Big Data Analytics in Theorie und Praxis — Theorieteil

Vorlesung (entspricht 2V+1Ü SWS)

Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Lehrstuhl Logik in der Informatik
Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

Version vom 30. Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

PageRank: Markov-Ketten als Grundlage der Funktionsweise von Suchmaschinen im Internet

1.1 Einleitung

Ziel dieses Kapitels ist, einen kurzen Überblick über die Arbeitsweise von Suchmaschinen für das Internet zu geben. Wir betrachten hierbei eine Suchmaschine, die als Eingabe ein Stichwort oder eine Liste von Stichworten erhält, und die als Ausgabe eine Liste von Links auf Webseiten geben soll, deren Inhalt relevante Informationen zu den eingegebenen Stichworten enthält. Diese Liste soll so sortiert sein, dass die informativsten Links am weitesten oben stehen.

Folie 1

Suchmaschine:

Eingabe:

Eine Anfrage, bestehend aus einem oder mehreren Stichworten

Ziel:

Eine nach Relevanz sortierte Liste von Webseiten, die Informationen zu den Stichworten enthalten

Die Herausforderungen, die sich beim Bau einer Suchmaschine stellen, sind vielfältig. Zum einen ist die Anzahl der Webseiten *sehr* groß: Bereits im

Jahr 2008 gab es mehr als 1 Billion Webseiten.[1] Beachten Sie: 1 Billion $= 1.000.000.000.000 = 10^{12}$. Niemand kennt den genauen Inhalt des gesamten Internets, und das Internet verändert sich ständig: Täglich kommen neue Webseiten hinzu, viele Webseiten werden täglich aktualisiert, und andere nach einiger Zeit auch wieder gelöscht.
Eine Suchmaschine muss daher eine enorm große Menge von Daten verarbeiten, die in kurzen Zeitabständen immer wieder aktualisiert werden. Trotzdem müssen Suchanfragen, die an eine Suchmaschine geschickt werden, in „Echtzeit" beantwortet werden. Um die Ergebnisse nach ihrer Relevanz für die jeweiligen Suchbegriffe sortieren zu können, benötigt man auch ein sinnvolles Maß dafür, welche Webseiten als besonders „informativ" bewertet werden sollen.

Folie 2

Herausforderungen:

- es gibt *sehr* viele Webseiten

  bereits in 2008 mehr als 1 Billion (also 10^{12}) URLs

  Quelle: Google „Official Blog", 25. Juli 2008
- ständig kommen neue hinzu
- viele Webseiten werden täglich aktualisiert;

  manche nach einiger Zeit auch wieder gelöscht
- niemand kennt den genauen Inhalt des gesamten Internets
- trotzdem müssen Suchanfragen in „Echtzeit" beantwortet werden

Die Herausforderung besteht darin, Anfragen für einen sich rasant ändernden Suchraum gigantischer Größe ohne merkliche Reaktionszeit zu beantworten.

1.2 Die Architektur von Suchmaschinen

Folie 3

Suchmaschinen nutzen u.a. die folgenden Komponenten:

(1) *Web-Crawler:* Computerprogramme, die *Crawler* genannt werden, durchforsten das Internet, um neue oder veränderte Webseiten zu

[1]Quelle: http://googleblog.blogspot.com/2008/07/we-knew-web-was-big.html; zuletzt besucht am 19.05.2015.

identifizieren. Die von den Crawlern gefundenen Informationen über Webseiten und deren Inhalt werden aufbereitet und gespeichert.

(2) *Indexierung:* Die Informationen werden in einer Datenstruktur gespeichert, mit deren Hilfe bei Eingabe eines Suchworts in „Echtzeit“ alle Webseiten ermittelt werden können, die das Suchwort enthalten.

(3) *Bewertung der Webseiten:* Die ausgewählten Webseiten werden im Hinblick auf ihren Informationsgehalt (hinsichtlich möglicher Suchworte sowie hinsichtlich ihrer generellen Bedeutung im Internet) bewertet.

Folie 4

Einige Details dazu:

Zu jeder vom Crawler gefundenen Webseite wird die URL (d.h. die Adresse) sowie der Inhalt der Webseite gespeichert.

Der Inhalt der Webseite wird analysiert und es werden Informationen darüber gespeichert, welches Wort mit welcher Häufigkeit und an welchen Positionen in der Webseite vorkommt (etwa: im Titel, als Überschrift, im Fließtext, mit welcher Schriftgröße etc.).
Diese Informationen werden im so genannten *Index* gespeichert.

Außerdem werden die *Links*, die auf Webseiten angegeben sind, analysiert. Enthält Webseite i einen Link auf eine Webseite j, so wird der Text, mit dem der Link beschriftet ist, im zu j gehörenden Index-Eintrag abgelegt. Diese *Linkbeschriftungen* geben wertvolle Hinweise darüber, welche Informationen die Webseite j enthält.

Folie 5

Der invertierte Index:

Aus dem Index wird der so genannte *invertierte Index* generiert.
Dies ist eine Datenstruktur, die zu jedem möglichen Suchwort eine Liste aller Webseiten angibt, die dieses Suchwort enthalten.
Dabei werden jeweils auch Zusatzinformationen gespeichert, die die Wichtigkeit des Suchworts innerhalb der Webseite beschreiben, z.B. die Häufigkeit des Stichworts, seine Position und Schriftgröße innerhalb der Webseite sowie *das Vorkommen des Stichworts in Beschriftungen von Links auf die Webseite.*

Folie 6

Der Web-Graph:

Die *Link-Struktur* des Internets kann man durch einen gerichteten Graphen modellieren, bei dem jede Webseite (d.h. jede URL) durch einen Knoten repräsentiert wird, und bei dem es eine Kante von Knoten i zu Knoten j gibt, wenn die Webseite i einen Link auf Webseite j enthält.
Dieser Graph wird *Link-Index* oder *Web-Graph* genannt.
Der Web-Graph wird üblicherweise als Adjazenzliste gespeichert.

Folie 7

Bearbeitung von Such-Anfragen:

Eingabe: eine Liste von Such-Stichworten

Ziel: finde die hinsichtlich dieser Stichworte informativsten Webseiten und zeige diese sortiert nach ihrer Relevanz an

Dabei werden folgende Kriterien berücksichtigt:

(A) die Häufigkeit und Positionierung der Suchbegriffe auf der jeweiligen Webseite sowie in der Beschriftung von Links, die auf diese Webseite verweisen, und

(B) die grundlegende Bedeutung einer Webseite.

Für (A) können Methoden aus dem Bereich *Information Retrieval* verwendet werden. Details dazu finden sich z.B. in Kapitel 6 von [10].

Für (B) wird die Link-Struktur des Internets, d.h. der Web-Graph berücksichtigt.

Folie 8

Die „grundlegende Bedeutung“ einer Webseite:

Das Maß für die „grundlegende Bedeutung“ einer Webseite wird aus der Link-Struktur des Internets gewonnen, ohne dass der textuelle Inhalt einer Webseite dabei berücksichtigt wird.

Als Rechtfertigung für die Güte dieses Ansatzes, geht man von der folgenden Annahme aus:

Wenn eine Webseite i einen Link auf eine Webseite j enthält, dann

- gibt es eine inhaltliche Beziehung zwischen beiden Webseiten, und
- der Autor der Webseite i hält die Informationen auf Webseite j für wertvoll.

Folie 9

Es gibt verschiedene Verfahren, die Maße für die grundlegende Bedeutung einer Webseite liefern, beispielsweise das von *Google* genutzte *Page-Rank* Verfahren von Brin und Page [3] oder die *HITS* (Hypertext Induced Topic Search) Methode von Kleinberg [7].

Beide Ansätze versuchen, die in der Link-Struktur manifestierte „relative Wertschätzung“ zwischen einzelnen Webseiten in eine „grundlegende Bedeutung“ der Webseiten umzurechnen.
Details zu den beiden Verfahren finden sich in dem Buch [8].

Folie 10

Bearbeitung einer Suchanfrage:

Bei der Bearbeitung einer Suchanfrage, bei der eine Liste s von Such-Stichworten eingegeben wird, wird unter Verwendung von (A) und (B) jeder Webseite i ein Wert $\mathit{Score}(i, s)$ zugeordnet, der als *Maß für die Relevanz der Webseite i hinsichtlich der Suchanfrage s* dient.

Als Trefferliste gibt die Suchmaschine dann eine Liste aller Webseiten aus, deren Score über einer bestimmten Schranke liegt und sortiert die Liste so, dass die Webseiten mit dem höchsten Score am weitesten oben stehen.
Wie der Wert $\mathit{Score}(i, s)$ gewählt wird, ist Betriebsgeheimnis der einzelnen Betreiber von Suchmaschinen.

Im Rest dieses Kapitels werden wir uns anhand des Page-Rank Verfahrens etwas genauer ansehen, wie die „grundlegende Bedeutung“ einer Webseite modelliert und berechnet werden kann.

1.3 Der Page-Rank einer Webseite

Folie 11

Der Page-Rank einer Webseite:

Der Page-Rank liefert ein Maß für die „grundlegende Bedeutung“ einer Webseite, das allein also aus der Link-Struktur des Internets bestimmt wird, ohne dass der textuelle Inhalt einer Webseite dabei berücksichtigt wird.

Wir schreiben im Folgenden $G = (V, E)$, um den *Web-Graph*en zu bezeichnen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass *die Webseiten mit den Zahlen* $1, \ldots, n$ *durchnummeriert* sind (wobei $n = |V|$ ist), und dass $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist.

Jeder Knoten von G repräsentiert eine Webseite, und jede *Kante* $(i, j) \in E$ modelliert einen *Link von Webseite i auf Webseite j.*

Für jeden Knoten $i \in V$ sei

$$a_i \ := \ \text{Aus-Grad}_G(i) \ = \ |\{j \in V \ : \ (i,j) \in E\}|$$

der *Ausgangsgrad von i in G*. D.h. a_i ist die Anzahl der Hyperlinks, die von der Webseite i auf andere Webseiten verweisen.

Folie 12

Für eine Webseite $j \in V$ schreiben wir $\text{Vor}_G(j)$, um die Menge aller Webseiten zu bezeichnen, die einen Link auf j enthalten, d.h.

$$\text{Vor}_G(j) \ = \ \{i \in V \ : \ (i,j) \in E\}.$$

Die Elemente in $\text{Vor}_G(j)$ werden *Vorgänger* von j genannt.

Folie 13

Die „grundlegende Bedeutung“ einer Webseite i wird im Folgenden durch eine Zahl PR_i modelliert, dem so genannten *Page-Rank* von i.

Der Wert PR_i soll die Qualität (im Sinne von „Renommee“ oder „Ansehen“) von Webseite i widerspiegeln; die Zahl PR_i soll umso größer sein, je höher das Renommee der Webseite i ist.

Das Renommee (und damit der Wert PR_j) einer Webseite j wird als hoch bewertet, wenn viele Webseiten i mit hohem Page-Rank PR_i einen Link auf die Seite j enthalten.

