E^{\mathcal{B}} \;\Big)$$

Falls $a_1 = a_2$ ist, so ist Teil (1) der Gewinnbedingung für Duplicator verletzt; falls $(a_1,a_2) \in E^{\mathcal{A}}$ ist, so ist Teil (2) der Gewinnbedingung für Duplicator verletzt. Also gewinnt Spoiler jede Partie des 2-Runden EF-Spiels auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
Somit hat Spoiler eine Gewinnstrategie im 2-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Folie 264

Beweis von Satz 3.51:

Wir führen den Beweis per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

> Für alle $m, k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:
>
> Falls $\operatorname{qr}(\varphi) \leqslant m$ und $|\operatorname{frei}(\varphi)| \leqslant k$ und
>
> $$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \ldots, b_k],$$
>
> so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Um $\mathbb{A}(\varphi)$ für eine gegebene Formel φ zu beweisen, seien im Folgenden $m, k \in \mathbb{N}$, $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ beliebig gewählt. Es genügt, den Fall zu betrachten, in dem gilt:

$$(*):\quad m \geqslant \operatorname{qr}(\varphi), \quad k \geqslant |\operatorname{frei}(\varphi)| \quad \text{und} \quad \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\overline{b}],$$

denn andernfalls muss gemäß der Formulierung von $\mathbb{A}(\varphi)$ nichts gezeigt werden.

Ziel ist, zu zeigen, dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ hat.

Induktionsanfang: Sei φ atomar. Da σ eine *relationale* Signatur ist, sind Variablen die einzigen σ-Terme, d.h.: $\mathsf{T}_\sigma = \mathsf{VAR}$. Somit ist jede atomare σ-Formel von einer der beiden im Folgenden betrachteten Formen.

- φ ist von der Form $x_{i_1} = x_{i_2}$, mit $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, k\}$

  Wegen $(*)$ gilt dann insbesondere:

  $$a_{i_1} = a_{i_2} \iff b_{i_1} \neq b_{i_2}.$$

  Somit ist Duplicators Gewinnbedingung (1) verletzt, und Spoiler gewinnt jede Partie des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

- φ ist von der Form $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$, wobei $R \in \sigma$, $r := \operatorname{ar}(R)$ und $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, k\}$.

Wegen $(*)$ gilt dann insbesondere:

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \iff (b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}) \notin R^{\mathcal{B}}.$$

Somit ist Duplicators Gewinnbedingung (2) verletzt, und Spoiler gewinnt jede Partie des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Induktionsschritt: Sei φ eine beliebige nicht-atomare $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel. Gemäß Bemerkung 3.50 genügt es, im Folgenden die Fälle zu betrachten, in denen φ von einer der folgenden Formen ist: $\exists y\, \psi$, $\neg\psi$, $(\psi_1 \vee \psi_2)$.

- **Fall 1:** φ ist von der Form $\exists y\, \psi$.

  Gemäß Induktionsannahme gilt $\mathbb{A}(\psi)$.

  Unser Ziel ist, zu zeigen, dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ hat.

  Gemäß $(*)$ gilt: $m \geqslant \mathrm{qr}(\varphi)$, $k \geqslant |\,\mathrm{frei}(\varphi)|$, $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\overline{b}]$.

  Fall 1.1: $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi[\overline{b}]$.

  Da φ von der Form $\exists x\, \psi$ ist, gilt also:

  $$\mathcal{A} \models (\exists x\, \psi)\ [\overline{a}] \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} \models (\forall x\, \neg\psi)\ [\overline{b}]$$

  Somit gibt es ein $a_{k+1} \in A$, so dass gilt: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}, a_{k+1}]$.

  Und für jedes $b_{k+1} \in B$ gilt: $\mathcal{B} \models \neg\psi[\overline{b}, b_{k+1}]$.

  Spoiler kann daher in Runde 1 ein $a_{k+1} \in A$ mit $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}, a_{k+1}]$ wählen. Für jedes $b_{k+1} \in B$, mit dem Duplicator in Runde 1 antworten kann, gilt: $\mathcal{B} \models \neg\psi[\overline{b}, b_{k+1}]$.

  Es gilt:

  - $\mathrm{qr}(\psi) = \mathrm{qr}(\varphi) - 1 \leqslant m{-}1 =: m'$,
  - $|\,\mathrm{frei}(\psi)| \leqslant |\,\mathrm{frei}(\varphi)| + 1 \leqslant k{+}1 =: k'$, und
  - für $\overline{a}' := a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ und $\overline{b}' := b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}$ gilt:

  $$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}'] \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} \not\models \psi[\overline{b}'].$$

  Da $\mathbb{A}(\psi)$ gemäß Induktionsannahme gilt, hat Spoiler daher eine Gewinnstrategie im m'-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a}')$ und $(\mathcal{B}, \overline{b}')$.

  Für das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ erhält Spoiler daher eine Gewinnstrategie, indem er in Runde 1 ein $a_{k+1} \in A$ wählt, so dass gilt: $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}, a_{k+1}]$.

Für jedes $b_{k+1} \in B$, mit dem Duplicator in Runde 1 antworten kann, spielt Spoiler die restlichen $m' = m{-}1$ Runden dann gemäß seiner Gewinnstrategie im $(m{-}1)$-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a}, a_{k+1})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b}, b_{k+1})$.

Fall 1.2: $\mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}]$ und $\mathcal{A} \not\models \varphi[\overline{a}]$.

Da φ von der Form $\exists x\, \psi$ ist, gilt also:

$$\mathcal{B} \models \big(\exists x\, \psi\big)\ [\overline{b}] \qquad \text{und} \qquad \mathcal{A} \models \big(\forall x\, \neg\psi\big)\ [\overline{a}]$$

Somit gibt es ein $b_{k+1} \in B$, so dass gilt: $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}, b_{k+1}]$.

Und für jedes $a_{k+1} \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \neg\psi[\overline{a}, a_{k+1}]$.

Spoiler kann daher in Runde 1 ein $b_{k+1} \in B$ mit $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}, b_{k+1}]$ wählen. Für jedes $a_{k+1} \in A$, mit dem Duplicator in Runde 1 antworten kann, gilt: $\mathcal{A} \models \neg\psi[\overline{a}, a_{k+1}]$.

Genau wie in Fall 1.1 hat Spoiler gemäß Induktionsannahme eine Gewinnstrategie im $(m{-}1)$-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a}, a_{k+1})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b}, b_{k+1})$.

Insgesamt liefert dies eine Gewinnstrategie für Spoiler im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

- **Fall 2:** φ ist von der Form $\neg\psi$.

  Gemäß Induktionsannahme gilt $\mathbb{A}(\psi)$.

  Gemäß $(*)$ gilt: $m \geqslant \mathrm{qr}(\varphi)$, $k \geqslant |\,\mathrm{frei}(\varphi)|$, $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\overline{b}]$.

  Da φ von der Form $\neg\psi$ ist, gilt:
  $\mathrm{qr}(\psi) = \mathrm{qr}(\varphi)$, $\mathrm{frei}(\psi) = \mathrm{frei}(\varphi)$, $\mathcal{A} \not\models \psi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$.

  Da $\mathbb{A}(\psi)$ gemäß Induktionsannahme gilt, hat Spoiler also eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

- **Fall 3:** φ ist von der Form $(\psi_1 \vee \psi_2)$.

  Gemäß Induktionsannahme gilt $\mathbb{A}(\psi_1)$ und $\mathbb{A}(\psi_2)$.

  Gemäß $(*)$ gilt: $m \geqslant \mathrm{qr}(\varphi)$, $k \geqslant |\,\mathrm{frei}(\varphi)|$, $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\overline{b}]$.

  Da φ von der Form $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ist, sieht man leicht, dass es ein $i \in \{1, 2\}$ geben muss, so dass gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi_i[\overline{a}] \quad \iff \quad \mathcal{B} \not\models \psi_i[\overline{b}]$$

Außerdem gilt: $\text{qr}(\psi_i) \leqslant \text{qr}(\varphi) \leqslant m$, und $|\,\text{frei}(\psi_i)| \leqslant |\,\text{frei}(\varphi)| \leqslant k$.
Da $\mathbb{A}(\psi_i)$ gemäß Induktionsannahme gilt, hat Spoiler also eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Dies beendet den Beweis von Satz 3.51. □

Folie 265

Folgerung aus dem Satz von Ehrenfeucht

Notation 3.52. Eine Klasse $\mathfrak{C}$ von σ-Strukturen heißt FO-*definierbar*, falls es einen FO[σ]-Satz φ gibt, der $\mathfrak{C}$ definiert.

Zur Erinnerung:
Für einen FO[σ]-Satz φ und eine Klasse $\mathfrak{C}$ von σ-Strukturen sagen wir „φ *definiert* $\mathfrak{C}$", falls für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \in \mathfrak{C} \iff \mathcal{A} \models \varphi$.

Um für eine gegebene Klasse $\mathfrak{C}$ von σ-Strukturen zu zeigen, dass sie nicht FO-definierbar ist, können wir das folgende Korollar nutzen, das wir als eine einfache Folgerung aus Satz 3.51 erhalten.

Korollar 3.53.
Sei σ eine relationale Signatur und sei $\mathfrak{C}$ eine Klasse von σ-Strukturen. Falls es für jedes $m \geqslant 1$ zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$ gibt, so dass gilt:

1. $\mathcal{A}_m \in \mathfrak{C}$ *und*
2. $\mathcal{B}_m \notin \mathfrak{C}$ *und*
3. *Duplicator hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$,*

dann ist $\mathfrak{C}$ nicht FO-definierbar.

Beweis.
Für jedes $m \geqslant 1$ seien $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$ zwei σ-Strukturen, so dass *1.–3.* gilt. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen an, dass $\mathfrak{C}$ doch FO-definierbar ist. D.h. es gibt einen FO[σ]-Satz φ, der $\mathfrak{C}$ definiert. Somit gilt für jede σ-Struktur $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} \models \varphi \quad \iff \quad \mathcal{C} \in \mathfrak{C}. \tag{3.8}$$

Betrachte die Strukturen $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$ für ein m mit $m \geqslant \text{qr}(\varphi)$.
Laut Voraussetzung wissen wir, dass *1.–3.* gilt.

Wegen $\mathcal{A}_m \in \mathfrak{C}$ und $\mathcal{B}_m \notin \mathfrak{C}$ gilt gemäß (3.8), dass

$$\mathcal{A}_m \models \varphi \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B}_m \not\models \varphi.$$

Gemäß Satz 3.51 (Satz von Ehrenfeucht, einfache Version) hat Spoiler also eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$.
Dies ist ein Widerspruch zu *3.*, da gemäß *3.* Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$ hat. $\square$

Folie 266

Lineare Ordnungen gerader Kardinalität

Wir werden nun Korollar 3.53 anwenden, um folgenden Satz zu zeigen.

Satz 3.54. *Die Klasse* $\mathsf{EVEN}_{\leqslant}$*, die aus allen linearen Ordnungen* $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ *gerader Kardinalität besteht (d.h., A ist endlich und $|A|$ ist durch 2 teilbar), ist* <u>*nicht*</u> FO*-definierbar.*

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es gemäß Korollar 3.53, für jede Rundenzahl $m \geqslant 1$ eine lineare Ordnung $\mathcal{A}_m$ gerader Kardinalität und eine lineare Ordnung $\mathcal{B}_m$ ungerader Kardinalität anzugeben, für die wir zeigen können, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$ hat.

Folie 267

Als Vorbereitung dazu betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 3.55.
Betrachte die linearen Ordnungen $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$ mit $A = \{1, \dots, 8\}$ und $B = \{1, \dots, 9\}$, wobei $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf A und B sind.
Seien außerdem $k := 2$ und $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$ mit $a_1 = b_1 = 1$ und $a_2 = 8$ und $b_2 = 9$ vorgegeben.

Frage: Was ist die größte Zahl m, so dass Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ hat?

Antwort: Duplicator hat eine Gewinnstrategie im 2-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$; Spoiler hat eine Gewinnstrategie im 3-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Folie 268

Die Gewinnstrategie für Duplicator lässt sich zu folgendem Resultat verallgemeinern.

Lemma 3.56. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ endliche*[3] *lineare Ordnungen, sei $k := 2$, und sei $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$, wobei a_1, b_1 die kleinsten und a_2, b_2 die größten Elemente in A und B bezüglich $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ sind.*

Für jedes $m \geqslant 1$ gilt: Falls $|A|, |B| > 2^m$ oder $|A| = |B|$, so hat Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Beweis.
Falls $|A| = |B|$, so sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph (beachte dazu: laut Voraussetzung sind A und B endlich). Sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Duplicator gewinnt das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, indem er in jeder Runde $i \in \{1, \dots, m\}$ einfach Spoilers Zug „kopiert", d.h. er wählt $\pi(a_{k+i})$ $\big($bzw. $\pi^{-1}(b_{k+i})\big)$, wenn Spoiler in Runde i ein Element $a_{k+i} \in A$ (bzw. $b_{k+i} \in B$) wählt.

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass $|A| > 2^m$ und $|B| > 2^m$.
Für jedes $\mathcal{C} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ betrachte die *Distanzfunktion* $Dist : C \times C \to \mathbb{N}$ mit

$$Dist(c, c') \ := \ \big|\{d \in C \ : \ c <^{\mathcal{C}} d \leqslant^{\mathcal{C}} c' \ \text{ oder } \ c' <^{\mathcal{C}} d \leqslant^{\mathcal{C}} c\}\big|$$

für alle $c, c' \in C$.

Folie 269

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_{2+1}, \dots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \dots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \dots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gilt für alle $j, j' \in \{1, \dots, 2{+}i\}$:

1. $a_j \leqslant^{\mathcal{A}} a_{j'} \iff b_j \leqslant^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und
2. $Dist(a_j, a_{j'}) = Dist(b_j, b_{j'})$ oder $Dist(a_j, a_{j'}), Dist(b_j, b_{j'}) \geqslant 2^{m-i}$.

Der Beweis folgt per Induktion nach i.

Induktionsanfang: $i{=}0$
Die Bedingung $(*)_0$ ist erfüllt, denn laut Voraussetzung gilt:

$$Dist(a_1, a_2) \ = \ |A|{-}1 \ \geqslant \ 2^m \quad \text{und} \quad Dist(b_1, b_2) \ = \ |B|{-}1 \ \geqslant \ 2^m.$$

Induktionsschritt: $i \to i{+}1$
Gemäß Induktionsannahme sind bereits i Runden gespielt und die Bedingung $(*)_i$ ist nach der i-ten Runde erfüllt.

[3] d.h., die Universen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind endlich

Fall 1: Spoiler wählt in der $(i{+}1)$-ten Runde ein Element a_{2+i+1} in A.
Falls $a_{2+i+1} = a_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, 2{+}i\}$, so antwortet Duplicator mit $b_{2+i+1} := b_j$ und bewirkt damit, dass die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt ist.
Ansonsten gibt es Indizes $j, j' \in \{1, \ldots, 2{+}i\}$, so dass gilt:

- $a_j <^{\mathcal{A}} a_{2+i+1} <^{\mathcal{A}} a_{j'}$ und
- für alle $j'' \in \{1, \ldots, 2{+}i\}$ gilt: $a_{j''} \leqslant^{\mathcal{A}} a_j$ oder $a_{j'} \leqslant^{\mathcal{A}} a_{j''}$.

Da $(*)_i$ gemäß Induktionsannahme erfüllt ist, gilt:

(1.) $\mathit{Dist}(a_j, a_{j'}) = \mathit{Dist}(b_j, b_{j'})$ *oder*

(2.) $\mathit{Dist}(a_j, a_{j'}), \mathit{Dist}(b_j, b_{j'}) \geqslant 2^{m-i}$.

Im Fall (1.) gibt es ein Element b_{2+i+1} in B, so dass $b_j <^{\mathcal{B}} b_{2+i+1} <^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und $\mathit{Dist}(b_j, b_{2+i+1}) = \mathit{Dist}(a_j, a_{2+i+1})$ und $\mathit{Dist}(b_{2+i+1}, b_{j'}) = \mathit{Dist}(a_{2+i+1}, a_{j'})$.
Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt ist, wenn Duplicator in der $(i{+}1)$-ten Runde dieses b_{2+i+1} wählt.

Im Fall (2.) muss es mindestens ein Element $c \in B$ geben, so dass
$b_j <^{\mathcal{B}} c <^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und $\mathit{Dist}(b_j, c) \geqslant \frac{2^{m-i}}{2} = 2^{m-(i+1)}$ und
$\mathit{Dist}(c, b_{j'}) \geqslant \frac{2^{m-i}}{2} = 2^{m-(i+1)}$.

- Falls $\mathit{Dist}(a_j, a_{2+i+1}) \geqslant 2^{m-(i+1)}$ und $\mathit{Dist}(a_{2+i+1}, a_{j'}) \geqslant 2^{m-(i+1)}$, so wählt Duplicator in der $(i{+}1)$-ten Runde $b_{2+i+1} := c$.
- Falls $\mathit{Dist}(a_j, a_{2+i+1}) < 2^{m-(i+1)}$, so wählt Duplicator das $b_{2+i+1} >^{\mathcal{B}} b_j$ mit $\mathit{Dist}(b_j, b_{2+i+1}) = \mathit{Dist}(a_j, a_{2+i+1})$.
- Falls $\mathit{Dist}(a_{2+i+1}, a_{j'}) < 2^{m-(i+1)}$, so wählt Duplicator das $b_{2+i+1} <^{\mathcal{B}} b_{j'}$ mit $\mathit{Dist}(b_{2+i+1}, b_{j'}) = \mathit{Dist}(a_{2+i+1}, a_{j'})$.

Man kann leicht nachprüfen, dass in jedem der 3 Fälle die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt ist.

Fall 2: Spoiler wählt in der $(i{+}1)$-ten Runde ein Element b_{2+i+1} in B.
Duplicators Antwort a_{2+i+1} in A wird analog zu Fall 1 ermittelt.

Damit sind wir fertig mit dem Induktionsschritt.
Wir haben also bewiesen, dass Duplicator, so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die Bedingung $(*)_i$ erfüllt ist.
Insbesondere ist nach Runde m die Bedingung $(*)_m$ erfüllt und Duplicator hat daher die Partie gewonnen. $\square$

Folie 270

Satz 3.54 folgt nun direkt aus Korollar 3.53 und Lemma 3.56.

Beweis von Satz 3.54.
Um nachzuweisen, dass die Klasse $\mathit{EVEN}_{\leqslant}$ *nicht* FO-*definierbar* ist, genügt es laut Korollar 3.53, für jede Zahl $m \geqslant 1$ eine endliche lineare Ordnung $\mathcal{A}_m$ gerader Kardinalität und eine endliche lineare Ordnung $\mathcal{B}_m$ ungerader Kardinalität zu finden, so dass Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$ besitzt.
Wir wählen für $\mathcal{A}_m$ die natürliche lineare Ordnung mit Universum $A_m := \{1, \ldots, 2^m{+}2\}$, und für $\mathcal{B}_m$ die natürliche lineare Ordnung mit Universum $B_m := \{1, \ldots, 2^m{+}1\}$.
Gemäß Lemma 3.56 hat Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}_m, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}_m, \overline{b})$, wobei $\overline{a} = a_1, a_2$ und $\overline{b} = b_1, b_2$ jeweils aus dem kleinsten und dem größten Element der beiden linearen Ordnungen bestehen.
Offensichtlicherweise ist diese Gewinnstrategie auch eine Gewinnstrategie für Duplicator im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$. □

Folie 271

Bemerkung 3.57.
Der obige Beweis zeigt nicht nur, dass die Klasse $\mathit{EVEN}_{\leqslant}$ nicht FO-definierbar ist, sondern sogar die etwas stärkere Aussage:

> *Es gibt keinen* FO$[\{\leqslant\}]$*-Satz* ψ*, so dass für jede* ***endliche lineare Ordnung*** $\mathcal{B}$ *gilt:* $\mathcal{B} \models \psi \iff |B|$ *ist gerade.*

Folie 272

Graph-Zusammenhang und Erreichbarkeit sind nicht FO-definierbar

Wir können die Aussage von Bemerkung 3.57 nutzen, um Folgendes zu zeigen.

Satz 3.58. *Sei* $\sigma := \{E/2\}$.