Folie 14

Die Werte PR_i, die allen Webseiten $i \in V$ zugeordnet werden, werden daher so gewählt, dass Folgendes gilt:

> *Eine Webseite i mit a_i ausgehenden Links „vererbt“ ihren Page-Rank an jede Webseite j mit $(i,j) \in E$ um den Anteil $\frac{\mathsf{PR}_i}{a_i}$.*

Mit dieser Sichtweise müsste also für alle $j \in V$ mit $\text{Vor}_G(j) \neq \emptyset$ gelten:

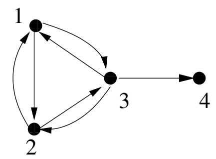
$$\mathsf{PR}_j \ = \sum_{i \in \text{Vor}_G(j)} \frac{\mathsf{PR}_i}{a_i}. \tag{1.1}$$

Folie 15

Ein Problem:

Ein Problem stellen hierbei Knoten dar, deren Ausgangsgrad 0 ist, da solche Knoten ihren Page-Rank nicht an andere Knoten weitervererben und daher zu Werten PR_i führen können, die kein sinnvolles Maß für die Bedeutung einer Webseite liefern.

Als Beispiel betrachte man den folgenden Graphen $G = (V, E)$:



Frage: Welche Werte $\mathsf{PR}_1, \mathsf{PR}_2, \mathsf{PR}_3, \mathsf{PR}_4 \in \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung (1.1) ?

Antwort: Die einzigen Werte $\mathsf{PR}_1, \mathsf{PR}_2, \mathsf{PR}_3, \mathsf{PR}_4 \in \mathbb{R}$, die die Gleichung (1.1) erfüllen, sind $\mathsf{PR}_1 = \mathsf{PR}_2 = \mathsf{PR}_3 = \mathsf{PR}_4 = 0$.
Diese Werte spiegeln aber nicht die intuitive „grundlegende Bedeutung“ wider, die man den Webseiten 1, 2, 3 und 4 zuordnen würde!

Folie 16

Im Folgenden werden *Knoten vom Ausgangsgrad 0* auch *Senken* genannt.

Zur Bestimmung des Page-Ranks betrachtet man in der Regel nur *Graphen ohne Senken*, d.h. gerichtete Graphen, bei denen jeder Knoten einen Ausgangsgrad $\geqslant 1$ hat.

Natürlich gibt es keine Garantie, dass der Web-Graph keine Senken besitzt. Die Autoren von [3, 11] schlagen zwei Möglichkeiten vor, den Web-Graphen in einen Graphen ohne Senken zu transformieren:

- Die eine Möglichkeit ist, von jeder Senke Kanten zu *allen* Knoten hinzuzufügen.
- Die andere Möglichkeit ist, alle Senken zu löschen und dies rekursiv so lange zu tun, bis ein Graph übrig bleibt, der keine Senke besitzt.

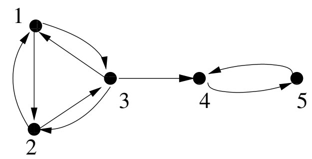
Wir nehmen im Folgenden an, dass eine dieser beiden Transformationen durchgeführt wurde und dass der Web-Graph durch einen endlichen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ repräsentiert wird, der keine Senke besitzt.

Folie 17

Ein weiteres Problem:

Ein weiteres Problem stellen Knotenmengen dar, die unter sich zwar verbunden sind, die aber keine Kante zu einem anderen Knoten des Graphen G enthalten.

Als einfaches Beispiel betrachten wir den folgenden Graphen $G = (V, E)$:



Frage: Welche Werte $\mathsf{PR}_1, \mathsf{PR}_2, \mathsf{PR}_3, \mathsf{PR}_4, \mathsf{PR}_5 \in \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung (1.1) ?

Antwort: Man kann sich leicht davon überzeugen, dass Werte $\mathsf{PR}_1, \mathsf{PR}_2, \mathsf{PR}_3, \mathsf{PR}_4, \mathsf{PR}_5 \in \mathbb{R}$ genau dann die Gleichung (1.1) erfüllen, wenn $\mathsf{PR}_1 = \mathsf{PR}_2 = \mathsf{PR}_3 = 0$ und $\mathsf{PR}_4 = \mathsf{PR}_5$ ist.
Insbesondere kann für $\mathsf{PR}_4 = \mathsf{PR}_5$ jede beliebige Zahl gewählt werden!

Ähnlich wie im vorherigen Beispiel spiegeln diese Werte nicht die intuitive „grundlegende Bedeutung“ wider, die man den Webseiten 1–5 zuordnen würde!

D.h. die durch die Gleichung (1.1) gegebenen Werte $\mathsf{PR}_1, \ldots, \mathsf{PR}_5$ liefern kein sinnvolles Maß, um die grundlegende Bedeutung der einzelnen Webseiten zu bewerten.

Folie 18

Der Dämpfungsfaktor:

Um dieses Problem zu vermeiden, wird die Vererbung von PR_i auf die Nachfolgeseiten j mit $(i, j) \in E$ meistens um einen *Dämpfungsfaktor* d mit $0 \leqslant d \leqslant 1$ abgeschwächt.

Dies wird in der folgenden Definition präzisiert.

Folie 19

Die Page-Rank-Eigenschaft:

Definition 1.1 (Page-Rank-Eigenschaft).

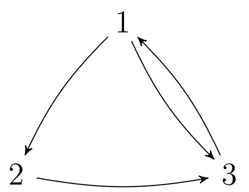
Sei d eine reelle Zahl mit $0 \leqslant d \leqslant 1$. Die Zahl d wird im Folgenden *Dämpfungsfaktor* genannt.
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, der keine Senke besitzt, und sei $n := |V| \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und $V = \{1, \ldots, n\}$.
Für alle $i, j \in V$ sei $a_i := \text{Aus-Grad}_G(i)$ und $\text{Vor}_G(j) := \{i \in V \ : \ (i, j) \in E\}$. Ein Tupel $\mathsf{PR} = (\mathsf{PR}_1, \ldots, \mathsf{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ hat die *Page-Rank-Eigenschaft bezüglich d*, wenn für alle $j \in V$ gilt:

$$\mathsf{PR}_j \quad = \quad \frac{1-d}{n} \quad + \ d \cdot \sum_{i \in \text{Vor}_G(j)} \frac{\mathsf{PR}_i}{a_i}. \tag{1.2}$$

Beachte. Für den Dämpfungsfaktor $d = 1$ erhält man gerade die Gleichung (1.1).
Für den Dämpfungsfaktor $d = 0$ ist $\mathsf{PR}_1 = \mathsf{PR}_2 = \ldots = \mathsf{PR}_n = \frac{1}{n}$.
In [3] wird empfohlen, den Wert $d = 0.85 = \frac{17}{20}$ zu wählen.

Folie 20

Beispiel 1.2. Zur Veranschaulichung der Page-Rank-Eigenschaft betrachten wir den Dämpfungsfaktor $d := \frac{1}{2}$ und den folgenden Graphen $G = (V, E)$:



Wir suchen ein Tupel $\mathsf{PR} = (\mathsf{PR}_1, \mathsf{PR}_2, \mathsf{PR}_3)$ von reellen Zahlen, das die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. $d = \frac{1}{2}$ hat, d.h. es gilt:

(1) $\quad \mathsf{PR}_1 = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathsf{PR}_3}{1}$

(2) $\quad \mathsf{PR}_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathsf{PR}_1}{2}$

(3) $\quad \mathsf{PR}_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mathsf{PR}_1}{2} + \frac{\mathsf{PR}_2}{1} \right).$

Die Werte PR_1, PR_2 und PR_3 können wir daher finden, indem wir das Lineare Gleichungssystem lösen, das aus den folgenden drei Gleichungen besteht:

Folie 21

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad 1 \cdot \mathsf{PR}_1 \; - \; \tfrac{1}{2} \cdot \mathsf{PR}_3 \; = \; \tfrac{1}{6} \\
&(2) \quad -\tfrac{1}{4} \cdot \mathsf{PR}_1 \; + \; 1 \cdot \mathsf{PR}_2 \; = \; \tfrac{1}{6} \\
&(3) \quad -\tfrac{1}{4} \cdot \mathsf{PR}_1 \; - \; \tfrac{1}{2} \cdot \mathsf{PR}_2 \; + \; 1 \cdot \mathsf{PR}_3 \; = \; \tfrac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Die Auflösung dieses linearen Gleichungssystems (z.B. mittels *Gauß-Elimination*) liefert die Werte

$$
\mathsf{PR}_1 = \tfrac{14}{39}, \quad \mathsf{PR}_2 = \tfrac{10}{39}, \quad \mathsf{PR}_3 = \tfrac{15}{39}.
$$

$\square$Ende Beispiel 1.2

Folie 22

Auf die gleiche Art wie in diesem Beispiel erhält man auch für den Web-Graphen und einen geeigneten Dämpfungsfaktor d ein entsprechendes lineares Gleichungssystem.

Um den Page-Rank der einzelnen Webseiten zu berechnen, müssen wir „nur" dieses lineare Gleichungssystem lösen.

Folie 23

Dabei stellen sich folgende Probleme:

(1) Zunächst ist völlig unklar, ob dieses lineare Gleichungssystem überhaupt eine Lösung besitzt, und falls ja, ob die Lösung eindeutig ist.

Anhand von Definition 1.1 ist nämlich prinzipiell auch denkbar, dass es gar kein Tupel gibt, das die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d hat, oder dass es mehrere verschiedene Tupel gibt, die die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d besitzen.

(2) Das lineare Gleichungssystem hat n Unbekannte, wobei n die Anzahl der Webseiten im Internet ist — und diese Zahl ist enorm groß.

Um den Page-Rank aller Webseiten zu bestimmen, benötigen wir daher ein extrem effizientes Verfahren zum Lösen dieses linearen Gleichungssystems.

Im Rest des Kapitels werden wir sehen, dass die Theorie der *Markov-Ketten* uns hilft, diese Probleme zu lösen. Dazu ist die im folgenden Abschnitt dargestellte Sichtweise auf den Page-Rank sehr hilfreich.

1.4 Der Zufalls-Surfer

Folie 24

Der Zufalls-Surfer:

Wir nehmen an, dass der Webgraph durch einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$ repräsentiert wird, der keine Senke besitzt. Des Weiteren sei d eine beliebige reelle Zahl mit $0 \leqslant d \leqslant 1$.

Wir betrachten einen *Zufalls-Surfer* (englisch: *random surfer*), der auf einer beliebigen Webseite beginnt und beliebige Links verfolgt, ohne dabei auf Inhalte zu achten.

Wenn der Zufalls-Surfer auf einer Webseite i ist, so wählt er

- mit Wahrscheinlichkeit d einen Link, der von Seite i ausgeht.

  Hierbei wird dann jeder der $a_i = \text{Aus-Grad}_G(i)$ ausgehenden Links mit derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{d}{a_i}$ ausgewählt.

- mit Wahrscheinlichkeit $(1 - d)$ eine *beliebige* Webseite im Web-Graphen.

  Hierbei wird dann jede der n Webseiten mit derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{1-d}{n}$ ausgewählt.

Folie 25

Für alle $i, j \in V$ gibt daher

$$p_{i,j} \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1-d}{n} + \dfrac{d}{a_i} & \text{, falls } (i,j) \in E \\[2ex] \dfrac{1-d}{n} & \text{, falls } (i,j) \notin E \end{cases} \tag{1.3}$$

die Wahrscheinlichkeit an, mit der der Zufalls-Surfer in einem Schritt von Seite i zu Seite j wechselt.

Diese Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich der Zufalls-Surfer von Knoten zu Knoten bewegt, lassen sich kompakt durch die folgende Matrix darstellen.

Folie 26

Die Page-Rank-Matrix $P(G, d)$

Definition 1.3 (Die Page-Rank-Matrix $P(G, d)$)**.**
Sei $d \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant d \leqslant 1$, sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ ein gerichteter Graph ohne Senke. Für jedes $i \in V$ sei $a_i := \text{Aus-Grad}_G(i)$.

Die *Page-Rank-Matrix* ist die $n{\times}n$-Matrix

$$P(G, d) \ := \ \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix},$$

wobei für alle $i, j \in V$ der Eintrag in Zeile i und Spalte j der in Gleichung (1.3) festgelegte Wert $p_{i,j}$ ist.

Wir schreiben auch kurz $(p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$, um die Matrix $P(G, d)$ zu bezeichnen.

Folie 27

Beispiel 1.4. Für den Wert $d = \frac{1}{2}$ und den Graphen G aus Beispiel 1.2 ist beispielsweise $p_{1,1} = \frac{1}{6}$, $p_{1,2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$, $p_{2,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ und insgesamt

$$P(G, d) \ = \ \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$\square$Ende Beispiel 1.4

Folie 28

Zur Erinnerung: Vektor-Matrix-Produkt

Um den Zusammenhang zwischen dem Zufalls-Surfer, der Page-Rank-Matrix und Tupeln mit der Page-Rank-Eigenschaft beschreiben zu können, benötigen wir folgende Notation für das Rechnen mit Matrizen.

Zur Erinnerung (Vektor-Matrix-Produkt).
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, und für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $p_{i,j}$ eine reelle Zahl. Sei $P := (p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ die $n{\times}n$-Matrix, die in Zeile i und Spalte j den Eintrag $p_{i,j}$ hat (für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$).

Ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein Tupel aus n reellen Zahlen, so ist das *Vektor-Matrix-Produkt*

$$X \cdot P$$

das Tupel $Y = (Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathbb{R}^n$, bei dem für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$Y_j \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot p_{i,j}.$$

Folie 29

Zusammenhang zwischen Page-Rank-Matrix und Page-Rank-Eigenschaft

Der folgende Satz beschreibt den genauen Zusammenhang zwischen Zufalls-Surfer, Page-Rank-Matrix und Tupeln mit der Page-Rank-Eigenschaft.

Satz 1.5. *Sei $d \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant d < 1$, sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$, der keine Senke besitzt. Dann gilt:*

(a) Ist $\mathsf{PR} = (\mathsf{PR}_1, \ldots, \mathsf{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Tupel, das die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d besitzt, so ist $\sum_{i=1}^{n} \mathsf{PR}_i = 1$.

(b) Für jedes Tupel $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$ gilt: X besitzt die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d $\iff$ $X \cdot P(G, d) \;=\; X$.

Beweis. (a) Sei $\mathsf{PR} = (\mathsf{PR}_1, \ldots, \mathsf{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Tupel, das die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d besitzt. D.h. es gilt[2] f.a. $j \in \{1, \ldots, n\}$, dass

$$\mathsf{PR}_j \;=\; \tfrac{1-d}{n} \;+\; d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i}.$$

[2] Wir schreiben kurz „f.a.“ für „für alle“, „s.d.“ für „so dass“ und „ex.“ für „es existiert“.

Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} \mathsf{PR}_j \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n} \Big(\tfrac{1-d}{n} \; + \; d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i} \Big) \quad = \quad n \cdot \tfrac{1-d}{n} \; + \; d \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i} \\
= \quad & (1-d) \; + \; d \cdot \sum_{(i,j) \in E} \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i} \quad = \quad (1-d) \; + \; d \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:(i,j) \in E} \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i} \\
\overset{\substack{G \text{ ohne} \\ \text{Senke}}}{=} \quad & (1-d) \; + \; d \cdot \sum_{i=1}^{n} \big(a_i \cdot \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i} \big) \quad = \quad (1-d) \; + \; d \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathsf{PR}_i \\
= \quad & (1-d) \; + \; d \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathsf{PR}_j .
\end{aligned}
$$

Insbesondere gilt also:

$$
(1-d) \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathsf{PR}_j \quad = \quad (1-d). \qquad (*)
$$

Wegen $d \neq 1$ ist $(1-d) \neq 0$, und daher erhalten wir aus Gleichung $(*)$, dass $\sum_{j=1}^{n} \mathsf{PR}_j = 1$ ist. Dies schließt den Beweis von Teil (a) ab.

(b) Sei $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$. Sei $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ so dass $X \cdot P(G, d) = Y$. Dann gilt gemäß der Definition des Vektor-Matrix-Produkts und Definition 1.3 für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$, dass

$$
\begin{aligned}
Y_j \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot p_{i,j} \quad & \overset{(1.3)}{=} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \frac{1-d}{n} \quad + \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} X_i \cdot \frac{d}{a_i} \\
& = \quad \frac{1-d}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \quad + \quad d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \frac{X_i}{a_i} \\
& \overset{\sum_{i=1}^{n} X_i = 1}{=} \quad \frac{1-d}{n} \quad + \quad d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \frac{X_i}{a_i} \; ,
\end{aligned}
$$

d.h. es gilt

$$
Y_j \quad = \quad \frac{1-d}{n} \quad + \quad d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \frac{X_i}{a_i} \; . \qquad (**)
$$

Aus Definition 1.1 zusammen mit Gleichung (∗∗) folgt:

$$\begin{array}{rl} & X \text{ besitzt die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. } d \\ \Longleftrightarrow & \text{f.a. } j \in \{1,\ldots,n\} \text{ gilt: } X_j = Y_j \\ \Longleftrightarrow & X \cdot P(G,d) \;=\; X. \end{array}$$

□

Folie 30

Beachte. Für den Beweis von Satz 1.5 (a) ist wichtig, dass $d \neq 1$ ist und dass G keine Senke besitzt.

Folie 31

Linke Eigenvektoren zum Eigenwert 1

Notation 1.6 (Eigenvektor)**.**
Ein Vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)$ heißt *linker Eigenvektor zum Eigenwert* 1 der $n{\times}n$-Matrix P, falls gilt: $X \cdot P = X$ und $X \neq (0, \ldots, 0)$.

Satz 1.5 besagt also, dass ein Tupel $\mathsf{PR} = (\mathsf{PR}_1, \ldots, \mathsf{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ genau dann die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d besitzt, wenn es ein linker Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix $P(G,d)$ ist, für den $\sum_{i=1}^{n} \mathsf{PR}_i = 1$ ist.

Diese Sichtweise auf den Page-Rank sowie die in den folgenden Abschnitten vorgestellte Theorie der Markov-Ketten helfen uns, die beiden am Ende von Abschnitt 1.3 gestellten Probleme zu lösen.

1.5 Markov-Ketten

Folie 32

Markov-Ketten und stochastische Matrizen

Markov-Ketten sind nach dem russischen Mathematiker Andrei A. Markov (1856–1922) benannt. In der Literatur werden unterschiedliche Schreibweisen des Namens verwendet, z.B. Markov, Markow oder Markoff.

Definition 1.7 (Markov-Kette)**.**
Eine *(homogene) Markov-Kette* mit *Übergangsmatrix* P wird durch eine $n{\times}n$-Matrix

$$P \;=\; \big(p_{i,j}\big)_{i,j=1,\ldots,n}$$

mit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ beschrieben, für die gilt:

(1) $p_{i,j} \geqslant 0$ für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$, und

(2) für jede Zeile $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$.

Eine Matrix P, die die Eigenschaften (1) und (2) besitzt, wird auch *stochastische Matrix* genannt.

Folie 33

Der zu P gehörende Graph

Der *zu einer stochastischen Matrix P gehörende Graph* ist der gerichtete Graph mit Knotenmenge $V = \{1,\dots,n\}$, so dass für alle $i,j \in \{1,\dots n\}$ gilt:
Es gibt in G genau dann eine Kante von i nach j, wenn $p_{i,j} > 0$ ist.

Den Eintrag $p_{i,j}$ in Zeile i und Spalte j von P kann man als Wahrscheinlichkeit dafür auffassen, dass ein Zufalls-Surfer im Graphen G in einem Schritt von Knoten i zu Knoten j springt.

Folie 34

Beispiel 1.8. Sei $G = (V,E)$ ein beliebiger gerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{1,\dots,n\}$ (für $n := |V| \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$), der keine Senke besitzt. Sei d eine reelle Zahl mit $0 \leqslant d < 1$ und sei $P := P(G,d)$ die zugehörige Page-Rank-Matrix.

Gemäß der Definition von $P(G,d)$ ist $p_{i,j} > 0$ für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ (dazu beachte man, dass $0 \leqslant d < 1$ ist).

Außerdem gilt für jede Zeile $i \in \{1,\dots,n\}$, dass

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{1-d}{n} \;+\; \sum_{j\,:\,(i,j)\in E} \frac{d}{a_i} \quad \stackrel{G \text{ ohne Senke}}{=} \quad (1-d) \;+\; a_i \cdot \frac{d}{a_i} \quad = \quad 1.$$

Somit ist P eine stochastische Matrix und beschreibt daher eine Markov-Kette.
Für jedes $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gibt der Wert $p_{i,j}$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Zufalls-Surfer in einem Schritt von Webseite i zu Webseite j springt.

Da $p_{i,j} > 0$ ist, ist der zu P gehörende Graph der *vollständige gerichtete Graph* auf n Knoten, d.h. der Graph mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ und Kantenmenge $V \times V$.
Diesen Graphen bezeichnen wir im Folgenden mit $\vec{K}_n$. $\square$Ende Beispiel 1.8

Die Theorie der Markov-Ketten und der stochastischen Matrizen wurde in der Literatur gut untersucht (siehe [6, 5]).

1.6 Die effiziente Berechnung des Page-Rank

Folie 35

Um zu sehen, dass die Theorie der Markov-Ketten uns eine Lösung für die beiden am Ende von Abschnitt 1.3 gestellten Probleme zu lösen. liefert, schauen wir uns die Bewegungen des Zufalls-Surfers auf dem Web-Graphen etwas genauer an.

Für unsere Betrachtungen ist der folgendermaßen definierte Begriff einer *Verteilung* sehr nützlich.

Folie 36

Verteilungen

Definition 1.9. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.
Eine *Verteilung* auf $V = \{1, \ldots, n\}$ ist ein Tupel $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$, für das gilt:

(1) für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $X_i \geqslant 0$ und

(2) $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$.

Ist G ein gerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ und ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine Verteilung auf V, so fassen wir für jedes $i \in V$ die Zahl X_i als Wahrscheinlichkeit dafür auf, dass ein Zufalls-Surfer in G sich auf Knoten i befindet.

Folie 37

Beobachtung 1.10. *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $P = (p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine stochastische Matrix. Ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine Verteilung auf $V := \{1, \ldots, n\}$, so gibt das Tupel $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ mit*

$$X \cdot P \;=\; Y$$

Folgendes an: Wenn wir in dem zu P gehörenden Graphen für jedes $i \in V$ den Zufalls-Surfer mit Wahrscheinlichkeit X_i auf Knoten i beginnen lassen, so gibt für jedes $j \in V$ die Zahl

$$Y_j \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot p_{i,j}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Zufalls-Surfer sich nach einem Schritt auf Knoten j befindet.