(a) „Graph-Zusammenhang ist nicht FO*-definierbar."*

D.h.: Es gibt keinen FO$[\sigma]$*-Satz* φ_{Conn}*, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen* $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ *und die zugehörige*[4] σ*-Struktur* $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ *gilt:* $\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ *ist zusammenhängend.*

[4] d.h. $A = V^{\mathcal{G}}$ und $E^{\mathcal{A}} = \{(u,v) \ : \ \{u,v\} \in E^{\mathcal{G}}\}$

(b) *„Erreichbarkeit ist nicht* FO*-definierbar.“*

D.h.: Es gibt keine FO$[\sigma]$*-Formel* $\varphi_{Reach}(x,y)$*, so dass für alle endlichen gerichteten Graphen* $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ *und alle Knoten* $a, b \in A$ *gilt:*
$\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a,b] \iff$ *es gibt in* $\mathcal{A}$ *einen Weg von Knoten* a *zu Knoten* b*.*

Beweis.
(a): Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nutzen Bemerkung 3.57.
Angenommen, φ_{Conn} ist ein FO$[\sigma]$-Satz, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen $\mathcal{G}$ und die zugehörige σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

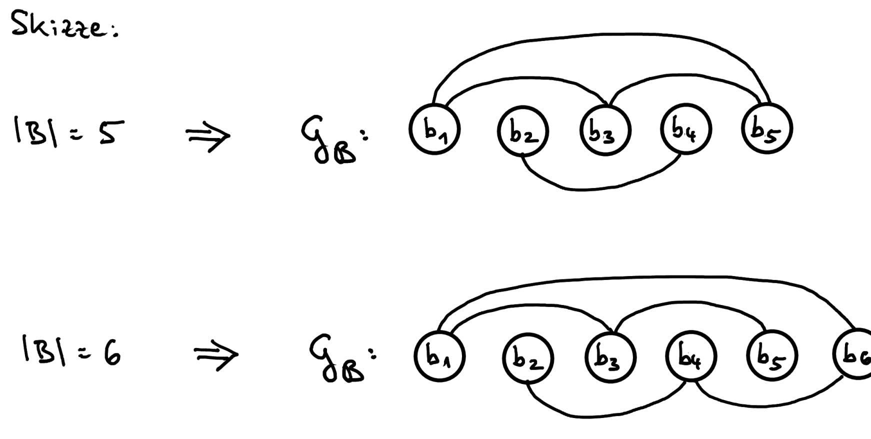
$$\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G} \text{ ist zusammenhängend.} \tag{3.9}$$

Idee: Nutze den Satz φ_{Conn}, um einen FO$[\{\leqslant\}]$-Satz ψ zu konstruieren, so dass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$ gilt:

$$\mathcal{B} \models \psi \iff |B| \text{ ist gerade.}$$

Von Bemerkung 3.57 wissen wir, dass es einen solchen Satz ψ nicht geben kann.

Um den Satz ψ zu konstruieren, ordnen wir jeder endlichen linearen Ordnung $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$ mit $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $b_1 <^{\mathcal{B}} b_2 <^{\mathcal{B}} \cdots <^{\mathcal{B}} b_n$ (für $n := |B|$) den Graphen $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ mit Knotenmenge B zu, dessen Kantenmenge aus genau den Kanten zwischen b_i und b_{i+2}, für alle $i \leqslant n-2$, und einer zusätzlichen Kante zwischen b_1 und b_n besteht.



Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{B}} \text{ ist zusammenhängend} \iff |B| \text{ ist gerade.} \tag{3.10}$$

Sei nun $\xi_E(x,y)$ eine $\mathsf{FO}[\{\leqslant\}]$-Formel, die besagt:

- „$y = x{+}2$“ oder „$x = y{+}2$“ oder
- „x ist das kleinste und y ist das größte Element bzgl. $\leqslant$“ oder
- „x ist das größte und y ist das kleinste Element bzgl. $\leqslant$“.

Klar: Eine solche $\mathsf{FO}[\{\leqslant\}]$-Formel $\xi_E(x,y)$ lässt sich leicht formulieren (Details: Übung).
Ausgewertet in einer linearen Ordnung $\mathcal{B}$ „simuliert“ die Formel $\xi_E(x,y)$ gewissermaßen die Kantenrelation des Graphen $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$.

Sei nun ψ der $\mathsf{FO}[\{\leqslant\}]$-Satz, der aus dem $\mathsf{FO}[\{E\}]$-Satz φ_{Conn} entsteht, indem jedes Atom der Form $E(z_1,z_2)$ durch die $\mathsf{FO}[\{\leqslant\}]$-Formel $\xi_E(z_1,z_2)$ ersetzt wird.
Der Satz ψ ist also gerade so konstruiert, dass beim Auswerten von ψ in $\mathcal{B}$ die Auswertung von φ_{Conn} in der zu $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ gehörenden σ-Struktur $\mathcal{A}$ simuliert wird. Es gilt also für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{B}$, den ungerichteten endlichen Graphen $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ und die zugehörige σ-Struktur $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} \models \psi \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \\
&\overset{(3.9)}{\iff} \quad \mathcal{G}_{\mathcal{B}} \text{ ist zusammenhängend} \\
&\overset{(3.10)}{\iff} \quad |B| \text{ ist gerade.}
\end{aligned}$$

Aber dies ist ein Widerspruch zu Bemerkung 3.57.
Somit muss unsere Annahme, dass der Satz φ_{Conn} existiert, falsch gewesen sein. Dies beendet den Beweis von *(a)*.

Folie 273

(b) folgt direkt aus *(a)*, denn:
Angenommen $\varphi_{Reach}(x,y)$ wäre eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel, so dass für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a,b \in A$ gilt:
$\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a,b] \iff$ es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg von Knoten a zu Knoten b.
Dann ist

$$\varphi_{Conn} \;:=\; \forall x\, \forall y\ \varphi_{Reach}(x,y)$$

ein $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz, der in einem gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ genau dann erfüllt ist, wenn $\mathcal{A}$ stark zusammenhängend ist.

Insbesondere gilt dann für jeden ungerichteten Graphen $\mathcal{G}$ und die zu $\mathcal{G}$ gehörende σ-Struktur $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ ist zusammenhängend.
Dies ist ein Widerspruch zu *(a)*.

□

Folie 274

Logische Reduktionen

Bemerkung 3.59.
Die im Beweis von Satz 3.58 benutzte Vorgehensweise ist unter dem Begriff *logische Reduktion* (oder *Transduktionen*) bekannt.

Im Beweis von Teil *(b)* wurde gezeigt: Falls es eine $\mathsf{FO}[\{E\}]$-Formel gibt, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist, dann gibt es auch eine $\mathsf{FO}[\{E\}]$-Formel, die Graph-Zusammenhang definiert.

Somit wurde das Problem, einen $\mathsf{FO}[\{E\}]$-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert, auf das Problem reduziert, eine $\mathsf{FO}[\{E\}]$-Formel zu finden, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist.

Folie 275

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen $\mathsf{FO}[\{\leqslant\}]$-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine *gerade* Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen $\mathsf{FO}[\{E\}]$-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine *gerade* Kardinalität“ FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen „simuliert“ (bzw. “interpretiert“), indem man die Kantenrelation des Graphen durch eine $\mathsf{FO}[\{\leqslant\}]$-Formel beschreibt.

Generell ist diese Methode der *logischen Reduktionen* oft nützlich, um bereits bekannte Nicht-Definierbarkeits-Resultate auf neue Nicht-Definierbarkeits-Resultate zu übertragen.

3.9 Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und die Folgerungsbeziehung

Folie 276

Die im Folgenden eingeführten Begriffe der Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und der Folgerungsbeziehung sind für die Logik erster Stufe ähnlich definiert wie für die Aussagenlogik.

Im Folgenden sei σ stets eine beliebige Signatur.

Folie 277

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Definition 3.60. Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ (bzw. eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$) heißt *erfüllbar*, wenn es eine σ-Interpretation gibt, die φ (bzw. Φ) erfüllt.

Eine Formel oder Formelmenge, die *nicht erfüllbar* ist, nennen wir *unerfüllbar*.

Definition 3.61. Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ heißt *allgemeingültig*, wenn *jede* σ-Interpretation die Formel φ erfüllt.

Wir schreiben kurz $\models \varphi$ um auszudrücken, dass φ allgemeingültig ist.

Offensichtlicherweise gilt für alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ:

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig} \quad \iff \quad \neg\varphi \text{ ist unerfüllbar.}$$

Folie 278

Verum ($\top$) und Falsum ($\bot$)

Beispiele:

- Die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\forall v_0\ v_0{=}v_0$ ist allgemeingültig.
- Die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\exists v_0\ \neg\ v_0{=}v_0$ ist unerfüllbar.

Notation 3.62.
Wir schreiben $\top$ (in Worten: *Verum*), um die allgemeingültige FO-Formel $\forall v_0\ v_0{=}v_0$ zu bezeichnen.

Wir schreiben $\bot$ (in Worten: *Falsum*), um die unerfüllbare FO-Formel $\exists v_0\ \neg\ v_0{=}v_0$ zu bezeichnen.

Folie 279

Die Folgerungsbeziehung

Definition 3.63. Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel ψ *folgt* aus einer Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ (wir schreiben: $\Phi \models \psi$), wenn für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt: Falls $\mathcal{I} \models \Phi$, so gilt auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Notation. Für zwei $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ, ψ schreiben wir kurz $\varphi \models \psi$ an Stelle von $\{\varphi\} \models \psi$ und sagen, dass die Formel ψ aus der Formel φ folgt.

Folie 280

Zusammenhänge

Es bestehen ähnliche Zusammenhänge wie bei der Aussagenlogik:

Lemma 3.64 (Allgemeingültigkeit, Unerfüllbarkeit und Folgerung)**.**
Für jede $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel* φ *gilt:*

(a) φ *ist allgemeingültig* $\iff$ $\varphi \equiv \top$ $\iff$ $\top \models \varphi$.

(b) φ *ist unerfüllbar* $\iff$ $\varphi \equiv \bot$ $\iff$ $\varphi \models \bot$.

(c) $\models \varphi$ $\iff$ $\emptyset \models \varphi$.

D.h.: φ *ist allgemeingültig* $\iff$ φ *folgt aus der leeren Menge.*

Lemma 3.65 (Erfüllbarkeit und die Folgerungsbeziehung)**.**

(a) Für alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ *und alle* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formeln* ψ *gilt:*

$$\Phi \models \psi \quad \iff \quad \Phi \cup \{\neg\psi\} \ \textit{ist unerfüllbar.}$$

(b) Für alle $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formeln* φ, ψ *gilt:* $\varphi \equiv \psi \iff \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Beweis der beiden Lemmas: Analog zu den Beweisen der entsprechenden Resultate in der Aussagenlogik. Details: Übung.

3.10 Normalformen

Folie 281

Negationsnormalform

Die *Negationsnormalform* für Formeln der Logik erster Stufe ist ähnlich definiert wie die Negationsnormalform der Aussagenlogik.

Definition 3.66. Sei σ eine beliebige Signatur.
Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ ist in *Negationsnormalform* (kurz: *NNF*), wenn Negationszeichen in φ nur unmittelbar vor atomaren Subformeln auftreten und φ den Junktor „$\to$“ nicht enthält.

Satz 3.67. *Jede* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel* φ *ist äquivalent zu einer Formel in NNF.*

Beweis. Gemäß Satz 3.46 können wir o.B.d.A. annehmen, dass φ den Junktor „$\to$“ nicht enthält.
Ähnlich wie für die Aussagenlogik definieren wir per Induktion über den Aufbau zu jeder $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ zwei $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ' und φ'' in *NNF*, so dass gilt: $\varphi \equiv \varphi'$ und $\neg\varphi \equiv \varphi''$.
Details: Übung. $\square$

Folie 282

Pränexe Normalform

Definition 3.68. Sei σ eine beliebige Signatur.

(a) Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel heißt *quantorenfrei*, falls in ihr keins der Symbole $\exists, \forall$ vorkommt.

Die Menge aller quantorenfreien $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln bezeichnen wir mit QF_σ.

(b) Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ ist in *pränexer Normalform* (bzw. *Pränex-Normalform*, kurz: *PNF*), wenn sie von der Form

$$Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\ \chi$$

ist, wobei $n \geqslant 0$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathsf{VAR}$ und $\chi \in \mathsf{QF}_\sigma$.

$Q_1x_1 \cdots Q_nx_n$ wird *Quantoren-Präfix von* φ genannt;

χ heißt *Kern* (bzw. *Matrix*) von φ.

Satz 3.69. *Jede* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel* φ *ist äquivalent zu einer* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel* φ' *in pränexer Normalform mit* $\operatorname{frei}(\varphi') = \operatorname{frei}(\varphi)$.

Folie 283

Bevor wir Satz 3.69 beweisen, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 3.70. Sei

$$\varphi(y) \ := \quad \forall x \, \neg \big(\exists y \, E(x,y) \ \to \ \exists x \, E(x,y) \big).$$

Umformung in eine äquivalente Formel in Pränex-Normalform:

$\varphi \ \equiv \ \forall x \, \neg \big(\neg\exists y \, E(x,y) \ \vee \ \exists x \, E(x,y) \big)$	Elimination von " $\to$ "
$\equiv \ \forall x \, \neg \big(\forall y \, \neg E(x,y) \ \vee \ \exists x \, E(x,y) \big)$	$\neg\exists y \, \psi \ \equiv \ \forall y \, \neg\psi$
$\equiv \ \forall x \, \neg \big(\forall z_1 \, \neg E(x,z_1) \ \vee \ \exists z_2 \, E(z_2,y) \big)$	Umbenennung von gebundenen Variablen
$\equiv \ \forall x \, \neg \, \forall z_1 \, \exists z_2 \, \big(\neg E(x,z_1) \ \vee \ E(z_2,y) \big)$	Zusammenlegung der Disjunktion
$\equiv \ \forall x \, \exists z_1 \, \forall z_2 \, \neg \, \big(\neg E(x,z_1) \ \vee \ E(z_2,y) \big)$	Negation

Diese Formel ist in PNF.

Folie 284

Beweis von Satz 3.69:

Wir zeigen zunächst drei Lemmas und schließen danach den Beweis ab.

Lemma 3.71.
Sei $\psi := Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \chi$, *wobei* $n \geqslant 0$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$ *und* $\chi \in \mathsf{FO}[\sigma]$. *Für jedes* $Q \in \{\exists, \forall\}$ *sei*

$$\widetilde{Q} \ := \ \begin{cases} \forall & \textit{falls } \ Q = \exists\,, \\ \exists & \textit{falls } \ Q = \forall\,. \end{cases}$$

Dann gilt: $\quad \neg\,\psi \quad \equiv \quad \widetilde{Q}_1 x_1 \cdots \widetilde{Q}_n x_n \, \neg\chi.$

Beweis. Einfaches Nachrechnen per Induktion nach n unter Verwendung der Tatsache, dass $\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$ und $\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$ (Lemma 3.44). Details: Übung. □

Folie 285

Lemma 3.72. *Für alle* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formeln* φ *und* ψ *und für alle Variablen* $x \in \mathsf{VAR} \setminus \mathrm{frei}(\varphi)$ *gilt:*

$$\begin{array}{lll}(\varphi \wedge \exists x\,\psi) \equiv \exists x\,(\varphi\wedge\psi) & , & (\varphi \wedge \forall x\,\psi) \equiv \forall x\,(\varphi\wedge\psi)\ , \\ (\varphi \vee \exists x\,\psi) \equiv \exists x\,(\varphi\vee\psi) & , & (\varphi \vee \forall x\,\psi) \equiv \forall x\,(\varphi\vee\psi)\ .\end{array}$$

Beweis. Die Beweise aller vier Äquivalenzen sind ähnlich. Wir beweisen hier nur die erste:

$$(\varphi \wedge \exists x\,\psi) \equiv \exists x\,(\varphi\wedge\psi)\ . \tag{3.11}$$

„$\Longrightarrow$“: Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine beliebige σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models (\varphi \wedge \exists x\,\psi)$.

Dann gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \exists x\,\psi$. Insbesondere gibt es ein $a \in A$, so dass $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \psi$.

Wegen $\mathcal{I} \models \varphi$ und $x \notin \mathrm{frei}(\varphi)$ folgt aus dem Koinzidenzlemma, dass auch $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

Somit gilt: $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models (\varphi\wedge\psi)$, und daher gilt: $\mathcal{I} \models \exists x\,(\varphi\wedge\psi)$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine beliebige σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \exists x\,(\varphi\wedge\psi)$.

Somit gibt es ein $a \in A$, so dass $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models (\varphi\wedge\psi)$.

Insbesondere gilt: $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$. Wegen $x \notin \mathrm{frei}(\varphi)$ folgt gemäß Koinzidenzlemma, dass $\mathcal{I} \models \varphi$.

Außerdem gilt wegen $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \psi$, dass $\mathcal{I} \models \exists x\,\psi$.

Insgesamt gilt also: $\mathcal{I} \models (\varphi \wedge \exists x\,\psi)$.

Dies beendet den Beweis von (3.11). Die anderen drei im Lemma genannten Äquivalenzen können auf analoge Art bewiesen werden. Details: Übung. □

Folie 286

Lemma 3.73. *Seien*

$$\psi_1 := Q_1x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \ \chi_1 \qquad \textit{und} \qquad \psi_2 := Q'_1y_1 \cdots Q'_my_m \ \chi_2 \ ,$$

wobei $\ell, m \geqslant 0$, $Q_1, \ldots, Q_\ell$, $Q'_1, \ldots, Q'_m \in \{\exists, \forall\}$,
$x_1, \ldots, x_\ell$, $y_1, \ldots, y_m \in \mathsf{VAR}$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathsf{FO}[\sigma]$.
Es gelte: $\{x_1, \ldots, x_\ell\} \cap \text{frei}(\psi_2) = \emptyset$ *und* $\{y_1, \ldots, y_m\} \cap \text{frei}(\chi_1) = \emptyset$.
Dann gilt für $* \in \{\wedge, \vee\}$, *dass*

$$\big(\psi_1 \ * \ \psi_2\big) \quad \equiv \quad Q_1x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \ Q'_1y_1 \cdots Q'_my_m \ \big(\chi_1 \ * \ \chi_2\big).$$

Beweis. Zwei Induktionen über ℓ bzw. m unter Verwendung von Lemma 3.72:
Per Induktion nach ℓ folgt unter Verwendung von Lemma 3.72, dass

$$\big(\ \psi_2 \ * \ \ Q_1x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \ \chi_1 \ \big) \quad \equiv \quad Q_1x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \ \big(\ \psi_2 \ * \ \chi_1 \ \big).$$

Die Kommutativität von $* \in \{\wedge, \vee\}$ liefert daher:

$$\big(\ \psi_1 \ * \ \psi_2 \ \big) \quad \equiv \quad Q_1x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \ \big(\ \chi_1 \ * \ \psi_2 \ \big). \tag{3.12}$$

Andererseits folgt per Induktion nach m unter Verwendung von Lemma 3.72, dass

$$\big(\ \chi_1 \ * \ \ Q'_1y_1 \cdots Q'_my_m \ \chi_2 \ \big) \quad \equiv \quad Q'_1y_1 \cdots Q'_my_m \ \big(\ \chi_1 \ * \ \chi_2 \ \big). \tag{3.13}$$

Die Kombination von (3.12) und (3.13) liefert also:

$$\big(\ \psi_1 \ * \ \psi_2 \ \big) \quad \equiv \quad Q_1x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \ Q'_1y_1 \cdots Q'_my_m \ \big(\chi_1 \ * \ \chi_2\big).$$

□

Folie 287

Abschluss des Beweises von Satz 3.69:

Sei φ eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel. Gemäß Satz 3.46 können wir o.B.d.A. annehmen, dass φ den Junktor „$\to$“ nicht enthält.
Per Induktion über den Aufbau von φ zeigen wir, dass es eine zu φ äquivalente Formel φ' in PNF gibt mit $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$.

Induktionsanfang: Atomare Formeln sind quantorenfrei und daher insbesondere in PNF.

Induktionsschritt:

Fall 1: φ ist von der Form $Qx\,\psi$ mit $Q \in \{\exists,\forall\}$, $x \in \mathsf{VAR}$, $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$:
Gemäß Induktionsannahme gibt es eine zu ψ äquivalente Formel ψ' in PNF mit $\text{frei}(\psi') = \text{frei}(\psi)$.
Offensichtlich ist $\varphi' := Qx\,\psi'$ die gesuchte PNF-Formel mit $\varphi' \equiv \varphi$.
Es gilt: $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$.

Fall 2: φ ist von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.
Gemäß Induktionsannahme gibt es eine zu ψ äquivalente Formel ψ' in PNF mit $\text{frei}(\psi') = \text{frei}(\psi)$.
Klar: $\varphi \equiv \neg\psi'$.
Wir nutzen Lemma 3.71 und erhalten die zu $\neg\psi'$ äquivalente Formel φ' in PNF. Es gilt: $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$.

Fall 3: φ ist von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge,\vee\}$ und $\psi_1,\psi_2 \in \mathsf{FO}[\sigma]$.
Gemäß Induktionsannahme gibt es Formeln ψ_1',ψ_2' in PNF, so dass für jedes $i \in \{1,2\}$ gilt: $\psi_i' \equiv \psi_i$ und $\text{frei}(\psi_i') = \text{frei}(\psi_i)$.
Klar: $\varphi \equiv (\psi_1' * \psi_2')$.
Sei $Q_1x_1\cdots Q_\ell x_\ell\,\chi_1$ die Form von ψ_1' (mit χ_1 quantorenfrei) und sei $Q_1'y_1\cdots Q_m'y_m\,\chi_2$ die Form von ψ_2' (mit χ_2 quantorenfrei).
Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\{x_1,\ldots,x_\ell\} \cap \text{frei}(\psi_2) = \emptyset$ und $\{y_1,\ldots,y_m\} \cap \text{frei}(\chi_1) = \emptyset$ (dies können wir durch konsistentes Umbenennen der in ψ_1' bzw. ψ_2' gebundenen Variablen $x_1,\ldots,x_\ell,y_1,\ldots,y_m$ erreichen).
Lemma 3.73 liefert uns dann die gesuchte zu $(\psi_1' * \psi_2')$ äquivalente Formel φ' in PNF. Es gilt: $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$.