Rekursiv können wir so für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Verteilung $X^{(k)} = (X_1^{(k)}, \ldots, X_n^{(k)})$ angeben, so dass für jedes $j \in V$ der Wert $X_j^{(k)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass der Zufalls-Surfer sich nach k Schritten auf Knoten j befindet. Dazu wählen wir

$$X^{(0)} \ := \ X \qquad \textit{und} \qquad X^{(k+1)} \ := \ X^{(k)} \cdot P\,, \qquad \textit{f.a. } k \in \mathbb{N}.$$

Somit gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$:
$$X^{(k)} \quad = \quad X^{(0)} \cdot \underbrace{P \cdot P \cdot \cdots \cdot P}_{k \text{ mal}} \quad = \quad X \cdot P^k.$$

Folie 38

Zur Erinnerung: Das Matrix-Produkt

Zur Erinnerung. Das Produkt $A \cdot B$ zweier $n \times n$-Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ und $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ ist die $n \times n$-Matrix $C = (c_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit

$$c_{i,j} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} \cdot b_{\ell,j}$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Für jede Zahl $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist die $n \times n$-Matrix A^k rekursiv definiert durch

$$A^1 := A \qquad \text{und} \qquad A^{k+1} := A \cdot A^k \quad (\text{für alle } k \in \mathbb{N}).$$

Wir schreiben $(A^k)_{i,j}$, um den Eintrag in Zeile i und Spalte j der Matrix A^k zu bezeichnen.

Folie 39

Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

Beobachtung 1.11. *Ist $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und ist $P = (p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine stochastische Matrix, so können wir für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ den Eintrag $(P^k)_{i,j}$ in Zeile i und Spalte j der Matrix P^k als die Wahrscheinlichkeit dafür auffassen, dass der Zufalls-Surfer auf dem zu P gehörenden Graphen innerhalb von genau k Schritten von Knoten i zu Knoten j gelangt.*

Insbesondere gilt auch für jede Zeile i, dass $\sum_{j=1}^{n}(P^k)_{i,j} = 1$.

Wegen

$$P^{k+1} \quad = \quad P^k \cdot P \quad = \quad P \cdot P^k$$

gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$:

$$(P^{k+1})_{i,j} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} (P^k)_{i,\ell} \cdot p_{\ell,j} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell} \cdot (P^k)_{\ell,j} \, .$$

Folie 40

Zur effizienten Berechnung des Page-Ranks machen wir uns zunutze, dass die durch die Page-Rank-Matrix $P(G,d)$ (für $0 \leqslant d < 1$) beschriebene Markov-Kette die folgende Eigenschaft hat. Der Beweis, dass die Matrix $P(G,d)$ tatsächlich diese Eigenschaft hat, wird am Ende dieses Abschnitts durch Satz 1.14 geliefert.

Folie 41

Ergodische Markov-Ketten

Definition 1.12 (Ergodische Markov-Ketten)**.**
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $P = (p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine stochastische Matrix.
Die durch P beschriebene Markov-Kette heißt *ergodisch*, wenn für alle Zeilen $i, i' \in \{1,\ldots,n\}$ und alle Spalten $j \in \{1,\ldots,n\}$ gilt:

Die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} (P^k)_{i,j} \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} (P^k)_{i',j}$$

existieren und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} (P^k)_{i,j} \quad = \quad \lim_{k\to\infty} (P^k)_{i',j} \quad > \quad 0.$$

Folie 42

Eigenschaften ergodischer Markov-Ketten

Beobachtung 1.13 (Eigenschaften ergodischer Markov-Ketten)**.**
Ist P eine stochastische Matrix, die eine ergodische Markov-Kette beschreibt, so gilt offensichtlicherweise Folgendes:

(1) Die Matrix

$$P' \;:=\; \Big(\lim_{k\to\infty} \big(P^k\big)_{i,j} \Big)_{i,j=1,\ldots,n} \tag{1.4}$$

ist wohldefiniert (da die Grenzwerte existieren), alle Einträge sind > 0 (da die Grenzwerte alle > 0 sind), und

(2) alle Zeilen von P' sind identisch.

Wir schreiben $p' := (p'_1, \ldots, p'_n)$, um die erste Zeile von P' zu bezeichnen.

Folie 43

Die Matrix P' sieht daher folgendermaßen aus:

$$P' \quad = \quad \begin{pmatrix} p' \\ p' \\ \vdots \\ p' \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} p'_1 \;\cdots\; p'_n \\ p'_1 \;\cdots\; p'_n \\ \vdots \\ p'_1 \;\cdots\; p'_n \end{pmatrix}.$$

Wegen Gleichung (1.4) ist $P' = \lim_{k\to\infty} \big(P^k\big)$.
Somit ist $P' \cdot P = P'$, und daher gilt insbesondere

$$p' \cdot P \;=\; p' \,,$$

d.h. *p' ist ein linker Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix P.*

Da für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jede Zeile $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Summe aller Einträge der i-ten Zeile von P^k gleich 1 ist und die Grenzwertbildung mit der Bildung endlicher Summen vertauscht werden kann, ist auch die Summe aller Einträge der i-ten Zeile von P' gleich 1.
Daher ist $\sum_{i=1}^{n} p'_i = 1$, d.h. *p' ist eine Verteilung.*

Folie 44

Notation. Eine *Verteilung Y mit $Y \cdot P = Y$* wird auch *stationäre Verteilung* für P genannt.

Für jede beliebige Verteilung $X = (X_1, \ldots, X_n)$ gilt:

$$X \cdot P' \;=\; p', \tag{1.5}$$

denn für jedes $j \in V$ ist der j-te Eintrag im Tupel $X \cdot P'$ gerade die Zahl $\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot p'_j \;=\; p'_j \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \;=\; p'_j$.

Daher gilt:

(a) $p' = (p'_1, \ldots, p'_n)$ ist die ***einzige*** *stationäre Verteilung*, die P besitzt, und

(b) wenn der Zufalls-Surfer im zu P gehörenden Graphen seinen Startknoten gemäß einer beliebigen Anfangsverteilung $X = (X_1, \ldots, X_n)$ wählt und hinreichend viele Schritte macht, so ist für jedes $j \in V$ die Wahrscheinlichkeit, bei Knoten j zu landen, beliebig nah bei p'_j.

Die Wahl des Anfangsknotens ist für einen Zufalls-Surfer, der hinreichend lange surft, also egal.

Folie 45

Auf Grund der Gleichungen (1.4) und (1.5) erhalten wir:

$$p' \;\overset{(1.5)}{=}\; X \cdot P' \;\overset{(1.4)}{=}\; X \cdot \lim_{k\to\infty} P^k \;=\; \lim_{k\to\infty} \left(X \cdot P^k\right) \;=\; \lim_{k\to\infty} X^{(k)},$$

wobei $X^{(0)} := X$ und $X^{(k+1)} := X^{(k)} \cdot P$, f.a. $k \in \mathbb{N}$.

Um eine Näherung für das Tupel p' zu berechnen, können wir daher wie folgt vorgehen:

- Wir starten mit einer beliebigen Verteilung $X^{(0)} = X$ (etwa der *Gleichverteilung* $X = (\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$)
- und berechnen nacheinander für $k = 1, 2, 3$ usw. das Tupel $X^{(k+1)} := X^{(k)} \cdot P$.
- Dieser Prozess wird beendet, sobald das Tupel $X^{(k+1)}$ sich nicht mehr viel vom Tupel $X^{(k)}$ unterscheidet, d.h. sobald für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Zahl $|X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}|$ kleiner als eine vorher festgelegte Schranke ε ist (wobei $X_j^{(k+1)}$ und $X_j^{(k)}$ der Eintrag in der j-ten Komponente von $X^{(k+1)}$ bzw. $X^{(k)}$ ist).

□Beobachtung 1.13

Folie 46

Um diese Vorgehensweise für die Berechung des Page-Rank benutzen zu können, benötigen wir noch folgenden Satz.

Satz 1.14. *Ist $P = (p_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ eine stochastische Matrix mit $p_{i,j} > 0$ f.a. $i,j \in \{1,\dots,n\}$, so ist die durch P beschriebene Markov-Kette ergodisch.*

Beweis: Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jede Spalte $j \in \{1,\dots,n\}$ sei

$$m_j^{(k)} \quad := \quad \min_{i \in \{1,\dots,n\}} (P^k)_{i,j}$$

der kleinste Eintrag der j-ten Spalte von P^k, und sei

$$M_j^{(k)} \quad := \quad \max_{i \in \{1,\dots,n\}} (P^k)_{i,j}$$

der größte Eintrag der j-ten Spalte von P^k.

Behauptung 1: Für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und alle $j \in \{1,\dots,n\}$ gilt

$$m_j^{(k)} \quad \leqslant \quad m_j^{(k+1)} \qquad \text{und} \qquad M_j^{(k)} \quad \geqslant \quad M_j^{(k+1)}\,.$$

Beweis. Wegen

$$(P^{k+1})_{i,j} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell} \cdot (P^k)_{\ell,j}$$

ist

$$\begin{aligned}
m_j^{(k+1)} \quad &= \quad \min_{i \in \{1,\dots,n\}} \, (P^{k+1})_{i,j} \\
&= \quad \min_{i \in \{1,\dots,n\}} \, \Big(\sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell} \cdot (P^k)_{\ell,j} \Big) \\
&\geqslant \quad \min_{i \in \{1,\dots,n\}} \, \Big(\sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell} \cdot m_j^{(k)} \Big) \\
&= \quad m_j^{(k)} \cdot \min_{i \in \{1,\dots,n\}} \, \Big(\underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell}}_{=1} \Big) \\
&= \quad m_j^{(k)}\,.
\end{aligned}$$

Analog folgt auch, dass $M_j^{(k+1)} \leqslant M_j^{(k)}$ ist. $\square_{\text{Behauptung 1}}$

Folie 47

Gemäß Voraussetzung ist $p_{i,j} > 0$ und $p_{i,j} \leqslant 1$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Somit ist

$$a \ := \ \min_{i,j \in \{1,\dots,n\}} p_{i,j} \ > \ 0.$$

Gemäß Behauptung 1 gilt für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$0 \ < \ a \ \leqslant \ m_j^{(1)} \ \leqslant \ m_j^{(2)} \ \leqslant \ m_j^{(3)} \ \leqslant \ \cdots \tag{1.6}$$

und

$$1 \ \geqslant \ M_j^{(1)} \ \geqslant \ M_j^{(2)} \ \geqslant \ M_j^{(3)} \ \geqslant \ \cdots \, . \tag{1.7}$$

Behauptung 2: Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $\lim_{k \to \infty} \left(M_j^{(k)} - m_j^{(k)} \right) \ = \ 0.$

Bevor wir Behauptung 2 beweisen, schließen wir zunächst den Beweis von Satz 1.14 ab.

Aus (1.6) und (1.7) folgt mit Behauptung 2, dass es für jede Spalte $j \in \{1, \dots, n\}$ eine Zahl π_j gibt, so dass

$$\pi_j \ = \ \lim_{k \to \infty} m_j^{(k)} \ = \ \lim_{k \to \infty} M_j^{(k)}$$

ist, und es gilt $0 < a \leqslant \pi_j \leqslant 1$. Somit gilt für alle Zeilen $i, i' \in \{1, \dots, n\}$ und alle Spalten $j \in \{1, \dots, n\}$: Die Grenzwerte

$$\lim_{k \to \infty} (P^k)_{i,j} \qquad \text{und} \qquad \lim_{k \to \infty} (P^k)_{i',j}$$

existieren und es gilt

$$\lim_{k \to \infty} (P^k)_{i,j} \ = \ \lim_{k \to \infty} (P^k)_{i',j} \ \geqslant \ a \ > \ 0.$$

Gemäß Definition 1.12 ist die durch P beschriebene Markov-Kette also ergodisch.

Folie 48

Um den Beweis von Satz 1.14 abzuschließen, müssen wir nur noch Behauptung 2 beweisen. Die folgende Behauptung 3 liefert uns den Schlüssel zum Beweis von Behauptung 2.

Behauptung 3: Sei $a := \min_{i,j\in\{1,\dots,n\}} p_{i,j}$. Seien $i_1, i_2 \in \{1,\dots,n\}$. Sei

$$I_1 \ := \ \big\{ \ \ell \in \{1,\dots,n\} \ : \ p_{i_1,\ell} \geqslant p_{i_2,\ell} \ \big\} \quad \text{und} \quad I_2 \ := \ \{1,\dots,n\} \setminus I_1,$$

d.h. I_1 ist die Menge aller Spalten, bei denen der Eintrag in Zeile i_1 größer oder gleich dem Eintrag in Zeile i_2 ist, und I_2 ist die Menge aller Spalten, bei denen der Eintrag in Zeile i_1 echt kleiner als der Eintrag in Zeile i_2 ist. Dann gilt:

(a) $\displaystyle\sum_{\ell\in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \ \leqslant \ 1 - na.$

(b) $\displaystyle\sum_{\ell\in I_2} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \ = \ -\sum_{\ell\in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big).$

(c) $(P^{k+1})_{i_1,j} - (P^{k+1})_{i_2,j} \ \leqslant \ (1-na)\cdot\big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big)$, für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und $j \in \{1,\dots,n\}$.

Beweis.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell\in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \quad &= \quad \sum_{\ell\in I_1} p_{i_1,\ell} \ - \ \sum_{\ell\in I_1} p_{i_2,\ell} \\
&\overset{P \text{ stochastisch}}{=} \quad \Big(1 \ - \ \sum_{\ell\in I_2} p_{i_1,\ell}\Big) \ - \ \sum_{\ell\in I_1} p_{i_2,\ell} \\
&= \quad 1 \ - \ \Big(\ \sum_{\ell\in I_2} \underbrace{p_{i_1,\ell}}_{\geqslant a} \ + \ \sum_{\ell\in I_1} \underbrace{p_{i_2,\ell}}_{\geqslant a} \ \Big) \\
&\leqslant \quad 1 - na\,.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell\in I_2} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \quad &= \quad \sum_{\ell\in I_2} p_{i_1,\ell} \ - \ \sum_{\ell\in I_2} p_{i_2,\ell} \\
&\overset{P \text{ stochastisch}}{=} \quad \Big(1 \ - \ \sum_{\ell\in I_1} p_{i_1,\ell}\Big) \ - \ \Big(1 \ - \ \sum_{\ell\in I_1} p_{i_2,\ell}\Big) \\
&= \quad - \sum_{\ell\in I_1} p_{i_1,\ell} \ + \ \sum_{\ell\in I_1} p_{i_2,\ell} \\
&= \quad - \sum_{\ell\in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big)\,.
\end{aligned}$$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt:

$$\begin{array}{cl}
 & (P^{k+1})_{i_1,j} - (P^{k+1})_{i_2,j} \\
\overset{P^{k+1}=P\cdot P^k}{=} & \sum_{\ell=1}^{n} p_{i_1,\ell} \cdot (P^k)_{\ell,j} \quad - \quad \sum_{\ell=1}^{n} p_{i_2,\ell} \cdot (P^k)_{\ell,j} \\
= & \sum_{\ell=1}^{n} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \cdot (P^k)_{\ell,j} \\
= & \sum_{\ell \in I_1} \underbrace{\big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big)}_{\geqslant 0} \cdot \underbrace{(P^k)_{\ell,j}}_{\leqslant M_j^{(k)}} \quad + \quad \sum_{\ell \in I_2} \underbrace{\big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big)}_{<0} \cdot \underbrace{(P^k)_{\ell,j}}_{\geqslant m_j^{(k)}} \\
\leqslant & \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \cdot M_j^{(k)} \quad + \quad \sum_{\ell \in I_2} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \cdot m_j^{(k)} \\
= & M_j^{(k)} \cdot \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \quad + \quad m_j^{(k)} \cdot \sum_{\ell \in I_2} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \\
\overset{(b)}{=} & M_j^{(k)} \cdot \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \quad - \quad m_j^{(k)} \cdot \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \\
= & \big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big) \cdot \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \\
\overset{(a)}{\leqslant} & \big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big) \cdot (1 - na)\,.
\end{array}$$

$\square_{\text{Behauptung 3}}$

Unter Verwendung von Teil (c) von Behauptung 3 können wir nun Behauptung 2 beweisen.

Beweis von Behauptung 2:
Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig gewählt. Gemäß Behauptung 3(c) gilt für alle Zeilen $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, dass

$$(P^{k+1})_{i_1,j} \; - \; (P^{k+1})_{i_2,j} \quad \leqslant \quad (1 - na) \cdot \big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big)\,.$$

Speziell für die Zeile i_1 mit $(P^{k+1})_{i_1,j} = M_j^{(k+1)}$ und die Zeile i_2 mit $(P^{k+1})_{i_2,j} = m_j^{(k+1)}$ besagt dies, dass

$$M_j^{(k+1)} \; - \; m_j^{(k+1)} \quad \leqslant \quad (1 - na) \cdot \big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big)\,.$$

Da diese Ungleichung für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} M_j^{(k+1)} - m_j^{(k+1)} &\leqslant (1-na) \cdot \big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big) \\ &\leqslant (1-na)^2 \cdot \big(M_j^{(k-1)} - m_j^{(k-1)}\big) \\ &\leqslant (1-na)^3 \cdot \big(M_j^{(k-2)} - m_j^{(k-2)}\big) \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant (1-na)^k \cdot \big(M_j^{(1)} - m_j^{(1)}\big)\,. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\big(M_j^{(1)} - m_j^{(1)}\big)$ die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Eintrag der j-ten Spalte von P, also eine Zahl zwischen 0 und 1. Außerdem ist a der kleinste Eintrag in P. Für die Zeile i, in der der Eintrag a steht, gilt daher: $na \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell} = 1$. Somit gilt $0 < na \leqslant 1$, und daher

$$0 \leqslant (1-na) < 1\,.$$

Somit ist

$$\lim_{k\to\infty} (1-na)^k = 0\,,$$

und es folgt:

$$\lim_{k\to\infty} \big(M_j^{(k+1)} - m_j^{(k+1)}\big) = \lim_{k\to\infty} (1-na)^k \cdot \big(M_j^{(1)} - m_j^{(1)}\big) = 0\,.$$

$\square$Behauptung 2

Insgesamt ist nun Satz 1.14 bewiesen. $\square$Satz 1.14

Folie 49

Lösung der beiden Hauptprobleme

Folgerung 1.15 (Lösung der Probleme (1) und (2) auf Seite 14)**.**
Sei $P := P(G,d)$ die Page-Rank-Matrix für einen Dämpfungsfaktor d mit $0 \leqslant d < 1$ und einen gerichteten Graphen $G = (V,E)$ ohne Senke.

Wegen $d \neq 1$ sind alle Einträge in P echt größer als 0.

Mit Satz 1.14 erhalten wir, dass P ergodisch ist.

Aus Beobachtung 1.13 folgt, dass die stationäre Verteilung p' von P das eindeutig festgelegte Tupel ist, das die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d besitzt.

Das am Ende von Beobachtung 1.13 beschriebene Vorgehen liefert ein Verfahren, um eine Näherung für das Tupel p' zu berechnen:

- *Sei $P := P(G, d)$ die Page-Rank-Matrix für den Dämpfungsfaktor $d := 0,85$, wobei G der Senken-freie Graph ist, der aus dem Web-Graphen durch wiederholtes Löschen von Senken entsteht.*
- *Starte mit einer beliebigen Verteilung $X^{(0)} = (X_1, \ldots, X_n)$ (z.B. $X^{(0)} := (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$).*
- *Für $k := 1, 2, \ldots$ berechne $X^{(k+1)} := X^{(k)} \cdot P$.*

Folie 50

Aus der Theorie der Markov-Ketten und den speziellen Eigenschaften der Page-Rank-Matrix ergibt sich, dass auf Grund des hohen Zusammenhangs des Web-Graphen die Folge der Tupel $X^{(k)}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ sehr schnell gegen die stationäre Verteilung p' konvergiert. Details dazu finden sich in [8, 6].

Laut Kapitel 5 des Buchs [9] reichen in der Praxis i.d.R. 50–75 Iterationen aus, so dass die Einträge des Vektors $X^{(k)}$ für $k = 75$ eine hinreichend gute Näherung für die Page-Ranks der einzelnen Webseiten sind.

1.7 Praktische Aspekte der Berechnung des Page-Ranks

Folie 51

In der Praxis werden mehrere Tausend PCs eingesetzt, die mehrere Stunden zur Berechnung des Page-Ranks benötigen — was in Anbetracht der Tatsache, dass es mehrere Milliarden Webseiten gibt, erstaunlich gering ist.

Kompakte Speicherung der Page-Rank-Matrix

Folie 52

Für den Web-Graphen müssen wir davon ausgehen, dass die Anzahl n der Knoten extrem groß ist ($n \geqslant 10^{12}$), so dass es nicht ratsam ist, alle n^2 Einträge der Page-Rank-Matrix $P := P(G, d)$ abzuspeichern. Zur kompakten Speicherung von P wird ausgenutzt, dass P viele identische Einträge der Form $\frac{1-d}{n}$ hat. Jede Zeile i von P sieht wie folgt aus:

- In jeder Spalte j mit $(i, j) \notin E$ steht der Wert $\frac{1-d}{n}$.
- In jeder Spalte j mit $(i, j) \in E$ steht der Wert $p_{i,j} = \frac{1-d}{n} + \frac{d}{a_i}$. Die Anzahl dieser Spalten j ist i.d.R. sehr klein (in der Größenordung 10–50), da jede einzelne Webseite i i.d.R. nur recht wenige Links enthält.

Folie 53

Eine kompakte Repräsentation, aus der wir für gegebenes i und j die Zahl $p_{i,j}$ leicht ausrechnen können, speichert folgende Werte:[3]

- Die Werte d und $\frac{1-d}{n}$, und
- für jede Zeile $i \in \{1, \dots, n\}$
  (i.1): den Aus-Grad a_i des Knotens i und
  (i.2): die Liste aller Knoten j mit $(i, j) \in E$.