Dies beendet den Beweis von Satz 3.69. □

Kapitel 4

Grundlagen des automatischen Schließens

Folie 288

Ziel: Automatisches Schließen

- In typischen Anwendungen der Logik beschreibt man mit Hilfe einer Formelmenge das Wissen über ein Anwendungsszenario und will aus diesem Wissen dann, möglichst automatisch, Folgerungen ziehen.
- In diesem Kapitel werden wir untersuchen, inwieweit sich für die Logik erster Stufe das Folgern automatiseren lässt.
- Wir werden einen syntaktischen Beweisbegriff einführen, der genau dem semantischen Folgerungsbegriff entspricht (*Vollständigkeitssatz*).
- Dadurch werden wir einen Algorithmus erhalten, der nach und nach alle allgemeingültigen Sätze der Logik erster Stufe aufzählt.
- Andererseits werden wir zeigen, dass es keinen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines beliebigen Satzes der Logik erster Stufe entscheidet, ob der Satz allgemeingültig ist.
- Als Folgerung aus dem Vollständigkeitssatz werden wir auch den *Endlichkeitssatz* für die Logik erster Stufe erhalten.

4.1 Kalküle und Ableitungen

Folie 289

Ableitungsregeln und Kalküle

Definition 4.1. Sei M eine beliebige Menge.

(a) Eine *Ableitungsregel über M* (kurz: *Regel*) hat die Form

$$\frac{a_1 \quad \cdots \quad a_n}{b}$$

wobei $n \geqslant 0$ und $a_1, \ldots, a_n, b \in M$.

Wir bezeichnen $a_1, \ldots, a_n$ als die *Voraussetzungen* der Regel und b als die *Konsequenz*.

Ableitungsregeln ohne Voraussetzungen (also mit $n = 0$) bezeichnen wir als *Axiome*.

(b) Ein *Kalkül* über M ist eine Menge von Ableitungsregeln über M.

Folie 290

Ableitungen

Definition 4.2.
Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M, sei $V \subseteq M$ und sei $a \in M$.

(a) Eine *Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$* ist eine endliche Folge $(a_1, \ldots, a_\ell) \in M^\ell$, so dass $\ell \geqslant 1$, $a_\ell = a$ und für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ gilt:[1]

- $a_i \in V$ oder
- $\frac{}{a_i}$ ist ein Axiom in $\mathfrak{K}$ oder
- es gibt in $\mathfrak{K}$ eine Ableitungsregel

$$\frac{b_1 \quad \cdots \quad b_n}{a_i}$$

so dass $b_1, \ldots, b_n \in \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$.

[1] Die Menge V kann hierbei als Menge von „Voraussetzungen“ betrachtet werden, und der Kalkül legt fest, welche Axiome gelten und welche Schlussweisen zulässig sind.

Der besseren Lesbarkeit halber schreiben wir in konkreten Beispielen Ableitungen der Form $(a_1, \dots, a_\ell)$ oft zeilenweise, also

$$\begin{array}{ll} (1) & a_1 \\ (2) & a_2 \\ \vdots & \\ (\ell) & a_\ell \end{array}$$

und geben am Ende jeder Zeile eine kurze Begründung an.

Folie 291

(b) Ein Element $a \in M$ ist *aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbar*, wenn es eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$ gibt.

(c) Wir schreiben $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$, um die Menge aller aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente zu bezeichnen.

(d) Für $V = \emptyset$ nutzen wir folgende Notationen:

Eine *Ableitung von a in $\mathfrak{K}$* ist eine Ableitung von a aus $\emptyset$ in $\mathfrak{K}$.

Ein Element $a \in M$ heißt *ableitbar aus $\mathfrak{K}$*, falls es eine Ableitung von a in $\mathfrak{K}$ gibt.

Die Menge aller in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente bezeichnen wir mit $\text{abl}_{\mathfrak{K}}$, d.h.: $\text{abl}_{\mathfrak{K}} := \text{abl}_{\mathfrak{K}}(\emptyset)$.

Folie 292

Wir werden Kalküle nutzen, um auf elegante Art *rekursive Definitionen* bestimmter Mengen anzugeben:

Um eine bestimmte Teilmenge A einer Menge M rekursiv zu definieren, genügt es, einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über M anzugeben, für den gilt: $\text{abl}_{\mathfrak{K}} = A$.

Folie 293

Beispiel: Mengen natürlicher Zahlen

Beispiel 4.3.
Sei $\mathfrak{K}$ der Kalkül über $M := \mathbb{N}$ mit folgenden Ableitungsregeln:

- Axiom: $\frac{}{1}$
- Weitere Regeln: $\frac{n}{2n}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Fragen:

- Was ist $\text{abl}_{\mathfrak{K}}$?
- Was ist $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ für $V := \{3\}$?

Antworten:

- $\text{abl}_{\mathfrak{K}}$ ist die Menge aller Zweierpotenzen, d.h. $\text{abl}_{\mathfrak{K}} = \{2^i : i \in \mathbb{N}\}$.
- $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(\{3\}) = \{2^i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{2^i \cdot 3 : i \in \mathbb{N}\}$

Folie 294

Beispiel: Aussagenlogik

Beispiel 4.4.
Sei $\Sigma := A_{\mathsf{AL}}$ das Alphabet der Aussagenlogik, d.h.

$$\Sigma = \mathsf{AS} \cup \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}, (,) \},$$

wobei $\mathsf{AS} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Aussagensymbole ist.
Gesucht: Ein *Kalkül* $\mathfrak{K}$ *über* $M := \Sigma^*$, aus dem genau die syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln ableitbar sind, d.h. $\text{abl}_{\mathfrak{K}} = \mathsf{AL}$.

Lösung: $\mathfrak{K}$ besteht aus folgenden Ableitungsregeln:

- Axiome: $\frac{}{\mathbf{0}}$, $\frac{}{\mathbf{1}}$, $\frac{}{X}$, für jedes Aussagensymbol $X \in \mathsf{AS}$.
- Weitere Regeln: Für jedes $\varphi \in \Sigma^*$ und jedes $\psi \in \Sigma^*$ die Regeln

$$\frac{\varphi}{\neg\varphi}\quad,\quad\frac{\varphi \quad \psi}{(\varphi \wedge \psi)}\quad,\quad\frac{\varphi \quad \psi}{(\varphi \vee \psi)}\quad,\quad\frac{\varphi \quad \psi}{(\varphi \rightarrow \psi)}$$

Dann gilt: $\text{abl}_{\mathfrak{K}} = \mathsf{AL}$.

Folie 295

Beispiel: Resolution

Die Kalkül-Schreibweise lässt sich auch dazu nutzen, eine elegante Darstellung der in Kapitel 2.6 eingeführten *Resolutionswiderlegungen* zu anzugeben.

Zur Erinnerung:

- Eine *Klausel* ist eine endliche Menge von Literalen.

  Ein *Literal* ist eine aussagenlogische Formel der Form X oder $\neg X$, wobei $X \in \mathsf{AS}$.

- Wir haben in Satz 2.60 gezeigt, dass für jede Menge Γ von Klauseln gilt:

$$\Gamma \text{ ist unerfüllbar} \quad \iff \quad \Gamma \vdash_R \emptyset.$$

  Hierbei ist $\emptyset$ die *leere Klausel*.

  „$\Gamma \vdash_R \emptyset$“ bedeutet, dass es eine *Resolutionswiderlegung von* Γ gibt.

  Zur Erinnerung hier die Definition des Begriffs der Resolutionswiderlegungen:

Folie 296

Resolutionsableitungen und -widerlegungen

Definition. Sei Γ eine Klauselmenge.

(a) Eine *Resolutionsableitung* einer Klausel δ aus Γ ist ein Tupel $(\delta_1, \ldots, \delta_\ell)$ von Klauseln, so dass gilt: $\ell \geqslant 1$, $\delta_\ell = \delta$, und für alle $i \in [\ell]$ ist

- $\delta_i \in \Gamma$, oder
- es gibt $j, k \in [i{-}1]$, so dass δ_i eine Resolvente von δ_j und δ_k ist.

(b) Eine *Resolutionswiderlegung* von Γ ist eine Resolutionsableitung der leeren Klausel aus Γ.

Zur Erinnerung:
Eine Klausel δ ist genau dann eine *Resolvente* zweier Klauseln γ_1 und γ_2, wenn es ein Literal λ gibt, so dass gilt:

$$\lambda \in \gamma_1, \qquad \overline{\lambda} \in \gamma_2 \qquad \textit{und} \qquad \delta = \big(\gamma_1 \setminus \{\lambda\}\big) \cup \big(\gamma_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}\big).$$

Folie 297

Der Resolutionskalkül der Aussagenlogik

Gesucht: Ein *Kalkül $\mathfrak{K}_R$ über der Menge aller Klauseln*, so dass für jede Klauselmenge Γ und jede Klausel δ gilt:

$$\delta \in \text{abl}_{\mathfrak{K}_R}(\Gamma) \quad \iff \quad \Gamma \vdash_R \delta$$

d.h.: δ ist genau dann aus Γ in $\mathfrak{K}_R$ ableitbar, wenn es eine Resolutionsableitung von δ aus Γ gibt.

Lösung: $\mathfrak{K}_R$ besteht aus folgenden Ableitungsregeln:

> Für alle Klauseln γ_1 und γ_2, für jedes Literal λ, so dass $\lambda \in \gamma_1$ und $\overline{\lambda} \in \gamma_2$, und für die Klausel $\delta := (\gamma_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (\gamma_2 \setminus \{\overline{\lambda}\})$ enthält $\mathfrak{K}_R$ die Ableitungsregel
> $$\frac{\gamma_1 \quad \gamma_2}{\delta}$$

Dann entsprechen Ableitungen in $\mathfrak{K}_R$ aus einer Klauselmenge Γ gerade den Resolutionsableitungen aus Γ, und somit gilt: $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(\Gamma) = \{\delta \ : \ \Gamma \vdash_R \delta\}$. Insbesondere gibt es genau dann eine Resolutionswiderlegung von Γ, wenn $\text{abl}_{\mathfrak{R}}(\Gamma)$ die leere Klausel enthält.

Folie 298

Der Kalkül $\mathfrak{K}_R$ wird *Resolutionskalkül der Aussagenlogik* genannt.

Folie 299

Kalküle und abgeschlossene Mengen

Definition 4.5. Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M.
Eine Menge $A \subseteq M$ heißt *abgeschlossen unter* $\mathfrak{K}$, wenn für jede Ableitungsregel

$$\frac{a_1 \ \cdots \ a_n}{b}$$

in $\mathfrak{K}$ gilt: Falls $a_1, \ldots, a_n \in A$, so ist auch $b \in A$.

Satz 4.6. *Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M und sei $V \subseteq M$.
Dann ist $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ die bzgl. „$\subseteq$“ kleinste unter $\mathfrak{K}$ abgeschlossene Menge, die V enthält. D.h. es gilt:*

(a) $V \subseteq \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

(b) $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ *ist abgeschlossen unter* $\mathfrak{K}$.

(c) *Für jede Menge A mit $V \subseteq A \subseteq M$ gilt:*
Falls A abgeschlossen ist unter $\mathfrak{K}$, so ist $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V) \subseteq A$.

(d) $$\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V) \quad = \quad \bigcap_{\substack{V \subseteq A \subseteq M, \\ A \text{ abgeschlossen unter } \mathfrak{K}}} A \, .$$

Beweis.

(a) Für jedes $v \in V$ ist (v) eine Ableitung von v aus V in $\mathfrak{K}$. Somit ist $V \subseteq \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

(b) Sei
$$\frac{a_1 \ \cdots \ a_n}{b}$$
eine Ableitungsregel in $\mathfrak{K}$, so dass $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$. Wir müssen zeigen, dass dann gilt: $b \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$. D.h. wir müssen eine Ableitung von b aus V in $\mathfrak{K}$ finden.

Laut Voraussetzung gilt für jedes $i \in [n]$:
$a_i \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$, d.h. es gibt eine Ableitung
$$\big(a_1^i, \ \ldots, \ a_{\ell_i}^i \big)$$
von a_i aus V in $\mathfrak{K}$. Insbesondere gilt: $a_i = a_{\ell_i}^i$.

Dann ist
$$\big(a_1^1, \ldots, a_{\ell_1}^1, \ a_1^2, \ldots, a_{\ell_2}^2, \ \ldots, \ a_1^n, \ldots, a_{\ell_n}^n, \ b \big)$$
eine Ableitung von b aus V in $\mathfrak{K}$. Somit gilt: $b \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

(c) Sei A eine Menge mit $V \subseteq A \subseteq M$, die abgeschlossen ist unter $\mathfrak{K}$. Wir müssen zeigen, dass gilt: $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V) \subseteq A$.

Sei dazu a ein beliebiges Element in $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$, und sei $(a_1, \ldots, a_\ell)$ eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$. Wir wollen zeigen, dass gilt: $a \in A$.

Wir zeigen per Induktion nach i, dass für jedes $i \in [n]$ gilt: $a_i \in A$.
Wegen $a = a_\ell$ gilt dann insbesondere, dass $a \in A$.

Induktionsanfang $i = 1$:

Da $(a_1, \ldots, a_\ell)$ eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$ ist, gilt insbesondere:
$a_1 \in V$ oder $\frac{}{a_1}$ ist ein Axiom in $\mathfrak{K}$.

Im ersten Fall ist $a_1 \in A$ wegen $a_1 \in V \subseteq A$.

Im zweiten Fall ist $a_1 \in A$, da A laut Voraussetzung unter $\mathfrak{K}$ abgeschlossen ist.

Induktionsschritt $i{-}1 \to i$*:*

Die Induktionsannahme besagt, dass für jedes $j \leqslant i{-}1$ gilt: $a_j \in A$.

Wir müssen im Induktionsschritt zeigen, dass auch gilt: $a_i \in A$.

Da $(a_1, \ldots, a_\ell)$ eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$ ist, gilt insbesondere: $a_i \in V$ oder $\frac{}{a_i}$ ist ein Axiom in $\mathfrak{K}$ oder es gibt in $\mathfrak{K}$ eine Ableitungsregel $\frac{b_1 \ \cdots \ b_n}{a_i}$ so dass $b_1, \ldots, b_n \in \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ ist.
In den ersten beiden Fällen folgt „$a_i \in A$" genauso wie im Induktionsanfang „$a_1 \in A$" folgt.

Im dritten Fall liefert die Induktionsannahme, dass gilt: $b_1, \ldots, b_n \in A$. Da außerdem A laut Voraussetzung unter $\mathfrak{K}$ abgeschlossen ist, folgt: $a_i \in A$.

(d) „$\subseteq$" folgt direkt aus (c).

„$\supseteq$" folgt direkt aus (a) und (b), da für die Menge $A := \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ gemäß (a) und (b) gilt: $V \subseteq A \subseteq M$ und A ist abgeschlossen unter $\mathfrak{K}$. Somit ist $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ eine der Mengen A, aus denen der Durchschnitt gebildet wird. Daher gilt:

$$\bigcap_{\substack{V \subseteq A \subseteq M, \\ A \text{ abgeschlossen unter } \mathfrak{K}}} A \quad \subseteq \quad \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)\ .$$

$\square$

Folie 300

Induktionsprinzip für die ableitbaren Elemente eines Kalküls

Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M und sei $V \subseteq M$. Um zu zeigen, dass eine bestimmte Aussage $\mathbb{A}(a)$ für alle aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente a gilt, können wir das Induktionsprinzip nutzen und einfach Folgendes zeigen:

(1) Die Aussage $\mathbb{A}(a)$ gilt für jedes $a \in V$, und

(2) für jede Ableitungsregel
$$\frac{a_1 \ \cdots \ a_n}{b}$$
in $\mathfrak{K}$ gilt: Falls $\mathbb{A}(a_i)$ für jedes $i \in [n]$ gilt, so gilt auch $\mathbb{A}(b)$.

Daraus folgt laut dem nächsten Lemma dann, dass $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ gilt.

Lemma 4.7. *Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M und sei $V \subseteq M$. Falls*

(1) eine Aussage $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in V$ gilt und

(2) für jede Ableitungsregel

$$\frac{a_1 \ \cdots \ a_n}{b}$$

in $\mathfrak{K}$ gilt: falls $\mathbb{A}(a_i)$ für jedes $i \in [n]$ gilt, so gilt auch $\mathbb{A}(b)$,

dann gilt die Aussage $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

Folie 301

Beweis. Es seien (1) und (2) erfüllt.
Betrachte die Menge

$$A \;:=\; \{\, a \in M \;:\; \text{die Aussage } \mathbb{A}(a) \text{ gilt} \,\}\,.$$

Wegen (1) ist $V \subseteq A$.
Wegen (2) ist A abgeschlossen unter $\mathfrak{K}$.
Aus Satz 4.6 folgt daher: $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V) \subseteq A$.
Somit gilt die Aussage $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$. □

4.2 Ein Beweiskalkül für die Logik erster Stufe — der Vollständigkeitssatz

Folie 302

Notation

- In diesem Kapitel sei σ eine beliebige fest gewählte Signatur.
- Der Einfachheit halber werden wir o.B.d.A. in diesem Kapitel nur $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln betrachten, in denen das Symbol „$\to$“ nicht vorkommt.
- $t, u, t_1, t_2, t', u', u'', \ldots$ bezeichnen immer σ-Terme.
- $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ bezeichnen immer $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln.

- $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi', \ldots$ bezeichnen immer Mengen von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln.
- $\Gamma, \Delta, \Gamma', \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ bezeichnen immer *endliche* Mengen von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln.
- Für $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ ist $\text{frei}(\Phi) := \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{frei}(\varphi)$.

  Manchmal schreiben wir auch $\text{frei}(\Phi, \varphi)$ an Stelle von $\text{frei}(\Phi \cup \{\varphi\})$.
- Ist M eine Menge, so schreiben wir $L \subseteq_e M$, um auszudrücken, dass L eine *endliche* Teilmenge von M ist.

Folie 303

Sequenzen

Definition 4.8.

(a) Eine *Sequenz* ist ein Ausdruck der Form

$$\Gamma \vdash \psi$$

wobei $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$ (d.h., Γ ist eine *endliche* Menge von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln).

Wir bezeichnen Γ als das *Antezedens* und ψ als das *Sukzedens* der Sequenz $\Gamma \vdash \psi$.

(b) Wir schreiben M_S um die Menge aller Sequenzen zu bezeichnen, d.h.:

$$M_S \;:=\; \{\, \Gamma \vdash \psi \;:\; \Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma],\; \psi \in \mathsf{FO}[\sigma] \,\}.$$

Folie 304

Korrektheit einer Sequenz

Definition 4.9. Eine Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ heißt *korrekt*, falls gilt: $\Gamma \models \psi$.

Zur Erinnerung: $\Gamma \models \psi$ bedeutet:
Für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt: Falls $\mathcal{I} \models \Gamma$, so auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Beispiel:
Welche der folgenden Sequenzen sind korrekt für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und alle $x, y \in \mathsf{VAR}$; welche sind nicht korrekt?

(1) $\{\, (\neg\varphi \vee \psi) \,,\, \varphi \,\} \;\vdash\; \psi$

(2) $\emptyset \;\vdash\; (\varphi \vee \neg\varphi)$

(3) $\{\, \exists x\, \forall y\, \varphi \,\} \;\vdash\; \forall y\, \exists x\, \varphi$

(4) $\{\, \forall y\, \exists x\; x{=}y \,\} \;\vdash\; \exists x\, \forall y\; x{=}y$

Antwort:
Die ersten drei Sequenzen sind korrekt; die vierte ist nicht korrekt.

Folie 305

Ziel

Wir wollen im Folgenden einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über M_S angeben, so dass gilt:

(1) $\mathfrak{K}$ ist *korrekt*, d.h. jede in $\mathfrak{K}$ ableitbare Sequenz ist korrekt.

(2) $\mathfrak{K}$ ist *vollständig*, d.h. jede korrekte Sequenz ist in $\mathfrak{K}$ ableitbar.

(3) $\mathfrak{K}$ ist *effektiv*, d.h. es gibt einen Algorithmus, der nach und nach genau die aus $\mathfrak{K}$ ableitbaren Sequenzen aufzählt.

Dies liefert dann insbesondere einen Algorithmus, der nach und nach alle allgemeingültigen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln aufzählt: Dazu lasse den gemäß (3) existierenden Algorithmus laufen, und immer wenn dieser eine Sequenz der Form $\Gamma \vdash \psi$ mit $\Gamma = \emptyset$ ausgeben will, gib ψ aus.
Wegen (1) ist die Sequenz dann korrekt, d.h. es gilt $\emptyset \models \psi$, und daher ist ψ allgemeingültig.
Wegen (2) werden tatsächlich <u>alle</u> allgemeingültigen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln aufgezählt.

Bemerkung. Einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über M_S zu finden, der die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, ist nicht schwer. Wir könnten dafür z.B. einfach den Kalkül nehmen, der aus allen Axiomen der Form

$$\frac{}{\Gamma \vdash \psi}$$

besteht, für die gilt: $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$, $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\Gamma \models \psi$.

Dieser Kalkül ist offensichtlicherweise korrekt und vollständig, d.h. er erfüllt die Bedingungen (1) und (2).

Die Bedingung (3) ist hier allerdings problematisch. Wir müssten dazu einen Algorithmus haben, der bei Eingabe einer beliebigen endlichen Menge $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$ und einer beliebigen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel ψ entscheidet, ob die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ korrekt ist, d.h. ob gilt: $\Gamma \models \psi$.

Tatsächlich ist dieses Problem unentscheidbar, da (wie wir am Ende des Kapitels sehen werden) sogar bereits das

Allgemeingültigkeitsproblem

Eingabe: eine beliebige Formel φ der Logik erster Stufe
Frage: Ist φ allgemeingültig?

unentscheidbar ist.

Folie 306

Notationen für Sequenzen

Wir schreiben kurz

- $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, um die Sequenz $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ zu bezeichnen.
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, um die Sequenz $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi$ zu bezeichnen.
- $\vdash \psi$, um die Sequenz $\emptyset \vdash \psi$ zu bezeichnen.

Folie 307

Sequenzenregeln

Eine *Sequenzenregel* ist eine Ableitungsregel über M_S.

Sequenzenregeln der Form

$$\frac{a_1 \ \cdots \ a_n}{b}$$

schreiben wir meistens zeilenweise, als

$$\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ \underline{a_n} \\ b \end{array}$$

wobei jedes a_i eine Sequenz der Form $\Gamma_i \vdash \psi_i$ ist,
und b eine Sequenz der Form $\Delta \vdash \varphi$ ist.

Folie 308

Definition 4.10. Eine *Sequenzenregel*

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \vdash \psi_1\\ \vdots \\ \Gamma_n \vdash \psi_n\end{array}}{\Delta \vdash \varphi}$$

heißt *korrekt*, wenn Folgendes gilt: Sind die Sequenzen $\Gamma_i \vdash \psi_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ korrekt, so ist auch die Sequenz $\Delta \vdash \varphi$ korrekt.

Aus dem Induktionsprinzip für Kalküle (Lemma 4.7) folgt direkt:

Lemma 4.11.
Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ über M_S ist korrekt, falls jede Sequenzenregel in $\mathfrak{K}$ korrekt ist.

Wir werden nun eine Reihe von korrekten Sequenzenregeln zusammentragen, die alle zusammen dann den von uns gesuchten korrekten, vollständigen und effektiven Kalkül über M_S bilden werden.

Folie 309

Grundregeln:

Für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- *Voraussetzungsregel* (V):

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

- *Erweiterungsregel* (E):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi} \qquad \text{falls } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

Lemma 4.12. *Jede der Grundregeln* (V) *bzw.* (E) *ist korrekt.*

Beweis. Die Voraussetzungsregel

$$(\mathrm{V}): \qquad \frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

ist korrekt, denn offensichtlicherweise gilt: $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \varphi$.

Die Erweiterungsregel

$$(\mathrm{E}): \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi} \qquad \text{falls } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

ist korrekt, denn:
Sei $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt. Dann gilt: $\Gamma \models \varphi$. Für $\Gamma' \supseteq \Gamma$ gilt dann offensichtlicherweise auch: $\Gamma' \models \varphi$. □

Folie 310

Ausagenlogische Regeln:

Für alle $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi, \psi, \chi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- *Fallunterscheidungsregel* (FU):

$$\frac{\begin{array}{ll}\Gamma, \psi & \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi & \vdash \varphi\end{array}}{\begin{array}{ll}\Gamma & \vdash \varphi\end{array}}$$

- *Widerspruchsregel* (W):

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad (\text{für alle } \varphi \in \mathsf{FO}[\sigma])$$

Folie 311

- $\wedge$-*Einführung im Antezedens* $(\wedge \mathrm{A}_1)$, $(\wedge \mathrm{A}_2)$:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi} \qquad \qquad \frac{\Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi}$$

- $\wedge$-*Einführung im Sukzedens* $(\wedge\mathrm{S})$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \quad \varphi \\ \Gamma \vdash \quad \psi\end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

- $\vee$-*Einführung im Antezedens* $(\vee\mathrm{A})$:

$$\frac{\begin{array}{ll}\Gamma, \varphi & \vdash \chi \\ \Gamma, \psi & \vdash \chi\end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

- $\vee$-*Einführung im Sukzedens* $(\vee\mathrm{S}_1)$, $(\vee\mathrm{S}_2)$:

$$\frac{\Gamma \vdash \quad \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \quad \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$$

Folie 312

Lemma 4.13. *Jede der aussagenlogischen Regeln* (FU), (W), $(\wedge\mathrm{A}_1)$, $(\wedge\mathrm{A}_2)$, $(\wedge\mathrm{S})$, $(\vee\mathrm{A})$, $(\vee\mathrm{S}_1)$, $(\vee\mathrm{S}_2)$ *ist korrekt.*

Beweis. • Die Fallunterscheidungsregel

$$\text{(FU):} \qquad \frac{\begin{array}{ll}\Gamma, \psi & \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi & \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma \qquad \vdash \varphi}$$

ist korrekt, denn: Seien die beiden Sequenzen $\Gamma, \psi \vdash \varphi$ und $\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi$ korrekt. Dann gilt für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\psi\}$ oder $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\neg\psi\}$, dass $\mathcal{I} \models \varphi$.

Wir müssen zeigen, dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt ist.

Sei dazu $\mathcal{I}$ eine beliebige σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.

Klar: Entweder gilt $\mathcal{I} \models \psi$, oder es gilt $\mathcal{I} \models \neg\psi$.

Im ersten Fall gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\psi\}$, und daher folgt aus der Korrektheit der Sequenz $\Gamma, \psi \vdash \varphi$, dass $\mathcal{I} \models \varphi$.

Im zweiten Fall gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\neg\psi\}$, und daher folgt aus der Korrektheit der Sequenz $\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi$, dass $\mathcal{I} \models \varphi$.

Somit gilt in jedem Fall, dass $\mathcal{I} \models \varphi$.

Also gilt: $\Gamma \models \varphi$, und daher ist die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt.

- Die Widerspruchsregel

$$\text{(W):} \qquad \frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad (\text{für alle } \varphi \in \mathsf{FO}[\sigma])$$

ist korrekt, denn: Seien die beiden Sequenzen $\Gamma \vdash \psi$ und $\Gamma \vdash \neg\psi$ korrekt. Dann gilt für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Gamma$, dass $\mathcal{I} \models \psi$ und $\mathcal{I} \models \neg\psi$, d.h.: $\mathcal{I} \models (\psi \wedge \neg\psi)$. Ein solches $\mathcal{I}$ gibt es nicht. Somit ist Γ unerfüllbar. Daher gilt für *jede* $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ, dass $\Gamma \models \varphi$, und daher ist die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt.

- Die Regel zur $\wedge$-Einführung im Antezendens

$$(\wedge\mathrm{A}_1): \qquad \frac{\Gamma, \varphi \qquad\quad \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi}$$

ist korrekt, denn: Sei die Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ korrekt.

Wir müssen zeigen, dass auch die Sequenz $\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi$ korrekt ist.

Sei dazu $\mathcal{I}$ eine beliebige σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{(\varphi \wedge \psi)\}$. Insbesondere gilt dann: $\mathcal{I} \models \Gamma$ und $\mathcal{I} \models \varphi$, d.h. es gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$. Aus der Korrektheit der Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ folgt, dass $\mathcal{I} \models \chi$.

Somit gilt: $\Gamma \cup \{(\varphi \wedge \psi)\} \models \chi$, und daher ist die Sequenz $\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi$ korrekt.

- Die Korrektheit der restlichen Regeln $(\wedge\mathrm{A}_2)$, $(\wedge\mathrm{S})$, $(\vee\mathrm{A})$, $(\vee\mathrm{S}_1)$, $(\vee\mathrm{S}_2)$ kann auf ähnliche Art gezeigt werden. Details: Übung.

$\square$

Folie 313

Substitutionen

Um weitere wichtige Sequenzenregeln einführen zu können, benötigen wir eine Möglichkeit, für eine Variable $x \in \mathsf{VAR}$ und einen σ-Term $t \in \mathsf{T}_\sigma$ eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ so zu einer $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\varphi\frac{t}{x}$ abzuändern, dass gilt:

> *Die Formel $\varphi\frac{t}{x}$ sagt über den Term t dasselbe aus, wie die Formel φ über die Variable x.*

Präzise: Es soll für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gelten:

$$\mathcal{I} \models \varphi\tfrac{t}{x} \quad\iff\quad \mathcal{I}\tfrac{t}{x} \models \varphi. \tag{4.1}$$

Dabei ist die σ-Interpretation $\mathcal{I}\frac{t}{x}$ für $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ wie folgt definiert:
$\mathcal{I}\frac{t}{x} := (\mathcal{A}, \beta\frac{a}{x})$, für $a := [\![t]\!]^{\mathcal{I}}$.

Außerdem soll gelten:

$$\varphi\tfrac{x}{x} \quad = \quad \varphi. \tag{4.2}$$

Folie 314

Um zu gewährleisten, dass (4.1) und (4.2) gilt, wählen wir zu gegebenem φ, t und x die Formel $\varphi\frac{t}{x}$ wie folgt:

- Falls $t = x$, so setze $\varphi\frac{t}{x} := \varphi$. Andernfalls gehe wie folgt vor:
- Sei $y_1, \ldots, y_\ell$ eine Liste aller Variablen aus $\text{var}(t) \cup \{x\}$, die gebundene Vorkommen in φ besitzen.
- Sei $z_1, \ldots, z_\ell$ eine Liste von Variablen $\neq x$, die *nicht* in φ oder t vorkommen.
- Sei φ' die Formel, die aus φ entsteht, indem für jedes $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ jedes *gebundene* Vorkommen der Variablen y_i ersetzt wird durch die Variable z_i.
- Sei $\varphi\frac{t}{x}$ die Formel, die aus φ' entsteht, indem jedes Vorkommen der Variablen x durch den Term t ersetzt wird.

Man kann zeigen:

Lemma 4.14 (Substitutionslemma)**.** *Für jede* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel* φ*, jeden* σ*-Term* t*, jede Variable* $x \in \mathsf{VAR}$ *und jede* σ*-Interpretation* $\mathcal{I}$ *gilt:*

$$\mathcal{I} \models \varphi\tfrac{t}{x} \quad\iff\quad \mathcal{I}\tfrac{t}{x} \models \varphi.$$

Beweis. Übung. □

Wir können nun weitere wichtige Sequenzenregeln formulieren:

Folie 315

Quantorenregeln:

Für alle $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$, alle $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, alle $x, y \in \mathsf{VAR}$ und alle $t \in \mathsf{T}_\sigma$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- $\forall$-*Einführung im Antezedens* ($\forall$A):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x} \ \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \psi}$$

- $\forall$-*Einführung im Sukzedens* ($\forall$S):

$$\frac{\Gamma \vdash \ \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi} \qquad \text{falls } \ y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$$

- $\exists$-*Einführung im Antezedens* ($\exists$A):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \ \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi} \qquad \text{falls } \ y \notin \text{frei}(\Gamma,\, \exists x\varphi,\, \psi)$$

- $\exists$-*Einführung im Sukzedens* ($\exists$S):

$$\frac{\Gamma \vdash \ \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \vdash \exists x\varphi}$$

Folie 316

Lemma 4.15.
Jede der Quantorenregeln ($\forall$A), ($\forall$S), ($\exists$A), ($\exists$S) *ist korrekt.*

Beweis.
- Die Regel zur $\forall$-Einführung im Antezedens

$$(\forall\text{A}): \qquad \frac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x} \ \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \psi}$$

ist korrekt, denn: Sei die Sequenz $\Gamma, \varphi\frac{t}{x} \vdash \psi$ korrekt.

Wir müssen zeigen, dass die Sequenz $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \psi$ korrekt ist.

Sei dazu $\mathcal{I}$ eine beliebige σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$.
Insbesondere gilt dann: $\mathcal{I} \models \Gamma$, und $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ für $a := [\![t]\!]^{\mathcal{I}}$.

Somit gilt: $\mathcal{I}\frac{t}{x} \models \varphi$.

Das Substitutionslemma (Lemma 4.14) liefert: $\mathcal{I} \models \varphi\frac{t}{x}$.

Also gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma$ und $\mathcal{I} \models \varphi\frac{t}{x}$.

Die Korrektheit der Sequenz $\Gamma, \varphi\frac{t}{x} \vdash \psi$ liefert: $\mathcal{I} \models \psi$.

Somit ist die Sequenz $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \psi$ korrekt.

- Die Regel zur $\forall$-Einführung im Sukzedens

$$(\forall\text{S}): \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi} \qquad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$$

ist korrekt, denn:

Sei $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$, und sei die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}$ korrekt.

Wir müssen zeigen, dass die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x\varphi$ korrekt ist.

Sei dazu $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine beliebige σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.

Wegen $y \notin \text{frei}(\Gamma)$ gilt laut Koinzidenzlemma für alle $a \in A$, dass $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$. Die Korrektheit der Sequenz $\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}$ liefert, dass $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}$.
Dies gilt für alle $a \in A$. Somit gilt: $\mathcal{I} \models \forall y\, \varphi\frac{y}{x}$.

Wegen $y \notin \text{frei}(\forall x\varphi)$ gilt für jede σ-Interpretation $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J} \models \forall y\, \varphi\frac{y}{x} \quad \iff \quad \mathcal{J} \models \forall x\, \varphi.$$

Aus $\mathcal{I} \models \forall y\, \varphi\frac{y}{x}$ folgt also: $\mathcal{I} \models \forall x\, \varphi$.

Somit ist die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x\varphi$ korrekt.

- Die Korrektheit der restlichen Regeln ($\exists$A) und ($\exists$S) kann auf ähnliche Art gezeigt werden. Details: Übung.

$\square$

Folie 317

Gleichheitsregeln:

Für alle $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$, alle $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, alle $x \in \mathsf{VAR}$ und alle $t, u \in \mathsf{T}_\sigma$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- *Reflexivität der Gleichheit* (G)*:*

$$\frac{}{\Gamma \vdash t{=}t}$$

- *Substitutionsregel* (S)*:*

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, t{=}u \vdash \varphi\frac{u}{x}}$$

Lemma 4.16. *Jede der Gleichheitsregeln* (G) *bzw.* (S) *ist korrekt.*

Beweis.

- Die Regel zur Reflexivität der Gleichheitsregel

$$\text{(G):} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t{=}t}$$

ist korrekt, denn: Die Formel $t{=}t$ ist offensichtlicherweise allgemeingültig. Daher gilt für *alle* Formelmengen Γ, dass $\Gamma \models t{=}t$. Somit ist die Sequenz $\Gamma \vdash t{=}t$ korrekt.

- Die Substitutionsregel

$$\text{(S):} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, t{=}u \vdash \varphi\frac{u}{x}}$$

ist korrekt, denn: Sei die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}$ korrekt.

Wir müssen zeigen, dass die Sequenz $\Gamma,\ t{=}u \vdash \varphi\frac{u}{x}$ korrekt ist.

Sei dazu $\mathcal{I}$ eine beliebige σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{t{=}u\}$.
D.h. es gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma$ und $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![u]\!]^{\mathcal{I}}$.

Wegen $\mathcal{I} \models \Gamma$ folgt aus der Korrektheit der Sequenz $\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}$, dass $\mathcal{I} \models \varphi\frac{t}{x}$.

Das Substitutionslemma liefert für $a := [\![t]\!]^{\mathcal{I}}$, dass $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

Wegen $a = [\![t]\!]^{\mathcal{I}} = [\![u]\!]^{\mathcal{I}}$ gilt auch: $\mathcal{I}\frac{u}{x} \models \varphi$.

Das Substitutionslemma liefert: $\mathcal{I} \models \varphi\frac{u}{x}$.

Somit ist die Sequenz $\Gamma,\ t{=}u \vdash \varphi\frac{u}{x}$ korrekt.

$\square$

Folie 318

Der Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ für die Logik erster Stufe

Definition 4.17.
Der *Sequenzenkalkül* $\mathfrak{K}_S$ ist der Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen, der für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$, alle $\varphi, \psi, \chi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, alle $t, u \in \mathsf{T}_\sigma$ und alle $x, y \in \mathsf{VAR}$ aus

- den Grundregeln (V), (E),
- den aussagenlogischen Regeln
  (FU), (W), ($\wedge$A$_1$), ($\wedge$A$_2$), ($\wedge$S), ($\vee$A), ($\vee$S$_1$), ($\vee$S$_2$),
- den Quantorenregeln ($\forall$A), ($\forall$S), ($\exists$A), ($\exists$S)
- und den Gleichheitsregeln (G), (S)

besteht.

Aus der Korrektheit der Regeln des Sequenzenkalküls (Lemmas 4.12, 4.13, 4.15, 4.16) folgt mit Lemma 4.11:

Satz 4.18. *Der Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ist korrekt, d.h. jede in $\mathfrak{K}_S$ ableitbare Sequenz ist korrekt.*

Folie 319

Außerdem sieht man anhand der Definition der einzelnen Regeln leicht, dass es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe einer Zahl $\ell \geqslant 1$ und einer Folge $(a_1, \ldots, a_\ell) \in M_S^\ell$ entscheidet, ob $(a_1, \ldots, a_\ell)$ eine Ableitung in $\mathfrak{K}_S$ ist.
Für *abzählbare* Signaturen σ kann man außerdem einen Algorithmus angeben, der nach und nach alle Folgen in $\{(a_1, \ldots, a_\ell) \in M_S^\ell \ : \ \ell \geqslant 1\}$ ausgibt.
Beides zusammen liefert für abzählbare Signaturen σ, dass der Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ *effektiv* ist.
Details: Übung.

Unser nächstes *Ziel* ist, zu zeigen, dass der Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ auch *vollständig* ist, d.h. dass es für jede *korrekte* Sequenz eine Ableitung in $\mathfrak{K}_S$ gibt.

Dazu betrachten wir zunächst einige Beispiele für Ableitungen im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$.

Folie 320

Darstellung von Ableitungen

Am Anfang des Kapitels haben wir bereits vereinbart, dass wir ähnlich wie bei Resolutionsableitungen auch allgemein für einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über einer Menge M Ableitungen $(a_1, \ldots, a_\ell)$ der besseren Lesbarkeit halber oft zeilenweise schreiben, also

$$\begin{array}{ll} (1) & a_1 \\ (2) & a_2 \\ \vdots & \\ (\ell) & a_\ell \end{array}$$

und am Ende jeder Zeile eine kurze Begründung angeben.

Im Folgenden betrachten wir einige Beispiele für Ableitungen im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$.

Folie 321

Beispiele 4.19.

(a) Für jedes $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$ und jedes $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ ist die Sequenz $\Gamma \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ ableitbar in $\mathfrak{K}_S$:

$$\begin{array}{lllll} (1) & \Gamma, \varphi & \vdash & \varphi & \text{(V)} \\ (2) & \Gamma, \varphi & \vdash & (\varphi \vee \neg\varphi) & (\vee\text{S}_1) \text{ auf (1) angewendet} \\ (3) & \Gamma, \neg\varphi & \vdash & \neg\varphi & \text{(V)} \\ (4) & \Gamma, \neg\varphi & \vdash & (\varphi \vee \neg\varphi) & (\vee\text{S}_2) \text{ auf (3) angewendet} \\ (5) & \Gamma & \vdash & (\varphi \vee \neg\varphi) & \text{(FU) auf (2), (4) angewendet.} \end{array}$$

(b) Die Sequenz $R\big(f(x)\big), \forall x\, x{=}f(x) \vdash R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$ ist ableitbar in $\mathfrak{K}_S$:

$$\begin{array}{lllll} (1) & R\big(f(x)\big) & \vdash & R\big(f(x)\big) & \text{(V)} \\ (2) & R\big(f(x)\big), x{=}f(x) & \vdash & R\Big(f\big(f(x)\big)\Big) & \text{(S) auf (1) mit } t{:=}x,\ u{:=}f(x) \\ (3) & R\big(f(x)\big), \forall x\, x{=}f(x) & \vdash & R\Big(f\big(f(x)\big)\Big) & (\forall\text{A}) \text{ auf (2) mit } t{:=}x. \end{array}$$

(c) Für alle Terme $t, u \in \mathsf{T}_\sigma$ ist die Sequenz $t{=}u \vdash u{=}t$ ableitbar in $\mathfrak{K}_S$:

(1)		$\vdash t{=}t$	(G)
(2)	$t{=}u$	$\vdash u{=}t$	(S) auf (1) mit $\varphi := x{=}t$

(d) Für jedes $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ ist die Sequenz $\exists z \forall v\, \varphi \vdash \forall v \exists z\, \varphi$ ableitbar in $\mathfrak{K}_S$:

(1)	φ	$\vdash \varphi$	(V)
(2)	φ	$\vdash \exists z\, \varphi$	($\exists$S) auf (1) mit $t := z$
(3)	$\forall v\, \varphi$	$\vdash \exists z\, \varphi$	($\forall$A) auf (2) mit $t := v$
(4)	$\forall v\, \varphi$	$\vdash \forall v \exists z\, \varphi$	($\forall$S) auf (3) mit $x := v$
(5)	$\exists z \forall v\, \varphi$	$\vdash \forall v \exists z\, \varphi$	($\exists$A) auf (4) mit $y := z$

Folie 322

Beweisbarkeit: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$

Definition 4.20. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und sei $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.
Die Formel φ heißt *beweisbar* aus Φ (kurz: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$), wenn es ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.
Ein *Beweis* von φ aus Φ ist eine Ableitung einer Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$, wobei $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist.