Der dafür benötigte Speicherplatz ist

$$O(1) \;+\; \sum_{i=1}^{n} \big(O(1) + O(a_i)\big) \quad = \quad O(|V| + |E|) \quad = \quad O(|G|)$$

Für den Web-Graphen G können wir davon ausgehen, dass die Knoten einen recht geringen Aus-Grad haben (in der Größenordnung 10 bis 50) und dass daher $|G| = O(|V|)$ ist, wobei der durch die O-Notation unterdrückte konstante Faktor ebenfalls in der Größenordnung 10 bis 50 liegt.

Parallelisierte Berechnung des Vektor-Matrix-Produkts

Folie 54

In jedem der $k \approx 75$ Iterationsschritte der Page-Rank-Berechnung muss für die Page-Rank-Matrix P und den Vektor $X^{(k)}$ das Vektor-Matrix-Produkt $X^{(k+1)} := X^{(k)} \cdot P$ berechnet werden. Wir betrachten nun, wie man einen einzelnen Iterationsschritt auf einem Rechnercluster durchführen kann und schreiben dabei $Y = (y_1, \dots, y_n)$, um den Vektor $X^{(k)}$ zu bezeichnen, und $Y' = (y'_1, \dots, y'_n)$ um den gesuchten Vektor $X^{(k+1)} := X^{(k)} \cdot P$ zu bezeichnen.

Folie 55

Erster Ansatz:

Wir gehen davon aus, dass für eine Zahl $L \geqslant 1$ im Rechnercluster L Rechner $R_1, \dots, R_L$ zur Verfügung stehen. Die Matrix P teilen wir auf in L vertikale

[3] Diese Repräsentation ist eine um die Werte d, $\frac{1-d}{n}$ und a_i angereichterte Adjazenzliste des Web-Graphen G.

Streifen $P_1, \ldots, P_L$, so dass der Streifen P_1 die ersten $\frac{n}{L}$ Spalten von P enthält, der Streifen P_2 die nächsten $\frac{n}{L}$ Spalten von P enthält usw. Somit ist

$$P \quad = \quad \begin{pmatrix} P_1 \; P_2 \; \cdots \; P_L \end{pmatrix}$$

wobei P_s für jedes $s \in \{1, \ldots, L\}$ eine $(n \times \frac{n}{L})$-Matrix ist.
Wir verteilen nun die Page-Rank-Matrix P und den Eingabe-Vektor Y so im Rechnercluster, dass für jedes $s \in \{1, \ldots, \ell\}$ der Rechner R_s den Streifen P_s und den gesamten Vektor Y zur Verfügung hat.
Der Rechner R_s berechnet dann das Vektor-Matrix-Produkt $Z_s := Y \cdot P_s$.

Dann gilt: Für jedes $s \in \{1, \ldots, L\}$ ist Z_s ein Vektor der Länge $\frac{n}{L}$; und der gesuchte Vektor $Y' = Y \cdot P$ ist gerade der Vektor $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_L)$.

Folie 56

Nachteil: In der am Anfang von Abschnitt 1.7 dargestellten kompakten Repräsentation von P werden die Einträge der Page-Rank-Matrix allerdings *zeilenweise* gespeichert. Durch das Bilden von vertikalen Streifen der Matrix P können die Vorteile der kompakten Speicherung zu Nichte gemacht werden (im Extremfall besteht jeder Streifen aus genau einer Spalte von P).

Folie 57

Zweiter Ansatz:

Wir gehen davon aus, dass für eine Zahl $L = \ell^2$ im Rechencluster L Rechner $R_{s,t}$ für $s, t \in \{1, \ldots, \ell\}$ zur Verfügung stehen. Die Matrix P teilen wir auf in ℓ^2 Blöcke $B_{s,t}$, so dass $B_{s,t}$ für jedes $s, t \in \{1, \ldots, \ell\}$ eine $(\frac{n}{\ell} \times \frac{n}{\ell})$-Matrix ist. Somit ist

$$P \quad = \quad \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & \cdots & B_{1,\ell} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \cdots & B_{2,\ell} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} & \cdots & B_{3,\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{\ell,1} & B_{\ell,2} & B_{\ell,3} & \cdots & B_{\ell,\ell} \end{pmatrix}$$

Den Eingabevektor Y teilen wir auf in horizontale Streifen $Y_1, \ldots, Y_\ell$, von denen jeder die Länge $\frac{n}{\ell}$ hat, d.h.

$$Y \quad = \quad \begin{pmatrix} Y_1 & Y_3 & Y_3 & \cdots & Y_\ell \end{pmatrix}$$

Wir verteilen nun die Page-Rank-Matrix P und den Eingabe-Vektor Y so im Rechencluster, dass für alle $s, t \in \{1, \ldots, \ell\}$ der Rechner $R_{s,t}$ den Block $B_{s,t}$ sowie den Streifen Y_s erhält.

Folie 58

Der Rechner $R_{s,t}$ berechnet dann das Vektor-Matrix-Produkt
$Z_{s,t} := Y_s \cdot B_{s,t}$ und schickt das Ergebnis $Z_{s,t}$ an den Rechner $R_{t,t}$ (insbesondere ist $Z_{s,t}$ ein Zeilenvektor der Länge $\frac{n}{\ell}$).
Der Rechner $R_{t,t}$ nimmt die Zwischenergebnisse $Z_{1,t}$, $Z_{2,t}$, $\ldots$, $Z_{\ell,t}$ entgegen und berechnet deren Summe

$$Z_t \quad := \quad Z_{1,t} + Z_{2,t} + Z_{3,t} + \cdots + Z_{\ell,t}$$

Dann gilt: Für jedes $t \in \{1, \ldots, \ell\}$ ist Z_t ein Vektor der Länge $\frac{n}{\ell}$; und der gesuchte Vektor $Y' = Y \cdot P$ ist gerade der Vektor $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_\ell)$.

Folie 59

Im nächsten Iterationsschritt spielt dieser Vektor Y' die Rolle, die bisher der Vektor Y gespielt hat. Um die einzelnen Streifen von Y' an die richtigen Rechner zu verteilen, schickt (für jedes $t \in \{1, \ldots, \ell\}$) Rechner $R_{t,t}$ den Vektor Z_t (der im nächsten Iterationsschritt als Y_t fungiert) direkt an die Rechner $R_{t,1}$, $R_{t,2}$, $R_{t,3}$, $\ldots$, $R_{t,\ell}$.

Folie 60

Vorteil: Jeder Block $B_{s,t}$ der Page-Rank-Matrix kann ähnlich wie am Anfang von Abschnitt 1.7 dargestellt relativ kompakt gespeichert werden, indem für jede Zeile i von $B_{s,t}$ unter (i.2) nur diejenigen Knoten j mit $(i, j) \in E$ aufgelistet werden, die die Spalten von $B_{s,t}$ betreffen.

Übungsaufgabe:

Arbeiten Sie die Details dazu aus, wie das Vektor-Matrix-Produkt
$Y' := Y \cdot P$ für die Page-Rank-Matrix P möglichst effizient mit Map-Reduce gelöst werden kann.

1.8 Literaturhinweise

Das Page-Rank-Verfahren wurde in der Arbeit [3] eingeführt. Zur weiteren Lektüre werden auch „Kapitel 2: Suchmaschinen“ des Vorlesungsskripts [12], „Chapter 5: Link Analysis“ des Buchs [9] und und „Chapter 5: Random Walks and Markov Chains“ des Buchs [2] empfohlen. Eine Algorithmen-orientierte Einführung in die Theorie der Markov-Ketten findet sich in dem Buch [6]. Einen Überblick über die Architektur von Suchmaschinen gibt der Artikel [1]; Details zum Page-Rank und zum HITS Verfahren finden sich in dem Buch [8] sowie in den Originalarbeiten [3, 11, 7, 4]. Als Einführung ins Thema *Information Retrieval* sei das Buch [10] empfohlen. Das Buch [5] ist ein „Klassiker“, der eine umfassende Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (und insbesondere auch ins Thema Markov-Ketten) gibt.

Viele Informationen und Literaturhinweise zum Thema *Suchmaschinen* finden sich auf der Webseite von Martin Sauerhoffs Vorlesung *Internet Algorithmen* an der TU Dortmund; siehe `http://ls2-www.cs.uni-dortmund.de/lehre/winter200910/IntAlg/`.

Ein kurzer und allgemein verständlicher Überblick über das Page-Rank Verfahren wird in dem Spiegel-Online Artikel *Wie Google mit Milliarden Unbekannten rechnet* von Holger Dambeck gegeben; siehe `http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,646448,00.html`.

Quellennachweis: Teile dieses Kapitels orientieren sich an [12].

ANHANG

Anhang A

Grundlegende Notationen

Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Zahl 0. Mit $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir die Mengen aller reellen, aller rationalen bzw. aller ganzen Zahlen. Für jede Menge M von Zahlen und jede Zahl a bezeichnet

$$M_{\geqslant a} \quad := \quad \{m \in M \ : \ m \geqslant a\}$$

die Menge aller $m \in M$ mit $m \geqslant a$. Analog schreiben wir $M_{>a}$ um die Menge $\{m \in M \ : \ m > a\}$ zu bezeichnen.
Beispielsweise bezeichnen sowohl $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ als auch $\mathbb{N}_{>0}$ die Menge $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ aller *positiven* natürlichen Zahlen, während $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen und $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge aller positiven reellen Zahlen bezeichnet.
Wir schreiben $[0,1]$ um das Intervall aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zu bezeichnen, d.h.

$$[0,1] \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

Für eine reelle Zahl x bezeichnen wir mit $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist. Analog schreiben wir $\lfloor x \rfloor$ für die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.
Als Konvention vereinbaren wir, dass für jede reelle Zahl b gilt: $b^0 = 1$.
Für positive reelle Zahlen b und x schreiben wir $\log_b x$, um den Logarithmus von x zur Basis b zu bezeichnen. D.h., $\log_b x$ ist diejenige reelle Zahl y, für die gilt: $b^y = x$. Insbesondere ist $\log_b 1 = 0$.
Zur Erinnerung: Für alle $y, y' \in \mathbb{R}$ gilt

$$b^y \cdot b^{y'} \quad = \quad b^{y+y'}.$$

Daher gilt auch für alle $x, x' \in \mathbb{R}_{>0}$, dass

$$\log_b(x \cdot x') \quad = \quad \log_b(x) + \log_b(x').$$

Wie üblich schreiben wir e, um die *Eulersche Zahl* zu bezeichnen. Zur Erinnerung: $2,7182 < e < 2,7183$.
Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ setzen wir

$$\ln x \ := \ \log_e x \quad \text{und} \quad \lg x \ := \ \log_2 x.$$

Die Zahlen $\ln x$ und $\lg x$ werden auch *natürlicher Logarithmus* und *binärer Logarithmus* von x genannt.