Notation. An Stelle von $\emptyset \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ schreiben wir auch kurz: $\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.

Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls $\mathfrak{K}_S$ (Satz 4.18) folgt:

Korollar 4.21.
Für jede $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel* φ *und für jede Formelmenge* $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ *gilt:*

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \Phi \models \varphi.$$

Beweis.
Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$. Somit gibt es ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.
Gemäß Satz 4.18 ist die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt, d.h. es gilt: $\Gamma \models \varphi$.
Wegen $\Gamma \subseteq \Phi$ gilt daher auch: $\Phi \models \varphi$. □

Folie 323

Widerspruchsfreiheit

In der Mathematik nennen wir eine Menge von Aussagen *widerspruchsvoll*, falls sich daraus ein Widerspruch (d.h. eine bestimmte Aussage und deren Negat) herleiten lässt.
Wenn wir unter „herleiten" einen Beweis im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ verstehen, ergibt sich folgender Begriff:

Definition 4.22. Sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt *widerspruchsvoll*, falls es eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$.

(b) Φ heißt *widerspruchsfrei*, falls Φ nicht widerspruchsvoll ist.

Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls folgt, dass erfüllbare Formelmengen widerspruchsfrei sind:

Korollar 4.23. *Für alle* $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ *gilt:*

$$\Phi \text{ erfüllbar} \quad \Longrightarrow \quad \Phi \text{ widerspruchsfrei.}$$

Beweis.
Sei Φ erfüllbar. Dann gibt es eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$.
Angenommen, Φ ist *nicht* widerspruchsfrei. Somit ist Φ widerspruchsvoll, d.h. es gibt eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ, so dass

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \qquad \text{und} \qquad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi.$$

Korollar 4.21 liefert:

$$\Phi \models \varphi \qquad \text{und} \qquad \Phi \models \neg\varphi.$$

Wegen $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt also:

$$\mathcal{I} \models \varphi \qquad \text{und} \qquad \mathcal{I} \models \neg\varphi.$$

Dies ist ein *Widerspruch*! □

Folie 324

Eigenschaften widerspruchsvoller Mengen

Lemma 4.24.
Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Φ *ist widerspruchsvoll.*

(b) Für <u>*jede*</u> $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel* ψ *gilt:* $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi$.

Beweis von Lemma 4.24.
„(b) $\Longrightarrow$ (a)“: Trivial.

„(a) $\Longrightarrow$ (b)“:
Gemäß Voraussetzung ist Φ widerspruchsvoll.
D.h. es gibt ein $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$.
Somit gibt es $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenzen $\Gamma_1 \vdash \varphi$ und $\Gamma_2 \vdash \neg\varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar sind.
Dann ist für jede beliebige $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel ψ auch Folgendes in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar:

(1)	Γ_1	$\vdash \varphi$	
(2)	Γ_2	$\vdash \neg\varphi$	
(3)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash \varphi$	Erweiterungsregel (E) auf (1)
(4)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash \neg\varphi$	Erweiterungsregel (E) auf (2)
(5)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash \psi$	Widerspruchsregel (W) auf (3), (4)

Somit gilt $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi$ für jedes beliebige $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$. □

Folie 325

Der Vollständigkeitssatz

Satz 4.25. *Für alle Signaturen σ, alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und alle Formeln $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gilt:*

(1) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi$.

(2) Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ Φ *ist erfüllbar.*

Die Richtung „$\Longrightarrow$“ von (1) und die Richung „$\Longleftarrow$“ von (2) haben wir bereits in Korollar 4.21 und Korollar 4.23 bewiesen.

Die Richtung „$\Longrightarrow$“ von (2) wird von dem folgenden, schwer zu beweisenden *Erfüllbarkeitslemma* bereitgestellt:

Lemma 4.26 (Erfüllbarkeitslemma)**.**
Jede widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ *ist erfüllbar.*

Folie 326

Beweis des Vollständigkeitssatzes unter Verwendung des Erfüllbarkeitslemmas:

Unter Verwendung des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 4.26) erhalten wir zusammen mit Korollar 4.23, dass Teil (2) des Vollständigkeitssatzes korrekt ist. D.h. für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ gilt:

(2) $\quad \Phi$ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ Φ *ist erfüllbar.*

Die Richtung „$\Longrightarrow$" von (1) haben wir bereits in Korollar 4.21 gezeigt.

Die Richtung „$\Longleftarrow$" von Teil (1) des Vollständigkeitssatzes lässt sich wie folgt beweisen:

Es seien $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so dass gilt: $\Phi \models \varphi$.
Wir wollen zeigen, dass gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.

Fall 1: $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist widerspruchsfrei.
Gemäß Erüllbarkeitslemma ist $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ erfüllbar. D.h. es gibt eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$.
Somit gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\mathcal{I} \not\models \varphi$.
Aber gemäß Voraussetzung gilt: $\Phi \models \varphi$. Dies ist ein *Widerspruch*!
Somit kann der Fall, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei ist, nicht eintreten.

Fall 2: $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist *nicht* widerspruchsfrei.
Somit ist $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsvoll.
Gemäß Lemma 4.24 gilt dann für *jede* $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel ψ, dass

$$\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi.$$

Insbesondere gilt also für die Formel $\psi := \varphi$, dass

$$\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi.$$

Andererseits erhält man aus der Voraussetzungsregel (V), dass

$$\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi.$$

Die Fallunterscheidungsregel (FU) liefert:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi.$$

Dies beendet den Beweis des Vollständigkeitssatzes. □

Folie 327

Zum Beweis des Erfüllbarkeitslemmas:

Zur Erinnerung: Das Erfüllbarkeitslemma besagt:

Jede widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ ist erfüllbar.

Beweisidee:
Konstruiere eine σ-Interpretation $\mathcal{I}_\Phi = (\mathcal{A}, \beta)$, so dass gilt:

- Das Universum A von $\mathcal{A}$ ist die Menge T_σ aller σ-Terme.
- Für jeden σ-Term t gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} = t$.
- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$, und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k$ gilt:

$$(t_1, \ldots, t_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \iff \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1, \ldots, t_k)$$

Diese Interpretation $\mathcal{I}_\Phi$ wird *Terminterpretation von* Φ genannt.
Gemäß Definition erfüllt $\mathcal{I}_\Phi$ alle atomaren Formeln der Form $R(t_1, \ldots, t_k)$ in Φ.
Im Allgemeinen gilt jedoch noch nicht $\mathcal{I}_\Phi \models \Phi$ (betrachte dazu beispielsweise die Formelmenge $\Phi := \{v_0{=}v_1\}$, die offensichtlicherweise erfüllbar ist, für die aber gilt: $\mathcal{I}_\Phi \not\models \Phi$).
Aber nach einigen anspruchsvollen Modifikationen von $\mathcal{I}_\Phi$ erhält man eine Interpretation $\mathcal{I}'_\Phi$ mit $\mathcal{I}'_\Phi \models \Phi$.
Details finden sich im Buch „Einführung in die mathematische Logik" von Ebbinghaus, Flum und Thomas [EFT07].

4.3 Der Endlichkeitssatz

Folie 328

Zur Erinnerung:

Wir haben bereits den *Endlichkeitssatz der Aussagenlogik* kennen gelernt, der besagt, dass Folgendes für jede Menge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und jede Formel $\psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

(1) Φ ist erfüllbar $\iff$ Jede endliche Teilmenge von Φ ist erfüllbar.

(2) $\Phi \models \psi \iff$ Es gibt eine endliche Teilmenge Γ von Φ, so dass $\Gamma \models \psi$.

Der Endlichkeitssatz gilt auch für die Logik erster Stufe, d.h. die Aussagen (1) und (2) gelten auch für alle Mengen $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und alle $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.

Zum Beweis der Endlichkeitssatzes der Logik erster Stufe nutzen wir den Vollständigkeitssatz sowie das folgende Lemma.

Folie 329

Das syntaktische Endlichkeitslemma

Lemma 4.27. *Für jede Signatur σ und jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ gilt:*

Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ *Jede endliche Teilmenge von Φ ist widerspruchsfrei.*

Beweis.
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$. Um das Lemma zu beweisen, genügt es offensichtlicherweise, zu zeigen, dass Folgendes gilt:

Φ ist widerspruchsvoll $\iff$ Es gibt eine endliche Teilmenge von Φ, die widerspruchsvoll ist.

Diese Aussage folgt direkt aus der Definition des Begriffs „widerspruchsvoll", denn:

Φ ist widerspruchsvoll

$\overset{\text{Definition 4.22}}{\iff}$ es gibt ein $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$

$\overset{\text{Definition 4.20}}{\iff}$ es gibt ein $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und Mengen $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenzen $\Gamma_1 \vdash \varphi$ und $\Gamma_2 \vdash \neg\varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar sind

$\overset{\text{Erw.regel (E)}}{\iff}$ es gibt ein $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenzen $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar sind

$\iff$ es gibt ein $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$

$\iff$ es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, das widerspruchsvoll ist.

$\square$

Alternativ lässt sich Lemma 4.27 auch durch Widerspruch beweisen:

„$\Longrightarrow$“: Gemäß Voraussetzung sei Φ widerspruchsfrei.
Sei Γ eine beliebige endliche Teilmenge von Φ.
Angenommen, Γ ist widerspruchsvoll. Dann gibt es eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ, so dass gilt: $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$.
Wegen $\Gamma \subseteq \Phi$ gilt dann auch: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. Somit ist Φ widerspruchsvoll. *Widerspruch!*

„$\Longleftarrow$“: Gemäß Voraussetzung sei jede endliche Teilmenge von Φ widerspruchsfrei. *Angenommen*, Φ ist widerspruchsvoll.
Dann gibt es eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ, so dass gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$.
Gemäß Definition 4.20 gibt es dann endliche Teilmengen Γ_1 und Γ_2 von Φ, so dass die Sequenzen $\Gamma_1 \vdash \varphi$ und $\Gamma_2 \vdash \neg\varphi$ im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ableitbar sind.
Gemäß der Erweiterungsregel (E) sind dann für $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ auch die Sequenzen $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar.
Somit gilt: $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. Aber dies bedeutet, dass die Menge Γ, die ja eine endliche Teilmenge von Φ ist, widerspruchsvoll ist.
Widerspruch! $\square$

Folie 330

Der Endlichkeitssatz (auch bekannt als Kompaktheitssatz)

Satz 4.28. *Für jede Signatur σ, jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und jede Formel $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gilt:*

(1) Φ ist erfüllbar $\iff$ Jede endliche Teilmenge von Φ ist erfüllbar.

(2) $\Phi \models \psi$ $\iff$ Es gibt eine endliche Teilmenge Γ von Φ, so dass $\Gamma \models \psi$.

Beachte: Die Aussage des Endlichkeitssatzes ist nur für *unendliche* Formelmengen Φ interessant (für endliche Mengen Φ ist sie trivial).

Beweis. Zu (1): Es gilt:

$$
\begin{array}{lcl}
\Phi \text{ ist erfüllbar} & \overset{\text{Vollständigkeitssatz}}{\iff} & \Phi \text{ ist widerspruchsfrei} \\
 & \overset{\text{Lemma 4.27}}{\iff} & \text{jede endliche Teilmenge } \Gamma \text{ von } \Phi \text{ ist widerspruchsfrei} \\
 & \overset{\text{Vollständigkeitssatz}}{\iff} & \text{jede endliche Teilmenge } \Gamma \text{ von } \Phi \text{ ist erfüllbar.}
\end{array}
$$

Zu (2): Es gilt:

$$\begin{array}{lcl}\Phi \models \psi & \overset{\text{Vollständigkeitssatz}}{\iff} & \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi \\ & \overset{\text{Definition 4.20}}{\iff} & \text{es gibt eine endliche Teilmenge } \Gamma \text{ von } \Phi \text{, so dass } \Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi \\ & \overset{\text{Vollständigkeitssatz}}{\iff} & \text{es gibt eine endliche Teilmenge } \Gamma \text{ von } \Phi \text{, so dass } \Gamma \models \psi. \end{array}$$

□

Folie 331

Erststufige Axiomatisierbarkeit

Definition 4.29.
Eine Klasse $\mathfrak{C}$ von σ-Strukturen heißt *erststufig axiomatisierbar*, falls es eine Menge Φ von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen gibt, so dass gilt: $\mathfrak{C} = \mathsf{MOD}_\sigma(\Phi)$.

Zur Erinnerung:
$\mathsf{MOD}_\sigma(\Phi)$ ist die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$, für die gilt: $\mathcal{A} \models \Phi$.

Definition 4.30. Die *Mächtigkeit* einer σ-Struktur ist die Mächtigkeit ihres Universums.
Eine σ-Struktur heißt endlich, unendlich, abzählbar[2], bzw. überabzählbar, wenn ihr Universum die entsprechende Mächtigkeit besitzt.

Beispiel 4.31.
Die Klasse aller <u>unendlichen</u> σ-Strukturen ist erststufig axiomatisierbar.

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$ betrachte die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi_n \ := \ \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg\, x_i{=}x_j .$$

Offensichtlicherweise gilt für jedes $n \geqslant 1$ und für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \varphi_n \quad \iff \quad |A| \geqslant n.$$

Somit gilt für $\Phi := \{\varphi_n \ : \ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1\}$ und für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \Phi \quad \iff \quad |A| = \infty.$$

Also wird die Klasse aller unendlichen Strukturen durch die Formelmenge Φ erststufig axiomatisiert. □

[2] Wir bezeichnen eine Menge M als *abzählbar*, wenn sie entweder endlich ist oder dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ besitzt. Somit ist M genau dann abzählbar, wenn es eine injektve Abbildung von M nach $\mathbb{N}$ gibt.

Wir können den Endlichkeitssatz anwenden, um zu zeigen, dass bestimmte Klassen von Strukturen *nicht* erststufig axiomatisierbar sind.
Im Folgenden betrachten wir dazu zwei Beispiele: die Nicht-Axiomatierbarkeit der „Endlichkeit“ von Strukturen und die Nicht-Axiomatisierbarkeit von „Graph-Zusammenhang“.

Folie 332

Nicht-Axiomatisierbarkeit der „Endlichkeit“ von Strukturen

Lemma 4.32. *Sei Φ eine Menge von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen. Falls Φ beliebig große endliche Modelle besitzt (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine endliche σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit $|A| \geqslant n$ und $\mathcal{A} \models \Phi$), so besitzt Φ ein unendliches Modell.*

Beweis. Für $n \geqslant 1$ sei φ_n die Formel aus dem Beweis von Beispiel 4.31, die besagt, dass das Universum mindestens n verschiedene Elemente enthält. Sei

$$\Phi' \quad := \quad \Phi \ \cup \ \{\varphi_n \ : \ n \geqslant 1\}.$$

Dann ist jede *endliche* Teilmenge von Φ' erfüllbar, da gemäß Voraussetzung Φ beliebig große endliche Modelle besitzt. Gemäß Endlichkeitssatz ist auch Φ' erfüllbar. D.h. es gibt eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Phi'$.
Somit gilt: $\mathcal{A} \models \Phi$ und $\mathcal{A} \models \varphi_n$ für jedes $n \geqslant 1$. Insbesondere ist also $|A| \geqslant n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $\mathcal{A}$ ein *unendliches* Modell von Φ. □

Satz 4.33.
Die Klasse aller endlichen σ-Strukturen ist nicht erststufig axiomatisierbar.

Beweis. Durch Widerspruch:
Angenommen, Φ ist eine Menge von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen, die die Klasse aller endlichen σ-Strukturen erststufig axiomatisiert. Dann hat Φ beliebig große endliche Modelle. Gemäß Lemma 4.32 besitzt Φ dann auch ein unendliches Modell. *Widerspruch!* □

Korollar 4.34. *Es gibt keine endliche Menge von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen, die die Klasse aller unendlichen σ-Strukturen erststufig axiomatisiert.*

Beweis. Durch Widerspruch:
Angenommen, $\Phi = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ ist eine endliche Menge von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen, die die Klasse aller unendlichen σ-Strukturen erststufig axiomatisiert.

Dann gilt für die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi \ := \ \neg\left(\psi_1 \land \cdots \land \psi_m\right)$$

und für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{A} \text{ ist endlich.}$$

Somit ist $\{\varphi\}$ eine Menge von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen, die die Klasse aller endlichen σ-Strukturen erststufig axiomatisiert. *Widerspruch* zu Satz 4.33. □

Folie 333

Nicht-Axiomatisierbarkeit von „Graph-Zusammenhang“

Satz 4.35. *Die Klasse aller zusammenhängenden Graphen ist nicht erststufig axiomatisierbar.*

Beweis. Sei $\sigma := \{E/2\}$ die Signatur für Graphen.
Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei $\psi_n(x,y)$ eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel, die besagt, dass es keinen Weg der Länge n von Knoten x zu Knoten y gibt. D.h. es sei

$$\psi_0(x,y) \ := \ \neg\, x{=}y$$

und, für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$, sei

$$\psi_n(x,y) \ := \ \neg\,\exists z_0\,\exists z_1 \cdots \exists z_n \,\Big(z_0{=}x \ \land \ z_n{=}y \ \land \ \bigwedge_{i=1}^{n} E(z_{i-1}, z_i)\Big).$$

Offensichtlicherweise gilt für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ und alle Knoten $a, b \in A$:

$$\mathcal{A} \models \psi_n[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt in } \mathcal{A} \text{ keinen Weg der Länge } n \text{ von } a \text{ nach } b.$$

Sei

$$\Psi \ := \ \{\, \psi_n(x,y) \ : \ n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geqslant 1 \}.$$

Dann gilt für jeden gerichteten Graphen $\mathcal{A}$, für jede Belegung $\beta : \mathsf{VAR} \to A$ und für die Knoten $a := \beta(x)$ und $b := \beta(y)$:

$$(\mathcal{A}, \beta) \models \Psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{es gibt in } \mathcal{A} \text{ keinen Weg von } a \text{ nach } b.$$

Angenommen, Φ ist eine Menge von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen die die Klasse aller zusammenhängenden Graphen erststufig axiomatisiert. D.h. für jeden ungerichteten Graphen $\mathcal{G}$ und den zu $\mathcal{G}$ gehörenden[3] gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{G} \text{ ist zusammenhängend} \quad \iff \quad \mathcal{A} \models \Phi.$$

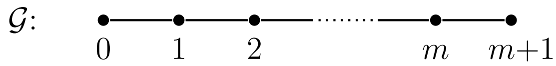
Gemäß Definition ist ein ungerichteter Graph $\mathcal{G}$ genau dann zusammenhängend, wenn es für jedes Paar (a,b) von Knoten von $\mathcal{G}$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass es in $\mathcal{G}$ einen Weg der Länge n von Knoten a zu Knoten b gibt. Daher ist

$$\Phi' \quad := \quad \Phi \cup \Psi$$

eine *unerfüllbare* Menge von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln.
Im Folgenden zeigen wir, dass jede *endliche* Teilmenge Γ von Φ' erfüllbar ist. Laut Endlichkeitssatz muss daher auch Φ' erfüllbar sein. *Widerspruch!*

Sei also Γ eine beliebige endliche Teilmenge von Φ'. Unser Ziel ist, zu zeigen, dass Γ erfüllbar ist.
Sei dazu $m := \max\{n \in \mathbb{N} \ : \ \psi_n \in \Gamma\}$. Sei $\mathcal{G}$ ein Graph, der aus einer ungerichteten Kette von $m{+}2$ Knoten besteht.

Skizze:



D.h.: $\mathcal{G}$ ist der Graph mit Knotenmenge $\{0,\ldots,m{+}1\}$ und Kantenmenge $\big\{\{i{-}1,i\} : 1 \leqslant i \leqslant m{+}1\big\}$.
Dann gilt für die zu $\mathcal{G}$ gehörende σ-Struktur $\mathcal{A}$:

1. $\mathcal{A} \models \Phi$, da $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist, und

2. für die Endknoten $a := 0$ und $b := m{+}1$ der Kette gilt:
   Es gibt in $\mathcal{A}$ keinen Weg der Länge $\leqslant m$ von Knoten a zu Knoten b.
   Somit gilt für jedes $n \leqslant m$, dass $\mathcal{A} \models \psi_n[a,b]$.

Gemäß der Wahl von m gilt daher für die Belegung β mit $\beta(x) := a$ und $\beta(y) := b$, dass $(\mathcal{A},\beta) \models \Gamma$. Somit ist Γ erfüllbar. $\square$

Folie 334

[3] d.h. für $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ ist $\mathcal{A}$ die σ-Struktur mit Universum $A := V^{\mathcal{G}}$ und mit Kantenmenge $E^{\mathcal{A}} := \{(u,v) \ : \ \{u,v\} \in E^{\mathcal{G}}\}$

Der Satz von Löwenheim und Skolem

Unter Verwendung von Teilergebnissen, die beim (in dieser Vorlesung nicht im Detail behandelten) Beweis des Erfüllbarkeitslemmas anfallen, erhält man das folgende Resultat.

Satz 4.36 (Der Satz von Löwenheim und Skolem)**.**
Sei σ eine abzählbare Signatur. Dann hat jede erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ ein höchstens abzählbares Modell.

(Hier ohne Beweis)

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Löwenheim und Skolem erhalten wir:

Korollar 4.37. *Sei σ eine abzählbare Signatur.*
Dann ist die Klasse aller <u>überabzählbaren</u> σ-Strukturen <u>nicht</u> erststufig axiomatisierbar.

Beweis. Angenommen, Φ ist eine Menge von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen, die die Klasse aller überabzählbaren σ-Strukturen erststufig axiomatisiert.
Gemäß Satz von Löwenheim und Skolem besitzt Φ ein höchstens abzählbares Modell. *Widerspruch!* □

4.4 Die Grenzen der Berechenbarkeit

Folie 335

Zur Erinnerung: Einige Begriffe zum Thema (Un)Entscheidbarkeit

Entscheidungsprobleme sind Probleme, die mit „ja“ oder „nein“ beantwortet werden können. Genauer:

- Sei M eine abzählbar unendliche Menge, zum Beispiel
  - die Menge Σ^* aller Worte über einem endlichen Alphabet Σ, oder
  - die Menge aller Graphen, deren Knotenmenge eine endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen ist.
- Das *Entscheidungsproblem für eine Menge $L \subseteq M$* ist das folgende Berechnungsproblem:

> *Das Entscheidungsproblem für* $L \subseteq M$
> *Eingabe:* Ein Element $m \in M$.
> *Frage:* Ist $m \in L$?

Folie 336

Beispiele für Entscheidungsprobleme

- *Graphzusammenhang* ist das *Entscheidungsproblem für* $L \subseteq M$, wobei

  M die Menge aller ungerichteten Graphen ist, deren Knotenmenge eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist und

  L die Menge aller zusammenhängenden Graphen aus M ist.

- Das *Halteproblem* ist das *Entscheidungsproblem für* $L \subseteq M$, wobei

  M die Menge aller Worte $w\#x$ mit $w, x \in \{0,1\}^*$ ist und

  L die Menge aller Worte $w\#x$ ist, so dass w eine deterministische Turingmaschine beschreibt, die bei Eingabe x nach endlich vielen Schritten anhält.

Folie 337

Entscheidungsprobleme für die Logik erster Stufe

> *Allgemeingültigkeitsproblem für* FO[σ]
> *Eingabe:* Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ
> *Frage:* Ist φ allgemeingültig?

Formal:

M ist die Menge aller Worte über dem Alphabet $A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ und
L ist die Menge $\{\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma] \ : \ \varphi \text{ ist allgemeingültig}\}$

> *Erfüllbarkeitsproblem für* FO[σ]
> *Eingabe:* $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ
> *Frage:* Ist φ erfüllbar?

> *Unerfüllbarkeitsproblem für* FO[σ]
> *Eingabe:* $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ
> *Frage:* Ist φ unerfüllbar?

Folgerungsproblem für FO[σ]
Eingabe: Zwei FO[σ]-Formeln φ, ψ
Frage: Gilt $\varphi \models \psi$?

Folie 338

Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit

Definition 4.38. Sei M eine abzählbar unendliche Menge.

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ *heißt entscheidbar*, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und

- „ja" ausgibt, falls $m \in L$
- „nein" ausgibt, falls $m \notin L$.

(b) $L \subseteq M$ heißt *semi-entscheidbar*, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$

- nach endlich vielen Schritten anhält und „ja" ausgibt, falls $m \in L$
- nie anhält, falls $m \notin L$.

Beispiele:

- *Graphzusammenhang* ist *entscheidbar* (z.B. durch Tiefen- oder Breitensuche).
- Das *Halteproblem* ist *semi-entscheidbar* (bei Eingabe von $w\#x$ konstruiere die von w repräsentierte deterministische Turingmaschine und lasse diese mit Eingabe x laufen).
  Ist es auch *entscheidbar? Nein!* — Das Halteproblem ist das Paradebeispiel eines nicht entscheidbaren Problems.

Folie 339

Einfache Beobachtungen

- Jede entscheidbare Menge $L \subseteq M$ ist auch semi-entscheidbar (anstatt „nein" auszugeben und anzuhalten, gehen wir einfach in eine Endlosschleife)
- Für jede entscheidbare Menge $L \subseteq M$ ist auch die Menge $\overline{L} := (M \setminus L) \subseteq M$ entscheidbar (vertausche einfach die Antworten „ja" und „nein")
- Wenn sowohl $L \subseteq M$ als auch $\overline{L} := (M \setminus L) \subseteq M$ semi-entscheidbar sind, dann ist $L \subseteq M$ sogar entscheidbar.

  Beweis: Wir nutzen Algorithmen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$, die $L \subseteq M$ bzw. $\overline{L} \subseteq M$ semi-entscheiden und bauen daraus einen Algorithmus $\mathbb{C}$, der $L \subseteq M$ entscheidet. Bei Eingabe von $m \in M$ geht $\mathbb{C}$ wie folgt vor:

  Für $i = 1, 2, 3, \ldots$ tue Folgendes:

  Führe den i-ten Berechnungsschritt von $\mathbb{A}$ bei Eingabe m aus.
  Falls $\mathbb{A}$ in diesem Schritt anhält, so gib „ja" aus und halte an.

  Führe den i-ten Berechnungsschritt von $\mathbb{B}$ bei Eingabe m aus.
  Falls $\mathbb{B}$ in diesem Schritt anhält, so gib „nein" aus und halte an.

  Man sieht leicht, dass $\mathbb{C}$ nach endlich vielen Schritten anhält und „ja" (bzw. „nein") ausgibt, falls $m \in L$ (bzw. $m \notin L$) ist. $\square$

Folie 340

Semi-Entscheidbarkeit einiger Logik-Probleme

Satz 4.39. *Sei σ eine höchstens abzählbare Signatur.*
Jedes der folgenden Probleme ist semi-enscheidbar:

(a) das Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$,

(b) das Unerfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$,

(c) das Folgerungsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$.

Beweis.

(a) Für jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ gilt gemäß dem Vollständigkeitssatz:

$$\begin{aligned} & \varphi \text{ ist allgemeingültig} \\ \iff & \emptyset \models \varphi \\ \iff & \text{die Sequenz } \ \emptyset \vdash \varphi \ \text{ ist korrekt} \\ \iff & \text{die Sequenz } \ \emptyset \vdash \varphi \ \text{ ist im Sequenzenkalkül } \mathfrak{K}_S \text{ ableitbar.} \end{aligned}$$

Da der Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ *effektiv* ist, gibt es einen Algorithmus $\mathbb{S}$, der nach und nach alle aus $\mathfrak{K}_S$ ableitbaren Sequenzen ausgibt.

Wir nutzen diesen Algorithmus, um einen Semi-Entscheidungs-Algorithmus für das Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ zu erhalten: Bei Eingabe einer $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ starten wir $\mathbb{S}$. Jedesmal, wenn $\mathbb{S}$ eine Sequenz ausgibt, überprüft $\mathbb{A}$, ob dies die Sequenz $\emptyset \vdash \varphi$ ist. Falls ja, hält $\mathbb{A}$ an und gibt „ja“ aus.

Offensichtlicherweise gilt für jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ:
Falls φ allgemeingültig ist, so wird $\mathbb{A}$ bei Eingabe φ nach endlich vielen Schritten mit Ausgabe „ja“ anhalten (da $\mathbb{S}$ nach endlich vielen Schritten die (korrekte) Sequenz „$\emptyset \vdash \varphi$“ ausgeben wird).
Falls φ *nicht* allgemeingültig ist, wird $\mathbb{A}$ bei Eingabe φ nie anhalten (da die Sequenz „$\emptyset \vdash \varphi$“ nicht korrekt ist und daher nie von $\mathbb{S}$ ausgegeben wird).

(b) Für jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel ψ gilt:

$$\varphi \ \text{ ist unerfüllbar} \quad \iff \quad \neg\varphi \ \text{ ist allgemeingültig.}$$

Wir können daher den Semi-Entscheidungs-Algorithmus $\mathbb{A}$ aus (a) nutzen, um einen Semi-Entscheidungs-Algorithmus $\mathbb{U}$ für das Unerfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ zu erhalten: Bei Eingabe einer $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ setzen $\psi := \neg\varphi$ und starten Algorithmus $\mathbb{A}$ mit Eingabe ψ. Falls $\mathbb{A}$ anhält und „ja“ ausgibt, hält auch $\mathbb{U}$ an und gibt „ja“ aus.

Man sieht leicht, dass für jede Formel φ gilt: Bei Eingabe φ wird $\mathbb{U}$

- nach endlich vielen Schritten anhalten und „ja“ ausgeben, falls die Formel $\neg\varphi$ allgemeingültig, und somit φ unerfüllbar ist,
- nie anhalten, falls die Formel $\neg\varphi$ *nicht* allgemeingültig, und somit φ erfüllbar ist.

(c) Für alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ und ψ gilt:

$$\varphi \models \psi \quad \iff \quad \text{die Formel } (\neg\varphi \vee \psi) \text{ ist allgemeingültig.}$$

Wir können daher den Semi-Entscheidungs-Algorithmus $\mathbb{A}$ aus (a) nutzen, um einen Semi-Entscheidungs-Algorithmus $\mathbb{F}$ für das Folgerungsproblem zu erhalten: Bei Eingabe zweier $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ und ψ konstruiert $\mathbb{F}$ die Formel $\chi := (\neg\varphi \vee \psi)$, startet dann Algorithmus $\mathbb{A}$ mit Eingabe χ und hält mit Ausgabe „ja“ an, falls $\mathbb{A}$ mit Ausgabe „ja“ anhält.

Man sieht leicht, dass für alle Formeln φ, ψ gilt:
Bei Eingabe von φ und ψ wird $\mathbb{F}$

- nach endlich vielen Schritten anhalten und „ja“ ausgeben, falls die Formel $(\neg\varphi \vee \psi)$ allgemeingültig ist, und somit „$\varphi \models \psi$“ gilt
- nie anhalten, falls die Formel $(\neg\varphi \vee \psi)$ *nicht* allgemeingültig ist, und somit „$\varphi \models \psi$“ *nicht* gilt.

$\square$

Folie 341

Unentscheidbarkeit einiger Logik-Probleme

Unser nächstes Ziel ist, zu zeigen, dass für bestimmte Signaturen σ gilt:

- Das Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$,
- das Unerfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$,
- das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ und
- das Folgerungsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$

ist *nicht entscheidbar*.

Wir werden dazu wie folgt vorgehen:

1. Wir nutzen das bekannte Resultat, das besagt, dass das *Postsche Korrespondenzproblem* unentscheidbar ist.
2. Wir zeigen, wie das Postsche Korrespondenzproblem unter Zuhilfenahme eines Entscheidungs-Algorithmus für das Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ (für eine geeignete Signatur σ) gelöst werden könnte.

   Dadurch erhalten wir, dass das Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ unentscheidbar ist.

3. Die Unentscheidbarkeit des Unerfüllbarkeitsproblems, des Erfüllbarkeitsproblems und des Folgerungsproblems für $\mathsf{FO}[\sigma]$ folgen dann leicht aus der Unentscheidbarkeit des Allgemeingültigkeitsproblems für $\mathsf{FO}[\sigma]$.

Folie 342

Das Postsche Korrespondenzproblem

Das Postsche Korrespondenzproblem (PKP)

Eingabe: Eine Zahl $k \geqslant 1$ und k Paare (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_k, y_k) mit $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k \in \{0,1\}^*$.

Frage: Gibt es ein $n \geqslant 1$ und Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, so dass gilt: $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \ = \ y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$?

Beispiel:
Das PKP mit Eingabe $k = 3$ und

$$(x_1, y_1) \ = \ (\,1,\ 111\,), \qquad (x_2, y_2) \ = \ (\,10111,\ 10\,), \qquad (x_3, y_3) \ = \ (\,10,\ 0\,).$$

hat eine Lösung mit $n = 4$ und $i_1 = 2$, $i_2 = 1$, $i_3 = 1$, $i_4 = 3$, denn:

$$\begin{aligned} x_2\, x_1\, x_1\, x_3 \quad &= \quad 10111 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 10 \\ y_2\, y_1\, y_1\, y_3 \quad &= \quad 10 \ \ 111 \ \ 111 \ \ 0. \end{aligned}$$

Bekannt:

- Das *PKP ist semi-entscheidbar.*

  (Dies sieht man leicht.)

- Das *PKP ist <u>nicht</u> entscheidbar.*

  (Dies wurde in der Veranstaltung „Einführung in die Theoretische Informatik“ bewiesen.)

Folie 343

Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe

Satz 4.40. *Sei* $\sigma := \{R, f_0, f_1, c\}$, *wobei* c *ein Konstantensymbol,* R *ein 2-stelliges Relationssymbol und* f_0, f_1 *zwei 1-stellige Funktionssymbole sind. Das Allgemeingültigkeitsproblem für* $\mathsf{FO}[\sigma]$ *ist nicht entscheidbar.*

Beweis: Auf Grund der Unentscheidbarkeit des PKP reicht es, eine Reduktion vom PKP zum Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ anzugeben. D.h. wir zeigen, dass bei Eingabe eines Tupels $I = \big(k,\ (x_1,y_1),\ \dots,\ (x_k,y_k)\big)$, das eine Eingabe für's PKP repräsentiert, eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ_I konstruiert werden kann, die genau dann allgemeingültig ist, wenn I eine „ja"-Instanz für's PKP ist (d.h. es gibt $n \geqslant 1$ und $i_1,\dots,i_n \in [k]$, so dass $x_{i_1}\cdots x_{i_n} = y_{i_1}\cdots y_{i_n}$).
Wenn das Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ entscheidbar wäre, wäre daher auch das PKP entscheidbar.

Zur Konstruktion der Formel φ_I gehen wir in mehreren Schritten vor.

Folie 344

Schritt 1: Für jede Eingabe $I = \big(k,\ (x_1,y_1),\ \dots,\ (x_k,y_k)\big)$ für das PKP definiere eine σ-Struktur $\mathcal{A}_I$, so dass gilt:

$\mathcal{A}_I \models \exists z\, R(z,z) \iff$ I ist eine „ja"-Instanz für's PKP, d.h. es gibt $n \geqslant 1$ und $i_1,\dots,i_n \in [k]$, so dass $x_{i_1}\cdots x_{i_n} = y_{i_1}\cdots y_{i_n}$.

Dazu wählen wir $\mathcal{A}_I$ wie folgt:

- Universum $A_I := \{0,1\}^*$
- $c^{\mathcal{A}_I} := \varepsilon$ (leeres Wort)
- für jedes $w \in \{0,1\}^*$ gilt: $f_0^{\mathcal{A}_I}(w) := w0$ und $f_1^{\mathcal{A}_I}(w) := w1$
- $R^{\mathcal{A}_I} := \{\ (\ x_{i_1}\cdots x_{i_n},\ y_{i_1}\cdots y_{i_n}\ )\ :\ n \geqslant 1,\ \ i_1,\dots,i_n \in [k]\ \}$

Offensichtlicherweise gilt:

$$\mathcal{A}_I \models \exists z\, R(z,z) \quad\iff\quad I \text{ ist eine „ja"-Instanz für's PKP.}$$

Folie 345

Schritt 2: Konstruiere $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln ψ_I^{Start} und $\psi_I^{\mathit{Schritt}}$, die $\mathcal{A}_I$ hinreichend genau beschreiben.

Die Formel ψ_I^{Start} soll besagen, dass die Relation $R^{\mathcal{A}_I}$ die Tupel (x_j, y_j) für alle $j \in [k]$ enthält.
Die Formel $\psi_I^{Schritt}$ soll besagen, dass die Relation $R^{\mathcal{A}_I}$ abgeschlossen ist unter Konkatenation mit (x_j, y_j); d.h.: Ist $(u, v) \in R^{\mathcal{A}_I}$ und $j \in [k]$, so ist auch $(ux_j, vy_j) \in R^{\mathcal{A}_I}$.
Um dies durch $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln zu formulieren, nutzen wir folgende Schreibweisen:

Für ein Wort $w = w_1 \cdots w_\ell \in \{0,1\}^\ell$ und einen σ-Term t schreiben wir

$$f_w(t)\,,$$

um den σ-Term

$$f_{w_\ell}\big(\cdots f_{w_2}\big(f_{w_1}(t)\big)\big)$$

zu bezeichnen. Analog bezeichnen wir für eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $f_w^{\mathcal{B}}$ die Funktion von B nach B, so dass für jedes $b \in B$ gilt:

$$f_w^{\mathcal{B}}(b) \quad = \quad f_{w_\ell}^{\mathcal{B}}\big(\cdots f_{w_2}^{\mathcal{B}}\big(f_{w_1}^{\mathcal{B}}(b)\big)\big).$$

Beachte, dass dies gerade so definiert ist, dass für die Struktur $\mathcal{A}_I$ und für alle Worte $u \in \{0,1\}^*$ und alle nicht-leeren $w \in \{0,1\}^*$ gilt:

$$f_w^{\mathcal{A}_I}(u) \quad = \quad u\,w\,.$$

Unter Nutzung dieser Notationen setzen wir

$$\psi_I^{Start} \quad := \quad \bigwedge_{j=1}^{k} R\,\big(\,f_{x_j}(c),\ f_{y_j}(c)\,\big)$$

$$\psi_I^{Schritt} \quad := \quad \forall u\,\forall v\,\Big(\ R(u,v)\ \to\ \bigwedge_{j=1}^{k} R\,\big(\,f_{x_j}(u),\ f_{y_j}(v)\,\big)\ \Big)$$

Beachte: $\mathcal{A}_I \models \big(\psi_I^{Start} \wedge \psi_I^{Schritt}\big)$, da die Relation $R^{\mathcal{A}_I}$ alle Tupel (x_j, y_j) für $j \in [k]$ enthält und da für alle Tupel $(u, v) \in R^{\mathcal{A}_I}$ gilt, dass auch $(ux_j, vy_j) \in R^{\mathcal{A}_I}$ ist, für jedes $j \in [k]$.

Folie 346

Schritt 3: Setze $\quad \varphi_I \ := \ \Big(\ \big(\psi_I^{Start} \wedge \psi_I^{Schritt}\big) \to\ \exists z\, R(z,z)\ \Big)$

Klar: Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe von I die Formel φ_I konstruiert.

Behauptung 1:

$$\varphi_I \text{ ist allgemeingültig} \quad \iff \quad I \text{ ist eine „ja“-Instanz für's PKP.}$$

Beweis:

„$\Longrightarrow$“: Sei φ_I allgemeingültig. Dann gilt insbesondere $\mathcal{A}_I \models \varphi_I$. Gemäß Schritt 2 und Schritt 1 ist I dann eine „ja“-Instanz für's PKP.

„$\Longleftarrow$“: Sei I eine „ja“-Instanz für's PKP. Dann gibt es ein Wort $\hat{u} \in \{0,1\}^*$, so dass $(\hat{u}, \hat{u}) \in R^{\mathcal{A}_I}$.

Wir müssen zeigen, dass φ_I allgemeingültig ist. Sei dazu $\mathcal{B}$ eine beliebige σ-Struktur. Zu zeigen: $\mathcal{B} \models \varphi_I$.

Fall 1: $\mathcal{B} \not\models \big(\psi_I^{Start} \wedge \psi_I^{Schritt}\big)$.
Dann gilt gemäß Konstruktion von φ_I, dass $\mathcal{B} \models \varphi_I$.