Anhang B

Grundlagen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

B.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Definition B.1 (Wahrscheinlichkeitsraum).
Ein *endlicher Wahrscheinlichkeitsraum* (Ω, P) besteht aus einer endlichen, nicht-leeren Menge Ω von *Ergebnissen* bzw. *Elementarereignissen*, denen *Wahrscheinlichkeiten* $\mathrm{P}(\omega) = p_\omega \in \mathbb{R}$ für jedes $\omega \in \Omega$ zugeordnet sind, so dass gilt:

$$0 \leqslant p_\omega \leqslant 1, \quad \text{für jedes } \omega \in \Omega, \qquad \text{und} \qquad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

Beispiel B.2 (2-maliger Münzwurf).
Wir werfen zwei mal hintereinander eine „faire“ Münze, d.h. eine Münze, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf „Kopf“ bzw. auf „Zahl“ landet[1] Als Wahrscheinlichkeitsraum betrachten wir dazu die Menge

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\},$$

wobei z.B. KK für das Elementarergeignis steht, dass die Münze bei beiden Würfen auf „Kopf“ landet, und ZK für das Elementarereignis steht, dass die Münze beim ersten Wurf auf „Zahl“ und beim zweiten Wurf auf „Kopf“ landet. Jedes der 4 möglichen Elementarereignisse hat hier dieselbe Wahrscheinlichkeit, d.h. für jedes $\omega \in \Omega$ ist hier $\mathrm{P}(\omega) = \frac{1}{4}$.

[1] Wir gehen davon aus, dass das Landen auf „Kopf“ bzw. „Zahl“ die einzigen möglichen Ergebnisse sind — d.h. es kann nie passieren, dass die Münze „auf dem Rand stehenbleibt“.

Definition B.3 (Ereignisse)**.**
Ein *Ereignis* ist eine Menge von Ergebnissen, d.h. eine Teilmenge von Ω.
Die *Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses $A \subseteq \Omega$ ist definiert als

$$\mathrm{P}(A) \quad := \quad \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}(\omega)\,.$$

Wir schreiben $\bar{A}$ um das *Komplement* von A zu bezeichnen, d.h. $\bar{A} := \Omega \setminus A$.

Anschaulich bedeutet die Aussage „Ereignis A tritt ein", dass wir als Ergebnis eines Zufallsexperiments ein Elementarereignis $\omega \in A$ erhalten. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(A)$.
Die Aussage „Ereignis A tritt <u>nicht</u> ein" entspricht gerade der Situation, in der wir als Ergebnis eines Zufallsexperiments ein Elementarereignis $\omega \in \bar{A}$ erhalten.

Beispiel B.4. Für den in Beispiel B.2 betrachteten Wahrscheinlichkeitsraum Ω ist z.B.

$$A \quad := \quad \{KK,\ KZ,\ ZK\}$$

das Ereignis, bei dem bei mindestens einem der beiden Münzwürfe die Münze auf „Kopf" landet. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis eintritt, ist $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{4}$.
Entsprechend ist $\bar{A} = \{ZZ\}$ das Ereignis, bei dem bei keinem der beiden Münzwürfe die Münze auf „Kopf" landet. Dieses Ereignis tritt mit Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(\bar{A}) = \frac{1}{4}$ ein.

Bemerkung B.5 (Regeln zum Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten)**.**
Man kann sich leicht davon überzeugen, dass für jeden endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) und alle Ereignisse A und B gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\bar{A}) \quad &= \quad 1 \ - \ \mathrm{P}(A)\,, \\ \mathrm{P}(A \cup B) \quad &= \quad \mathrm{P}(A) \ + \ \mathrm{P}(B) \ - \ \mathrm{P}(A \cap B)\,. \end{aligned}$$

Für $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und für beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_s \subseteq \Omega$ gilt:

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_s) \quad \leqslant \quad \sum_{i=1}^{s} \mathrm{P}(A_i)\,.$$

Hier ist $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_s)$ gerade die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eins der Ereignisse $A_1, \ldots, A_s$ eintritt, d.h. die

Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir als Ergebnis des Zufallsexperiments ein Elementarereignis $\omega \in A_1 \cup \cdots \cup A_s$ erhalten.

Sind die Ereignisse $A_1, \ldots, A_s$ paarweise disjunkt, d.h. ist $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ mit $i \neq j$, so gilt sogar

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_s) \quad = \quad \sum_{i=1}^{s} \mathrm{P}(A_i)\,.$$

B.2 Zufallsvariablen

Definition B.6 (Zufallsvariable)**.**
Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.
Eine *Zufallsvariable* ist eine Funktion

$$X : \Omega \to \mathbb{R}\,.$$

Für jede Zahl $r \in \mathbb{R}$ definieren wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable X den Wert r annimmt, durch

$$\mathrm{P}(X = r) \quad := \quad \mathrm{P}(A) \quad \text{für das Ereignis} \quad A := \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = r\}.$$

Beispiel B.7 (Münzwürfe und Zufallsvariablen)**.**
Für eine beliebige, feste Zahl $p \in [0,1]$ haben wir eine Münze zur Verfügung, die mit Wahrscheinlichkeit p auf „Kopf" und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ auf „Zahl" fällt. Für eine feste Zahl $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ werfen wir s-mal hintereinander die Münze.

Formal gesehen, betrachten also den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dessen Elementarereignisse Worte der Länge s über dem Alphabet $\{K, Z\}$ sind, d.h. $\Omega = \{K, Z\}^s$. Jedes Elementarereignis $\omega = \omega_1 \cdots \omega_s \in \Omega$ tritt mit Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(\omega) := p^k (1-p)^{s-k}$ ein, wobei k die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens K im Wort ω ist.

Für jeden Münzwurf $i \in \{1, \ldots, s\}$ betrachten wir die Zufallsvariable X_i, der wir den Wert 1 zuordnen, falls die Münze im i-ten Wurf auf „Kopf" gelandet ist, und der wir den Wert 0 zuordnen, falls die Münze im i-ten Wurf auf „Zahl" gelandet ist. Wir schreiben dafür kurz

$$X_i \ := \ \begin{cases} 1 & \text{falls die Münze im } i\text{-ten Wurf auf „Kopf" landet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und meinen damit die Zufallsvariable $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, bei der für jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$ gilt:

$$X_i(\omega) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{falls an der } i\text{-ten Position des Worts } \omega \text{ der Buchstabe } K \text{ steht} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlicherweise gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, s\}$, dass

$$\mathrm{P}(X_i = 1) \;=\; p \qquad \text{und} \qquad \mathrm{P}(X_i = 0) \;=\; 1 - p\,.$$

Zusätzlich zu den Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_s$ betrachten wir noch eine weitere Zufallsvariable X, die angeben soll, bei wie vielen der s Münzwürfe die Münze auf „Kopf“ gelandet ist. Wir schreiben dazu kurz

$$X \;:=\; \sum_{i=1}^{s} X_i$$

und meinen damit die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, bei der für jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$ gilt:[2]

$$X(\omega) \;=\; \sum_{i=1}^{s} X_i(\omega).$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass für jedes $k \in \{0, \ldots, s\}$ gilt:

$$\mathrm{P}(X = k) \;=\; \tbinom{s}{k}\; p^k\; (1-p)^{s-k}.$$

Dieser Wert gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass bei den s Münzwürfen die Münze insgesamt genau k-mal auf „Kopf“ landet.

B.3 Erwartungswert

Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Da Ω endlich ist, ist auch das *Bild* von Ω unter X, d.h. die Menge $\mathit{Bild}(X) := \{X(\omega) \;:\; \omega \in \Omega\}$ endlich.

Definition B.8 (Erwartungswert einer Zufallsvariablen)**.**
Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Der *Erwartungswert* der Zufallsvariablen X ist definiert als

$$\mathrm{E}(X) \;:=\; \sum_{r \in \mathit{Bild}(X)} r \cdot \mathrm{P}(X = r).$$

Anschaulich ist der Erwartungswert der „zu erwartende“ Wert, den wir erhalten, wenn wir das Zufallsexperiment sehr oft wiederholen und den Durchschnitt der dabei für X erhaltenen Werte berechnen.

[2] *Zur Erinnerung:* Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt an, wie viele verschiedene k-elementige Teilmengen eine n-elementige Menge besitzt. Es gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Beispiel B.9 (Erwartungswert beim Würfeln)**.**
Wir werfen einen herkömmlichen Würfel, d.h. einen Würfel, der 6 Seiten besitzt, die mit den Augenzahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind, und bei dem jede Augenzahl mit der selben Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird.
Sei X die Zufallsvariable, die die gewürfelte Augenzahl beschreibt. Der Erwartungswert von X ist

$$\mathrm{E}(X) \quad = \quad \sum_{i=1}^{6} i \cdot \mathrm{P}(X=i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{6} i \cdot \tfrac{1}{6} \quad = \quad \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{6 \cdot 7}{2} \quad = \quad \tfrac{7}{2} \quad = \quad 3{,}5\,.$$

Man beachte, dass die Zufallsvariable X^2 das Quadrat der gewürfelten Augenzahl beschreibt. Der Erwartungswert von X^2 ist

$$\mathrm{E}(X^2) \quad = \quad \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \mathrm{P}(X^2 = i^2) \quad = \quad \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \mathrm{P}(X=i) \quad = \quad \tfrac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} i^2 \quad = \quad \tfrac{91}{6} \quad = \quad 15{,}16666\cdots\,.$$

Insbesondere ist hier

$$\mathrm{E}(X^2) \quad \neq \quad \mathrm{E}(X)^2,$$

da $\mathrm{E}(X)^2 = (3{,}5)^2 = 12{,}25$ ist.

Bemerkung B.10 (Linearität des Erwartungswerts)**.**
Man kann sich leicht davon überzeugen, dass für jeden endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), für alle Zufallsvariablen X und Y und für alle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathrm{E}(aX) \quad = \quad a \cdot \mathrm{E}(X) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{E}(X+Y) \quad = \quad \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)\,.$$

Daraus folgt, dass für alle $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, alle Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_s$ und alle Zahlen $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{s} a_i X_i\Big) \quad = \quad \sum_{i=1}^{s} a_i \cdot \mathrm{E}(X_i)\,.$$

Beispiel B.11 (Erwartungswert bei Münzwürfen)**.**
Wir betrachten wieder das Szenario aus Beispiel B.7, bei dem für jedes $i \in \{1, \ldots, s\}$ die Zufallsvariable X_i angibt, ob die Münze beim i-ten Münzwurf auf „Kopf“ gelandet ist, und bei dem die Zufallsvariable $X := \sum_{i=1}^{s} X_i$ angibt, bei wie vielen der s Münzwürfe die Münze auf „Kopf“ gelandet ist. Für jedes $i \in \{1, \ldots, s\}$ hat X_i den Erwartungswert

$$\mathrm{E}(X_i) \quad = \quad 0 \cdot \mathrm{P}(X_i = 0) \; + \; 1 \cdot \mathrm{P}(X_i = 1) \quad = \quad \mathrm{P}(X_i = 1) \quad = \quad p.$$

Gemäß der Linearität des Erwartungswerts ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen $X := \sum_{i=1}^{s}$ daher der Wert

$$\mathrm{E}(X) \quad = \quad \sum_{i=1}^{s} \mathrm{E}(X_i) \quad = \quad p \cdot s.$$

Bemerkung B.12. Die in Bemerkung B.10 formulierte Linearität des Erwartungswerts besagt, dass Summen und konstante Vielfache aus der Bildung des Erwartungswerts herausgezogen werden können, so dass

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{s} a_i X_i\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{s} a_i \cdot \mathrm{E}(X_i).$$

Im Gegensatz dazu dürfen wir Produkte i.d.R. nicht einfach aus der Bildung des Erwartungswerts herausziehen. Z.B. haben wir in Beispiel B.9 eine Situation kennen gelernt, in der

$$\mathrm{E}(X \cdot X) \quad \neq \quad \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(X)$$

ist.