Fall 2: $\mathcal{B} \models \big(\psi_I^{Start} \wedge \psi_I^{Schritt}\big)$.
Wir müssen zeigen, dass dann auch gilt: $\mathcal{B} \models \exists z\, R(z,z)$. D.h. wir müssen ein $\hat{b} \in B$ finden, so dass gilt: $(\hat{b}, \hat{b}) \in R^{\mathcal{B}}$.
Ein solches $\hat{b} \in B$ finden wir, indem wir $\hat{b} := h(\hat{u})$ setzen, wobei $h : \{0,1\}^* \to B$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &:= c^{\mathcal{B}}, \qquad\qquad \text{und für alle } u \in \{0,1\}^* \text{ gilt:} \\ h(u0) &:= f_0^{\mathcal{B}}\big(h(u)\big), \\ h(u1) &:= f_1^{\mathcal{B}}\big(h(u)\big). \end{aligned}$$

Per Induktion nach der Länge von w sieht man leicht, dass für alle $u \in \{0,1\}^*$ und alle nicht-leeren $w \in \{0,1\}^*$ gilt:

$$h(uw) \;=\; f_w^{\mathcal{B}}\big(h(u)\big) \qquad \text{und} \qquad h(w) \;=\; f_w^{\mathcal{B}}\big(h(\varepsilon)\big) \;=\; f_w^{\mathcal{B}}\big(c^{\mathcal{B}}\big).$$

Wegen $(\hat{u}, \hat{u}) \in R^{\mathcal{A}_I}$ folgt daher aus der nächsten Behauptung, dass $(\hat{b}, \hat{b}) \in R^{\mathcal{B}}$, und damit ist der Beweis dann beendet.

Behauptung 2: Für alle $(u,v) \in R^{\mathcal{A}_I}$ gilt: $\big(h(u), h(v)\big) \in R^{\mathcal{B}}$.

Beweis: Per Induktion nach n zeigen wir, dass für alle $n \geqslant 1$ und alle $i_1, \ldots, i_n \in [k]$ gilt: $\big(\, h(x_{i_1} \cdots x_{i_n}),\ h(y_{i_1} \cdots y_{i_n})\,\big) \in R^{\mathcal{B}}$.

Induktionsanfang $n = 1$: Wegen $\mathcal{B} \models \psi_I^{Start}$ gilt insbes. für $j := i_1$, dass

$$\mathcal{B} \;\models\; R\big(\, f_{x_{i_1}}(c),\ f_{y_{i_1}}(c)\,\big).$$

Somit gilt: $\big(\, h(x_{i_1}),\ h(y_{i_1})\,\big) \;=\; \big(\, f_{x_{i_1}}^{\mathcal{B}}(c^{\mathcal{B}}),\ f_{y_{i_1}}^{\mathcal{B}}(c^{\mathcal{B}})\,\big) \;\in\; R^{\mathcal{B}}$.
Dies beendet den Induktionsanfang.

Induktionsschritt $n \to n{+}1$*:* Gemäß Induktionsannahme gilt für $u := x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ und $v := y_{i_1} \cdots y_{i_n}$, dass $\big(h(u),\ h(v)\big) \in R^{\mathcal{B}}$.
Für $j := i_{n+1}$ müssen wir zeigen, dass auch gilt: $\big(h(ux_j),\ h(vy_j)\big) \in R^{\mathcal{B}}$.
Wegen $\mathcal{B} \models \psi_I^{Schritt}$ und $\big(h(u),\ h(v)\big) \in R^{\mathcal{B}}$ gilt gemäß der Konstrukton von $\psi_I^{Schritt}$, dass

$$\Big(h(ux_j),\ h(vx_j)\Big) \quad = \quad \Big(f_{x_j}^{\mathcal{B}}\big(h(u)\big),\ f_{y_j}^{\mathcal{B}}\big(h(v)\big)\Big) \quad \in \quad R^{\mathcal{B}}.$$

Dies beendet den Induktionsschritt und daher auch den Beweis von Behauptung 2, den Beweis von Behauptung 1 und insgesamt den Beweis von Satz 4.40. □

Folie 347

Aus Satz 4.39, Satz 4.40 und den bekannten Zusammenhängen zwischen semi-entscheidbaren und entscheidbaren Problemen, sowie den Korrespondenzen zwischen Allgemeingültigkeit, (Un)Erfüllbarkeit und logischer Folgerung, erhält man leicht:

Korollar 4.41. *Sei σ die Signatur aus Satz 4.40. Dann gilt:*

(a) Das Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ *ist semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar.*

(b) Das Folgerungsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ *ist semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar.*

(c) Das Unerfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ *ist semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar.*

(d) Das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathsf{FO}[\sigma]$ *ist nicht semi-entscheidbar.*

Beweis: Übung.

Folie 348

Bemerkung 4.42. Man kann zeigen, dass

(1) Korollar 4.41 für jede Signatur σ gilt, die mindestens ein Relationssymbol der Stelligkeit $\geqslant 2$ enthält

(2) für Signaturen σ, die ausschließlich aus Konstantensymbolen und Relationssymbolen der Stelligkeit 1 bestehen, jedes der in Korollar 4.41 betrachteten Probleme entscheidbar ist.

(Hier ohne Beweis)

4.5 Der Satz von Herbrand

Folie 349

- Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass es keinen Algorithmus gibt, der das Erfüllbarkeitsproblem und das Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe löst und stets terminiert.
- Trotzdem möchte man für verschiedene Anwendungsbereiche Verfahren haben, die das Erfüllbarkeits- oder das Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe „so gut wie möglich" lösen.
- Einen Ansatz für die Entwicklung solcher, in der Praxis nutzbarer, Verfahren liefert die *Herbrand-Theorie*, die nach dem französischen Logiker Jacques Herbrand (1908–1931) benannt ist.
- Ziel dieses Abschnitts ist, den *Satz von Herbrand* vorzustellen, der das Allgemeingültigkeits- bzw. das Erfüllbarkeitsproblem der Logik erster Stufe auf das entsprechende Problem der Aussagenlogik zurückführt.

Folie 350

Notationen

- In diesem Abschnitt bezeichnet σ stets eine endliche oder abzählbare Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält.
- Die Menge aller *quantorenfreien* $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln bezeichnen wir mit QF_σ.
- Ein *Grundterm* über σ ist ein *variablenfreier σ-Term*, d.h., ein σ-Term, der keine Variable enthält.
  Die *Menge aller Grundterme über σ* bezeichnen wir mit GT_σ.

Beispiele:

(a) Sei $\sigma := \{ c,\ f/1,\ g/2,\ R/2 \}$.

Grundterme über σ sind dann z.B.

$$c,\ \ f(c),\ \ g(c,c),\ \ f(f(c)),\ \ f(g(c,c)),\ \ g(c,f(c)),\ \ g(f(c),c),\ \ \dots$$

(b) Sei $\sigma := \{ c,\ R/2 \}$.

Dann ist c der einzige Grundterm über σ. D.h.

$$\mathsf{GT}_\sigma \quad = \quad \{ c \}.$$

Folie 351

Herbrandstrukturen

Definition 4.43. Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält.
Eine *σ-Herbrandstruktur* ist eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Das Universum A von $\mathcal{A}$ ist genau die Menge GT_σ aller Grundterme über σ (d.h. aller variablenfreien σ-Terme).
- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c^{\mathcal{A}} = c$.
- Für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$, für $k := \operatorname{ar}(f)$, und für alle variablenfreien σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in A$ ist

$$f^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_k) \quad = \quad f(t_1, \ldots, t_k).$$

Beachte: Alle σ-Herbrandstrukturen haben dasselbe Universum und dieselbe Interpretation der Konstanten- und Funktionssymbole.
Lediglich die Interpretation der Relationssymbole kann in σ-Herbrandstrukturen frei gewählt werden.
Zur Angabe einer konkreten σ-Herbrandstruktur $\mathcal{A}$ genügt es also, die Interpretation der Relationssymbole anzugeben, d.h. für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ die Relation $R^{\mathcal{A}}$ anzugeben.

Folie 352

Beispiel

Sei $\sigma := \{ c,\ R/2 \}$.
Frage: Wie sehen σ-Herbrandstrukturen aus?
Antwort: Für jede σ-Herbrandstruktur $\mathcal{A}$ gilt:

- Universum: $A = \{ c \}$
- $c^{\mathcal{A}} = c$

- $R^{\mathcal{A}} \subseteq \{c\}^2$, d.h.

$$R^{\mathcal{A}} \;=\; \emptyset \qquad \text{oder} \qquad R^{\mathcal{A}} \;=\; \{\,(c,c)\,\}.$$

Somit gibt es genau 2 verschiedene σ-Herbrandstrukturen.

Folie 353

Bemerkung 4.44. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Herbrandstruktur.
Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

- Für jeden variablenfreien σ-Term t (d.h. für jedes $t \in \mathsf{GT}_\sigma = A$) gilt:

$$[\![t]\!]^{\mathcal{A}} \quad = \quad t\,.$$

- Für jede quantorenfreie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel ψ gilt:
  Ist $\text{var}(\psi) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$ und sind $t_1,\ldots,t_n \in \mathsf{GT}_\sigma$, so gilt:

$$\mathcal{A} \;\models\; \psi[t_1,\ldots,t_n] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{A} \;\models\; \psi\tfrac{t_1,\ldots,t_n}{x_1,\ldots,x_n}$$

  Dabei ist $\psi\frac{t_1,\ldots,t_n}{x_1,\ldots,x_n}$ die Formel, die aus ψ entsteht, indem für jedes $i \in [n]$ jedes Vorkommen von x_i ersetzt wird durch den Grundterm t_i.

Folie 354

Herbrand-Modelle und gleichheitsfreie Formeln in Skolemform

Definition 4.45.

(a) Ein *Herbrand-Modell* eines $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satzes φ ist eine σ-Herbrandstruktur, die φ erfüllt.

(b) Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ heißt *gleichheitsfrei*, falls das Symbol „=“ nicht in φ vorkommt.

(c) Eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel ist in *Skolemform* (auch: *Skolem-Normalform*), falls sie von der Form

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \;\psi$$

ist, wobei gilt: $n \geqslant 0$, $x_1,\ldots,x_n$ sind paarweise verschiedene Variablen, und ψ ist eine quantorenfreie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel.

Satz 4.46.
Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol besitzt.
Für jeden gleichheitsfreien $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Satz φ in Skolemform gilt:*

$$\varphi \text{ ist erfüllbar} \quad \iff \quad \varphi \text{ besitzt ein Herbrand-Modell.}$$

Beweis.
Die Richtung „$\Longleftarrow$“ ist offensichtlich.
Für den Beweis der Richtung „$\Longrightarrow$“ sei $\mathcal{B}$ eine σ-Struktur mit $\mathcal{B} \models \varphi$. Wir definieren im Folgenden eine σ-Herbrandstruktur $\mathcal{A}$ und zeigen dann, dass gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$.
Wir definieren die σ-Herbrandstruktur $\mathcal{A}$ wie folgt: Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und für alle $t_1, \dots, t_k \in \mathsf{GT}_\sigma = A$ setze

$$(t_1, \dots, t_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \iff \quad \mathcal{B} \models R(t_1, \dots, t_k)\,.$$

Per Induktion über den Aufbau von Formeln erhält man leicht (Details: Übung), dass für alle $n \in \mathbb{N}$, für alle *gleichheitsfreien* quantorenfreien $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln ψ mit $\text{var}(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ und für alle $t_1, \dots, t_n \in \mathsf{GT}_\sigma$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \tfrac{t_1,\dots,t_n}{x_1,\dots,x_n} \quad \iff \quad \mathcal{B} \models \psi \tfrac{t_1,\dots,t_n}{x_1,\dots,x_n} \tag{4.3}$$

Laut Voraussetzung gilt $\mathcal{B} \models \varphi$, und φ ist von der Form $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, \psi$, wobei ψ eine gleichheitsfreie, quantorenfreie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel ist.
Wegen $\mathcal{B} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \psi$ gilt insbes. für alle Grundterme $t_1, \dots, t_n \in \mathsf{GT}_\sigma$, dass

$$\mathcal{B} \models \psi\big[\, [\![t_1]\!]^{\mathcal{B}}, \dots, [\![t_n]\!]^{\mathcal{B}} \,\big]\,,$$

und somit gilt auch:

$$\mathcal{B} \models \psi \tfrac{t_1,\dots,t_n}{x_1,\dots,x_n}$$

für alle $t_1, \dots, t_n \in \mathsf{GT}_\sigma$.
Aus (4.3) folgt, dass

$$\mathcal{A} \models \psi \tfrac{t_1,\dots,t_n}{x_1,\dots,x_n}$$

für alle $t_1, \dots, t_n \in \mathsf{GT}_\sigma = A$ gilt.
Somit gilt: $\mathcal{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \psi$. Also ist $\mathcal{A}$ ein Herbrand-Modell von φ. $\square$

Folie 355

Die Herbrand-Expansion eines Satzes in Skolemform

Definition 4.47. Sei φ ein gleichheitsfreier $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz in Skolemform, d.h. φ ist von der Form $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, \psi$, wobei ψ quantorenfrei und gleichheitsfrei ist.
Die *Herbrand-Expansion* von φ ist die Formelmenge

$$\mathrm{HE}(\varphi) \quad := \quad \Big\{ \ \psi \tfrac{t_1,\ldots,t_n}{x_1,\ldots,x_n} \ : \ t_1,\ldots,t_n \in \mathsf{GT}_\sigma \ \Big\}$$

D.h.: Jede Formel in $\mathrm{HE}(\varphi)$ entsteht, indem in der quantorenfreien Formel ψ jede Variable x_i ersetzt wird durch einen Grundterm t_i.

Beispiel 4.48. Sei $\sigma = \{ c,\ f/1,\ g/2,\ R/3 \}$ und sei

$$\varphi \ := \quad \forall x\, \forall y\, \forall z\ R\big(x, f(y), g(z,x)\big)$$

Dann gehören z.B. die folgenden Formeln zur Herbrand-Expansion $\mathrm{HE}(\varphi)$:

- $R(c, f(c), g(c,c))$
  (dies erhält man, indem jede der Variablen x, y, z durch den Grundterm c ersetzt wird)
- $R(f(c), f(c), g(c, f(c)))$
  (dies erhält man, indem x durch den Grundterm $f(c)$ und jede der Variablen y, z durch den Grundterm c ersetzt wird)
- $R(g(c,c), f(f(c)), g(c, g(c,c)))$
  (dies erhält man, indem Variable x durch den Grundterm $g(c,c)$, Variable y durch den Grundterm $f(c)$ und Variable z durch den Grundterm c ersetzt wird)

Folie 356

Die aussagenlogische Version der Herbrand-Expansion

Für jeden gleichheitsfreien $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ in Skolemform gilt:

Jede Formel $\xi \in \mathrm{HE}(\varphi)$ ist quantorenfrei, gleichheitsfrei und variablenfrei, und jede atomare Subformel von ξ ist von der Form $R(t_1,\ldots,t_k)$, wobei $R \in \sigma$, $k = \mathrm{ar}(R)$ und $t_1,\ldots,t_k \in \mathsf{GT}_\sigma$.

Für jede solche atomare Formel stellen wir ein *Aussagensymbol* $X_{R(t_1,\ldots,t_k)} \in \ \mathsf{AS}$ bereit.

Für jedes $\xi \in \mathrm{HE}(\varphi)$ sei $\mathrm{al}(\xi)$ die *aussagenlogische* Formel, die aus ξ entsteht, indem jede atomare Subformel der Form $R(t_1,\ldots,t_k)$ ersetzt wird durch das Aussagensymbol $X_{R(t_1,\ldots,t_k)}$.

Die *aussagenlogische Version der Herbrand-Expansion von* φ ist die Menge

$$\mathrm{AHE}(\varphi) \quad := \quad \big\{ \ \mathrm{al}(\xi) \quad : \quad \xi \in \mathrm{HE}(\varphi) \ \big\}.$$

Folie 357

Der Satz von Herbrand

Satz 4.49 (Satz von Gödel-Herbrand-Skolem)**.**
Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält.
Für jeden gleichheitsfreien $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ in Skolemform gilt: φ ist erfüllbar $\iff$ die aussagenlogische Formelmenge $\mathrm{AHE}(\varphi)$ ist erfüllbar.

Beweis. Sei φ von der Form $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, \psi$, wobei ψ quantorenfrei und gleichheitsfrei ist. Es gilt:

$$\begin{array}{cl} & \varphi \ \text{ ist erfüllbar} \\ \overset{\text{Satz 4.46}}{\iff} & \varphi \ \text{ besitzt ein Herbrand-Modell} \\ \iff & \text{es gibt eine } \sigma\text{-Herbrandstruktur } \mathcal{A} \text{ mit } \ \mathcal{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \psi \end{array}$$

Für jede σ-Herbrandstruktur $\mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{array}{cl} & \mathcal{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \psi \\ \overset{A=\mathsf{GT}_\sigma}{\iff} & \text{für alle } t_1,\ldots,t_n \in \mathsf{GT}_\sigma \text{ gilt: } \ \mathcal{A} \models \psi\frac{t_1,\ldots,t_n}{x_1,\ldots,x_n} \\ \overset{\text{Def. HE}(\varphi)}{\iff} & \mathcal{A} \models \mathrm{HE}(\varphi) \\ \iff & \mathcal{J}_{\mathcal{A}} \models \mathrm{AHE}(\varphi), \end{array}$$

wobei $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ die *aussagenlogische* Interpretation ist, so dass für jedes $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$, für alle Grundterme $t_1,\ldots,t_k \in \mathsf{GT}_\sigma$ und für das zugehörige Aussagensymol $X_{R(t_1,\ldots,t_k)}$ gilt:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{A}}\big(X_{R(t_1,\ldots,t_k)}\big) \ := \ \begin{cases} 1 & \text{falls } \ \mathcal{A} \models R(t_1,\ldots,t_k) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere folgt, dass gilt:

$$\varphi \ \text{ erfüllbar} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{AHE}(\varphi) \ \text{ erfüllbar.}$$

Umgekehrt sei für jede aussagenlogische Interpretation $\mathcal{J}$ die zu $\mathcal{J}$ gehörende σ-Herbrandstruktur $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ definiert via

$$R^{\mathcal{A}_{\mathcal{J}}} \;:=\; \Big\{ \,(t_1,\ldots,t_k) \;\;:\;\; t_1,\ldots,t_k \in \mathsf{GT}_\sigma \;\text{ und }\; \mathcal{J}\left(X_{R(t_1,\ldots,t_k)}\right) \;=\; 1 \,\Big\},$$

für jedes $R \in \sigma$ und für $k = \mathrm{ar}(R)$.
Man sieht leicht, dass für jede aussagenlogische Interpretation $\mathcal{J}$ und jedes $\xi \in \mathrm{HE}(\varphi)$ gilt:

$$\mathcal{J} \models \mathrm{al}(\xi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{J}} \models \xi.$$

Somit gilt auch:

$$\mathcal{J} \models \mathrm{AHE}(\varphi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{J}} \models \mathrm{HE}(\varphi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{J}} \models \varphi.$$

Insbesondere gilt also:

$$\mathrm{AHE}(\varphi) \;\text{ erfüllbar } \quad \Longrightarrow \quad \varphi \;\text{ erfüllbar.}$$

Dies beendet den Beweis von Satz 4.49. □

In Verbindung mit dem Endlichkeitssatz der Aussagenlogik erhalten wir:

Satz 4.50 (Satz von Herbrand)**.**
Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält. Sei ψ eine gleichheitsfreie und quantorenfreie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel und sei $\{x_1,\ldots,x_n\} = \mathrm{frei}(\psi)$.
Dann gilt für die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätze $\varphi := \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \psi$ und $\varphi' := \exists x_1 \cdots \exists x_n\, \psi$:

(a) φ ist erfüllbar $\iff$ jede endliche Teilmenge von $\mathrm{AHE}(\varphi)$ ist erfüllbar.

(b) φ ist unerfüllbar $\iff$ es gibt eine endliche Teilmenge von $\mathrm{AHE}(\varphi)$, die unerfüllbar ist.

(c) φ' ist allgemeingültig $\iff$ es gibt eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ und Grundterme $t_{i,1},\ldots,t_{i,n}$ für alle $i \in [m]$, so dass die folgende Formel allgemeingültig ist:

$$\bigvee_{i=1}^{m} \psi\, \frac{t_{i,1},\ldots,t_{i,n}}{x_1,\ldots,x_n}$$

Beweis.
Aussage (a) folgt direkt aus dem Satz von Gödel-Herbrand-Skolem und dem Endlichkeitssatz der Aussagenlogik.
Aussage (b) folgt direkt aus (a).
Aussage (c) lässt sich aus (b) wie folgt herleiten:
Offensichtlichwerweise gilt:

$$\varphi' \text{ ist allgemeingültig} \quad \iff \quad \neg\varphi' \text{ ist unerfüllbar.}$$

Außerdem ist

$$\neg\varphi' \quad = \quad \neg\,\exists x_1 \cdots \exists x_n\,\psi \quad \equiv \quad \forall x_1 \cdots \forall x_n\,\neg\psi.$$

Gemäß (b) ist $\neg\varphi'$ genau dann unerfüllbar, wenn es eine endliche Teilmenge Γ von $\text{AHE}(\forall x_1 \cdots \forall x_n \neg\psi)$ gibt, die unerfüllbar ist.

Gemäß der Definition der Herbrand-Expansion einer Formel ist jede endliche Teilmenge Γ von $\text{AHE}(\forall x_1 \cdots \forall x_n \neg\psi)$ von der Form

$$\Big\{ \ \text{al}\big(\neg\psi \tfrac{t_{i,1},\ldots,t_{i,n}}{x_1,\ldots,x_n} \big) \ : \ i \in \{1,\ldots,m\} \ \Big\},$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ und $t_{i,1},\ldots,t_{i,n} \in \mathsf{GT}_\sigma$ für jedes $i \in [m]$ ist.
Eine solche Formelmenge ist genau dann unerfüllbar, wenn die aussagenlogische Formel

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \text{al}\big(\neg\psi \tfrac{t_{i,1},\ldots,t_{i,n}}{x_1,\ldots,x_n} \big)$$

unerfüllbar ist.
Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn der quantorenfreie und gleichheitsfreie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \neg\psi \tfrac{t_{i,1},\ldots,t_{i,n}}{x_1,\ldots,x_n}$$

unerfüllbar ist.
Und dies gilt genau dann, wenn der $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz

$$\bigvee_{i=1}^{m} \psi \tfrac{t_{i,1},\ldots,t_{i,n}}{x_1,\ldots,x_n}$$

allgemeingültig ist.
Dies beendet den Beweis von (c). $\square$

Folie 358

Anwendung des Satzes von Herbrand

Um nachzuweisen, dass ein gleichheitsfreier $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ in Skolemform unerfüllbar ist, kann man auf Grund des Satzes von Herbrand wie folgt vorgehen:

Für $i = 1, 2, 3, \ldots$ tue Folgendes:

(1) Sei ξ_i die i-te Formel in AHE(φ)

(2) Teste, ob die aussagenlogische Formel $(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_i)$ unerfüllbar ist.

(3) Falls ja, halte an mit Ausgabe „φ ist unerfüllbar"

Man sieht leicht, dass dies ein Semi-Entscheidungsverfahren ist, das eine gegebene Formel φ auf Unerfüllbarkeit testet.

Durch die Einschränkung auf *gleichheitsfreie* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Sätze in Skolemform* scheint dieses Verfahren auf den ersten Blick nur sehr eingeschränkt anwendbar zu sein.

Im Folgenden zeigen wir jedoch, dass *jede* $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel in eine zu ihr erfüllbarkeitsäquivalente Formel der richtigen Form transformiert werden kann.

Folie 359

Definition 4.51. Seien σ_1, σ_2 Signaturen und φ_i eine $\mathsf{FO}[\sigma_i]$-Formel, für jedes $i \in \{1, 2\}$.
Die Formel φ_2 heißt *erfüllbarkeitsäquivalent* zu φ_1, falls gilt:

$$\varphi_2 \text{ ist erfüllbar} \quad \iff \quad \varphi_1 \text{ ist erfüllbar.}$$

Satz 4.52 (Skolemisierung)**.** *Zu jeder Signatur σ gibt es eine Signatur $\hat{\sigma}$, so dass jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ in einen zu φ erfüllbarkeitsäquivalenten gleichheitsfreien $\mathsf{FO}[\hat{\sigma}]$-Satz $\hat{\varphi}$ in Skolemform transformiert werden kann.*

Bevor wir den Satz beweisen, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 4.53. Die Formel $\forall x\, \exists y\, \forall z\, \exists u\; R(x, y, z, u)$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zum folgenden gleichheitsfreien Satz in Skolemform:

$$\forall x\, \forall z\; R\big(x, f(x), z, g(x, z)\big)$$

Beweis von Satz 4.52:
Wir gehen in mehreren Schritten vor.

Schritt 1: Elimination von freien Variablen
Sei $\{x_1, \ldots, x_n\} = \text{frei}(\varphi)$, seien $c_1, \ldots, c_n$ paarweise verschiedene Konstantensymbole, die nicht in σ liegen.
Sei $\sigma_1 := \sigma \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$, und sei φ_1 der $\mathsf{FO}[\sigma_1]$-Satz, der aus φ entsteht, indem jedes freie Vorkommen der Variable x_i (für $i \in [n]$) ersetzt wird durch die Konstante c_i. Offensichtlicherweise gilt:

$$\varphi_1 \text{ ist erfüllbar} \quad \iff \quad \varphi \text{ ist erfüllbar.}$$

Schritt 2: Elimination des Gleichheitszeichens
Sei $\sigma_2 := \sigma_1 \cup \{G\}$, wobei G ein 2-stelliges Relationssymbol ist, das nicht in σ_1 vorkommt.
Falls φ_1 kein Gleichheitszeichen enthält, so setze $\varphi_2 := \varphi_1$ und beende Schritt 2. Ansonsten gehe wie folgt vor.
Sei φ_G die Formel, die aus φ_1 entsteht, indem jede atomare Subformel der Form $t_1{=}t_2$ (für σ-Terme t_1, t_2) ersetzt wird durch die Formel $G(t_1, t_2)$.
Sei $\chi_{\text{Äq}}$ ein $\mathsf{FO}[\{G\}]$-Satz, der besagt, dass G eine Äquivalenzrelation ist, d.h.:

$$\begin{aligned}\chi_{\text{Äq}} \quad := \quad & \forall x\, G(x,x) \quad \land \\ & \forall x\, \forall y\, \big(G(x,y) \to G(y,x)\big) \quad \land \\ & \forall x\, \forall y\, \forall z\, \Big(\big(G(x,y) \land G(y,z)\big) \to G(x,z)\Big).\end{aligned}$$

Für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ und für $k := \text{ar}(f)$ sei χ_f der folgende $\mathsf{FO}[\{f, G\}]$-Satz, der besagt, dass G „verträglich“ ist mit f.

$$\begin{aligned}\chi_f \quad := \quad \forall x_1 \cdots \forall x_k\, \forall y_1 \cdots \forall y_k \; \Big(& \bigwedge_{i=1}^{k} G(x_i, y_i) \quad \to \\ & G\,\big(\, f(x_1, \ldots, x_k),\; f(y_1, \ldots, y_k)\,\big)\Big).\end{aligned}$$

Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und für $k := \text{ar}(R)$ sei χ_R der folgende $\mathsf{FO}[\{R, G\}]$-Satz, der besagt, dass G „verträglich“ ist mit R.

$$\begin{aligned}\chi_R \quad := \quad & \forall x_1 \cdots \forall x_k\, \forall y_1 \cdots \forall y_k\, \Big(\\ & \quad \Big(\bigwedge_{i=1}^{k} G(x_i, y_i) \quad \land \quad R(x_1, \ldots, x_k)\,\Big) \quad \to \quad R(y_1, \ldots, y_k)\;\Big).\end{aligned}$$

Sei nun
$$\varphi_2 \ := \quad \varphi_G \ \land \ \chi_{\text{Äq}} \ \land \ \bigwedge_{f\in\sigma(\varphi_1)} \chi_f \ \land \ \bigwedge_{R\in\sigma(\varphi_1)} \chi_R \ .$$
Offensichtlicherweise ist φ_2 ein gleichheitsfreier $\mathsf{FO}[\sigma_2]$-Satz.

Behauptung: φ_2 ist genau dann erfüllbar, wenn φ_1 erfüllbar ist.

Beweisidee:
Die Richtung „$\Longleftarrow$“ ist trivial.
Für den Beweis der Richtung „$\Longrightarrow$“ sei $\mathcal{A}$ ein Modell von φ_2. Wir bauen daraus wie folgt ein Modell $\mathcal{B}$ für φ_1:
Die Elemente des Universums von $\mathcal{B}$ sind genau die Äquivalenzklassen von Elementen des Universums von $\mathcal{A}$ bezüglich der Äquivalenzrelation $G^{\mathcal{A}}$.
Wir schreiben $[a]$, um die Äquivalenzklasse von $a \in A$ bzgl. $G^{\mathcal{A}}$ zu bezeichnen, d.h.
$$[a] \quad := \quad \{\ a' \in A \ \ : \ \ (a,a') \in G^{\mathcal{A}}\ \}.$$
Wir setzen
$$B \quad := \quad \{\ [a] \ \ : \ \ a \in A\ \}.$$
Für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$ und für alle $a_1,\ldots,a_k \in A$ setzen wir
$$f^{\mathcal{B}}\big([a_1],\ldots,[a_k]\big) \quad := \quad [\,f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_k)\,].$$
Wegen $\mathcal{A} \models \chi_f$ ist dies wohldefiniert.
Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und für $k := \text{ar}(R)$ setzen wir
$$R^{\mathcal{B}} \quad := \quad \{\ \big([a_1],\ldots,[a_k]\big) \ \ : \ (a_1,\ldots,a_k) \in R^{\mathcal{A}}\ \}.$$
Wegen $\mathcal{A} \models \chi_R$ gilt dann für alle $a_1',\ldots a_k' \in A$:
$$\big([a_1'],\,\ldots,\,[a_k']\big) \ \in \ R^{\mathcal{B}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(a_1',\,\ldots,\,a_k'\big) \ \in \ R^{\mathcal{A}}.$$
Aus $\mathcal{A} \models \varphi_G$ kann man nun folgern (Details: Übung), dass gilt: $\mathcal{B} \models \varphi_2$.
Dies beendet den Beweis der Behauptung.

Schritt 3: Erzeugen der Formel in Skolemform
Wir bringen nun den gleichheitsfreien $\mathsf{FO}[\sigma_2]$-Satz φ_2 in Pränex-Normalform und erhalten dadurch einen zu φ_2 äquivalenten gleichheitsfreien $\mathsf{FO}[\sigma_2]$-Satz der Form
$$Q_1x_1 \cdots Q_nx_n \ \psi\,,$$
wobei gilt: ψ ist quantorenfrei und gleichheitsfrei, $n \geqslant 0$,
$Q_1,\ldots,Q_n \in \{\exists,\forall\}$, und o.B.d.A. sind die Variablen $x_1,\ldots,x_n$ paarweise

verschieden und es gilt $Q_1 = \forall$ (falls letzteres nicht der Fall ist, ersetzen wir φ_2' durch die Formel $\forall z\, \varphi_2'$, wobei $z \in \mathsf{VAR} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$).
Falls $Q_1 = \cdots = Q_n = \forall$ ist, so sind wir fertig. Andernfalls sei $i \geqslant 1$ minimal, so dass $Q_{i+1} = \exists$. Dann ist φ_2' von der Form

$$\forall x_1 \cdots \forall x_i\ \exists x_{i+1}\ \xi$$

für $\xi := Q_{i+2}x_{i+2} \cdots Q_n x_n\, \psi$.
Sei f ein i-stelliges Funktionssymbol, das nicht zu σ_2 gehört. Sei ξ' die Formel, die aus ξ entsteht, indem jedes Vorkommen der Variablen x_{i+1} ersetzt wird durch den Term $f(x_1, \dots, x_i)$, sei $\sigma_{3,1} := \sigma_2 \cup \{f\}$ und sei

$$\varphi_{3,1} \quad := \quad \forall x_1 \cdots \forall x_i\ \xi'$$

Behauptung: $\varphi_{3,1}$ ist genau dann erfüllbar, wenn φ_2 erüllbar ist.

Beweis: Übung.

Falls $\varphi_{3,1}$ keinen Existenzquantor enthält, sind wir fertig und setzen $\hat{\sigma} := \sigma_{3,1}$ und $\hat{\varphi} := \varphi_{3,1}$.
Ansonsten verfahren wir mit $\varphi_{3,1}$ genauso wie mit φ_2', um den ersten in $\varphi_{3,1}$ vorkommenden Existenzquantor zu eliminieren. Nach weniger als n Iterationen erhalten wir einen zu φ_2' erfüllbarkeitsäquivalenten, gleichheitsfreien Satz in Skolemform. Dies beendet den Beweis von Satz 4.52. □

4.6 Automatische Theorembeweiser

Folie 360

Einfaches Verfahren (ohne Unifikation)

Seien φ und ψ zwei $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln.

Ziel: Automatischer Beweis, dass $\varphi \models \psi$ gilt.

Dazu reicht es, zu zeigen, dass die Formel $(\varphi \wedge \neg\psi)$ unerfüllbar ist.

Verfahren:

1. Erzeuge einen zu $(\varphi \wedge \neg\psi)$ erfüllbarkeitsäquivalenten gleichheitsfreien $\mathsf{FO}[\hat{\sigma}]$-Satz χ in Skolemform (über der erweiterten Signatur $\hat{\sigma}$).

   Nutze dazu das im Beweis von Satz 4.52 vorgestellte Verfahren.

2. Verwende das auf Seite 231 beschriebene Semi-Entscheidungsverfahren, um zu herauszufinden, ob χ unerfüllbar ist.

Folie 361

Beispiel 4.54.
Sei $\sigma := \{R/1, c, f/1\}$,

$$\begin{aligned}\varphi &:= R(c) \;\wedge\; \forall x\, \exists y \big((\, R(x) \to R(f(f(y)))\,) \vee R(f(x))\,\big)\\ \psi &:= \exists x\, R(f(f(x))).\end{aligned}$$

Dann ist $(\varphi \wedge \neg\psi) \;=$

$$R(c) \;\wedge\; \forall x\, \exists y \big((\, R(x) \to R(f(f(y)))\,) \vee R(f(x))\,\big) \;\wedge\; \neg\exists x\, R(f(f(x)))$$

ein gleichheitsfreier Satz. Eine Umformung in Pränex-Normalform liefert den dazu äquivalenten Satz

$$\forall x\, \exists y \Big(\; R(c) \;\; \wedge \;\; (\, \neg R(x) \;\vee\; R(f(f(y))) \;\vee\; R(f(x))\,) \;\; \wedge \;\; \neg R(f(f(x))) \; \Big).$$

Wir erweitern die Signatur um ein 1-stelliges Funktionssymbol g und erhalten den dazu erfüllbarkeitsäquivalenten gleichheitsfreien Satz in Skolemform $\chi \;=$

$$\forall x \Big(\; R(c) \;\; \wedge \;\; (\, \neg R(x) \;\vee\; R(f(f(g(x)))) \;\vee\; R(f(x))\,) \;\; \wedge \;\; \neg R(f(f(x))) \; \Big)$$

über der Signatur $\hat{\sigma} = \{R, c, f, g\}$.

Folie 362

Für jeden Grundterm $t \in \mathsf{GT}_{\hat{\sigma}}$ enthält die aussagenlogische Variante AHE(χ) der Herbrand-Expansion von χ die aussagenlogische Formel

$$\xi_t \quad := \quad X_{R(c)} \;\wedge\; \Big(\neg X_{R(t)} \;\vee\; X_{R(f(f(g(t))))} \;\vee\; X_{R(f(t))} \Big) \;\wedge\; \neg\, X_{R(f(f(t)))}.$$

Wir zählen die Grundterme in $\mathsf{GT}_{\hat{\sigma}}$ in der folgenden Reihenfolge auf

$$t_1 = c, \quad t_2 = f(c), \quad t_3 = g(c), \quad t_4 = f(f(c)), \quad t_5 = g(f(c)), \quad \ldots$$

und zählen die Formeln in AHE(χ) in derselben Reihenfolge auf, also

$$\xi_1 = \xi_{t_1}, \quad \xi_2 = \xi_{t_2}, \quad \xi_3 = \xi_{t_3}, \quad \ldots$$

Bei dem auf Seite 231 beschriebenen Verfahren wird dann beispielsweise im Schleifendurchlauf für $i = 5$ getestet, ob die aussagenlogische Formel

$$(\; \xi_1 \;\wedge\; \xi_2 \;\wedge \xi_3 \;\wedge\; \xi_4 \;\wedge \xi_5 \;)$$

unerfüllbar ist. Dazu können wir beispielsweise das in Kapitel 2.6 behandelte Resolutionsverfahren oder den in Kapitel 2.7 behandelten DPLL-Algorithmus anwenden.

Folie 363

In unserem Beispiel entspricht die Formel $(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_5)$ der Klauselmenge

$$
\begin{aligned}
\Gamma \ := \ \Big\{ \ & \{ X_{R(c)} \} \ , \\
& \{ \neg X_{R(c)} \ , \ X_{R(f(f(g(c))))} \ , \ X_{R(f(c))} \} \ , \ \{ \neg X_{R(f(f(c)))} \} \ , \\
& \{ \neg X_{R(f(c))} \ , \ X_{R(f(f(g(f(c)))))} \ , \ X_{R(f(f(c)))} \} \ , \ \{ \neg X_{R(f(f(f(c))))} \} \ , \\
& \{ \neg X_{R(g(c))} \ , \ X_{R(f(f(g(g(c)))))} \ , \ X_{R(f(g(c)))} \} \ , \ \{ \neg X_{R(f(f(g(c))))} \} \\
& \{ \neg X_{R(f(f(c)))} \ , \ X_{R(f(f(g(f(f(c))))))} \ , \ X_{R(f(f(f(c))))} \} \ , \ \{ \neg X_{R(f(f(f(f(c)))))} \} \\
& \{ \neg X_{R(g(f(c)))} \ , \ X_{R(f(f(g(g(f(c))))))} \ , \ X_{R(f(g(f(c))))} \} \ , \ \{ \neg X_{R(f(f(g(f(c)))))} \} \ \Big\}
\end{aligned}
$$

Wir konstruieren eine Resolutionswiderlegung für Γ:

(1)	$\{ X_{R(c)} \}$	in Γ
(2)	$\{ \neg X_{R(c)} \ , \ X_{R(f(f(g(c))))} \ , X_{R(f(c))} \}$	in Γ
(3)	$\{ X_{R(f(f(g(c))))} \ , \ X_{R(f(c))} \}$	Resolvente aus 1,2
(4)	$\{ \neg X_{R(f(f(g(c))))} \}$	in Γ
(5)	$\{ X_{R(f(c))} \}$	Resolvente aus 3,4
(6)	$\{ \neg X_{R(f(c))} \ , \ X_{R(f(f(g(f(c)))))} \ , \ X_{R(f(f(c)))} \}$	in Γ
(7)	$\{ X_{R(f(f(g(f(c)))))} \ , \ X_{R(f(f(c)))} \}$	Resolvente aus 5,6
(8)	$\{ \neg X_{R(f(f(c)))} \}$	in Γ
(9)	$\{ X_{R(f(f(g(f(c)))))} \}$	Resolvente aus 7,8
(10)	$\{ \neg X_{R(f(f(g(f(c)))))} \}$	in Γ
(11)	$\emptyset$	Resolvente aus 9,10

Folie 364

Somit ist Γ unerfüllbar (gemäß Satz 2.60). Das auf Seite 231 angegebene Verfahren hält daher (spätestens) im Schleifendurchlauf für $i = 5$ mit der Ausgabe „χ ist unerfüllbar“ an. Da χ erfüllbarkeitsäquivalent zur Formel $(\varphi \wedge \neg\psi)$ ist, wissen wir also, dass $\varphi \models \psi$ gilt.
Dies beendet Beispiel 4.54.

Literaturverzeichnis

[BBS06] Patrick Blackburn, Johan Bos, and Kristina Striegnitz. *Learn PROLOG Now!* Kings College Publications, 2006. Online Version: http://www.learnprolognow.org/.

[Bur98] S. Burris. *Logic for Mathematics and Computer Science*. Prentice Hall, 1998.

[Cam98] P. J. Cameron. *Sets, Logic and Categories*. Springer, 1998.

[Ebb03] Heinz-Dieter Ebbinghaus. *Einführung in die Mengenlehre*. Spektrum Akademischer Verlag, 2003. 4. Auflage.

[EFT07] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, and Wolfgang Thomas. *Einführung in die Mathematische Logik*. Spektrum Akademischer Verlag, 2007. 5. Auflage.

[FG98] Jörg Flum and Martin Grohe. *Parameterized Complexity Theory*. Springer, 1998.

[HR04] M. Huth and M. Ryan. *Logic in Computer Science — Modelling and Reasoning About Systems*. Cambridge University Press, 2004.

[KK06] M. Kreuzer and S. Kühling. *Logik für Informatiker*. Pearson, 2006.

[Lib04] Leonid Libkin. *Elements of Finite Model Theory*. Springer, 2004.

[Sch00] Uwe Schöning. *Logik für Informatiker*. Spektrum Akademischer Verlag, 2000. 5. Auflage.

[Sch18] Nicole Schweikardt. „Logik in der Informatik", Skript zur gleichnamigen Vorlesung am Institut für Informatik der Humboldt-Universität zu Berlin, 2018. Verfügbar unter https://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS19-20//Logik/.

[SS94] Ehud Shapiro and Leon Sterling. *The Art of PROLOG: Advanced Programming Techniques*. MIT Press, 1994. 2. Auflage.

[vD04] D. van Dalen. *Logic and Structure*. Springer, 2004.