B.4 Varianz

Die *Varianz* ist ein Maß dafür, wie weit die tatsächlichen Werte einer Zufallsvariablen X vom Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ abweichen.

Definition B.13 (Varianz einer Zufallsvariablen)**.**
Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die *Varianz* der Zufallsvariablen X ist definiert als

$$\mathrm{Var}(X) \quad := \quad \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right).$$

Somit ist die Varianz einer Zufallsvariablen X definiert als der Erwartungswert des Quadrats der Abweichung von X zum Erwartungswert von X. Anschaulich ist die Varianz von X also der „zu erwartende" Wert, den wir erhalten, wenn wir das Zufallsexperiment sehr oft wiederholen, jeweils die Abweichung des für X erzielten Werts vom Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ berechnen, und den Durchschnitt der Quadrate dieser Abweichungen berechnen.

Bemerkung B.14 (Regeln zum Rechnen mit Varianzen)**.**
Für jede Zufallsvariable X über einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) und für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathrm{Var}(X) \quad = \quad \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}(aX + b) \quad = \quad a^2 \cdot \mathrm{Var}(X).$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &\overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{E}\Big((X - \mathrm{E}(X))^2\Big) \\
&= \mathrm{E}\Big(X^2 - 2{\cdot}\mathrm{E}(X){\cdot}X + \mathrm{E}(X)^2\Big) \\
&\overset{\text{Linearität}}{=} \mathrm{E}(X^2) - 2\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2\cdot\mathrm{E}(1) \\
&\overset{\mathrm{E}(1)=1}{=} \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(aX) &= \mathrm{E}((aX)^2) - \mathrm{E}(aX)^2 \\
&\overset{\text{Linearität}}{=} \mathrm{E}(a^2\cdot X^2) - \big(a\cdot\mathrm{E}(X)\big)^2 \\
&\overset{\text{Linearität}}{=} a^2\cdot\mathrm{E}(X^2) - a^2\cdot\mathrm{E}(X)^2 \\
&= a^2\cdot\Big(\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2\Big) \\
&= a^2\cdot\mathrm{Var}(X).
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für jede Zufallsvariable Y:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y+b) &= \mathrm{E}\Big(\big(Y + b - \underbrace{\mathrm{E}(Y+b)}_{\overset{\text{Linearität}}{=}\ \mathrm{E}(Y)+b}\ \big)^2\Big) \\
&= \mathrm{E}\Big(\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)^2\Big) \\
&= \mathrm{Var}(Y).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir daher für die Zufallsvariable $Y := aX$, dass

$$\mathrm{Var}(aX+b) \quad = \quad \mathrm{Var}(aX) \quad = \quad a^2\cdot\mathrm{Var}(X).$$

□

Beispiel B.15 (Varianz beim Würfeln)**.**
Wir betrachten das Szenario aus Beispiel B.9, bei dem die Zufallsvariable X die beim 1-maligen Werfen eines 6-seitigen Würfels erzielte Augenzahl angibt. Wir wissen bereits, dass der Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = 3,5 = \frac{7}{2}$ ist, und dass der Erwartungswert $\mathrm{E}(X^2) = \frac{91}{6}$ ist.
Die Varianz von X ist der Wert

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \tfrac{91}{6} - \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 = \tfrac{91}{6} - \tfrac{49}{4} \\
&= \tfrac{182-147}{12} = \tfrac{35}{12} = 2,916666\cdots.
\end{aligned}$$

Bemerkung B.16 (Nicht-Linearität der Varianz).
Anhand der Regel

$$\mathrm{Var}(aX+b) \quad = \quad a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$$

lässt sich leicht sehen, dass die Varianz i.d.R. *nicht* linear ist: Beispielsweise erhalten wir für $a=2$ und $b=0$, dass

$$\mathrm{Var}(X+X) \quad = \quad 4 \cdot \mathrm{Var}(X) \quad \neq \quad \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(X),$$

falls $\mathrm{Var}(X) \neq 0$.

B.5 Schranken

In diesem Abschnitt stellen wir drei Werkzeuge bereit, mit deren Hilfe wir abschätzen können, mit welcher Wahrscheinlichkeit, der Wert einer Zufallsvariablen X „weit“ vom Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ abweicht.

Folie 61

Die Markov-Ungleichung

Satz B.17 (Markov-Ungleichung).
Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ eine Zufallsvariable, die nur Werte $\geqslant 0$ annehmen kann. Für jede reelle Zahl $a > 0$ gilt:

$$\mathrm{P}(X \geqslant a) \quad \leqslant \quad \frac{\mathrm{E}(X)}{a}.$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) \quad &= \sum_{x \in Bild(X)} x \cdot \mathrm{P}(X=x) \\ &\geqslant \sum_{\substack{x \in Bild(X) \\ \text{mit} x \geqslant a}} a \cdot \mathrm{P}(X=x) \quad = \quad a \cdot \mathrm{P}(X \geqslant a). \end{aligned}$$

□

Folie 62

Bemerkung B.18. Aus der Markov-Ungleichung folgt direkt, dass

$$\mathrm{P}(X \geqslant c{\cdot}\mathrm{E}(X)) \quad \leqslant \quad \tfrac{1}{c}$$

für jede Zahl $c > 0$ gilt und für jede Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, die nur Werte $\geqslant 0$ annehmen kann und deren Erwartungswert > 0 ist.

Folie 63

Die Tschebyscheff-Ungleichung

Satz B.19 (Tschebyscheff-Ungleichung)**.**
Für jeden endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P)*, für jede Zufallsvariable* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *und für jede reelle Zahl* $a > 0$ *gilt:*

$$\mathrm{P}\Big(|X - \mathrm{E}(X)| \ \geqslant \ a\Big) \quad \leqslant \quad \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Beweis. Wir betrachten die Zufallsvariable $Y := |X - \mathrm{E}(X)|$ und wenden die Markov-Ungleichung auf die Zufallsvariable Y^2 an. Wir erhalten:

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant a) \quad = \quad \mathrm{P}(Y \geqslant a) \quad = \quad \mathrm{P}(Y^2 \geqslant a^2) \quad \overset{\text{Markov}}{\leqslant} \quad \frac{\mathrm{E}(Y^2)}{a^2}.$$

Hierbei gilt:

$$\mathrm{E}(Y^2) \quad = \quad \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) \quad \overset{\text{Def.}}{=} \quad \mathrm{Var}(X).$$

□

Folie 64

Die Chernoff-Schranke

Satz B.20 (Chernoff-Schranke)**.**
Sei p *eine reelle Zahl mit* $0 < p < 1$*. Wir werfen eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit* p *auf „Kopf" und mit Wahrscheinlichkeit* $1 - p$ *auf „Zahl" landet. Nach dem* i*-ten Münzwurf setzen wir*

$$X_i \ := \ \begin{cases} 1 & \text{falls die Münze beim } i\text{-ten Wurf auf „Kopf" gefallen ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir machen insgesamt $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ *Münzwürfe und setzen*

$$X \quad := \quad \sum_{i=1}^{s} X_i,$$

d.h. X *gibt an, bei wie vielen der* s *Münzwürfe die Münze auf „Kopf" gefallen ist. Dann gilt:*

(a) Der Erwartungswert von X *ist* $\mathrm{E}(X) = p \cdot s$*.*

(b) Für jede reelle Zahl ε mit $0 < \varepsilon < 1$ ist

$$\mathrm{P}\Big(X < (1-\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X)\Big) \quad < \quad e^{-\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2\cdot ps}.$$

(c) Für jede reelle Zahl $\beta > 0$ ist

$$\mathrm{P}\Big(X > (1+\beta)\cdot\mathrm{E}(X)\Big) \quad < \quad e^{-\frac{1}{3}\cdot\min(\beta,\beta^2)\cdot ps}.$$

(d) Für jede reelle Zahl ε mit $0 < \varepsilon < 1$ ist

$$\mathrm{P}\Big(X \notin (1\pm\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X)\Big) \quad < \quad 2\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot\varepsilon^2\cdot ps}.$$

Hierbei verwenden wir „$X \notin (1\pm\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X)$“ als Kurzschreibweise für

$$„\ X \ < \ (1-\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X) \quad \text{oder} \quad X \ > \ (1+\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X)\ “$$

Beweis.
(a): Dies haben wir bereits in Beispiel B.11 bewiesen.

(b): Wir gehen in zwei Schritten vor:

Schritt 1: Wir zeigen, dass

$$\mathrm{P}\Big(X < (1-\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X)\Big) \quad < \quad \left(\frac{e^{-\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}}\right)^{ps}.$$

Schritt 2: Wir zeigen, dass

$$(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)} \quad \geqslant \quad e^{-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Durch Kombination der beiden in Schritt 1 und Schritt 2 erzielten Ungleichungen erhält man direkt, dass (b) gilt.

Beweis von Schritt 1:
Sei t eine beliebige reelle Zahl > 0 (später werden wir für t einen konkreten Wert einsetzen, mit dem wir den Beweis dann abschließen könnnen). Da die Funktion f mit $f(x) = e^{-tx}$ streng monoton fallend ist, gilt:

$$X \ < \ (1-\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X) \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{-tX} \ > \ e^{-t\cdot(1-\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X)}.$$

Somit ist

$$\mathrm{P}(X < (1-\varepsilon)\cdot \mathrm{E}(X)) \quad = \quad \mathrm{P}(e^{-tX} \ > \ e^{-t\cdot(1-\varepsilon)\cdot \mathrm{E}(X)}).$$

Wir betrachten die Zufallsvariable $Y := e^{-tX}$. Offensichtlicherweise kann Y nur Werte $\geqslant 0$ annehmen. Auf Grund der Markov-Ungleichung gilt daher für die Zahl $a := e^{-t(1-\varepsilon)\mathrm{E}(X)} > 0$, dass

$$\mathrm{P}(Y \geqslant e^{-t(1-\varepsilon)\mathrm{E}(X)}) \quad \leqslant \quad \frac{\mathrm{E}(Y)}{e^{-t(1-\varepsilon)\mathrm{E}(X)}}.$$

Aus Teil (a) wissen wir bereits, dass $\mathrm{E}(X) = ps$ ist. Um den Beweis von Schritt 1 abzuschließen, reicht es also, ein $t > 0$ zu finden, für das gilt:

$$\frac{\mathrm{E}(Y)}{e^{-t(1-\varepsilon)ps}} \quad < \quad \Big(\frac{e^{-\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}}\Big)^{ps}. \tag{B.1}$$

Dazu berechnen wir den Erwartungswert $\mathrm{E}(Y)$.
Es ist $Y = e^{-tX}$ mit $X = \sum_{i=1}^{s} X_i$. Somit ist

$$Y \quad = \quad e^{-tX} \quad = \quad e^{\sum_{i=1}^{s} -tX_i} \quad = \quad \prod_{i=1}^{s} e^{-tX_i} \quad = \quad \prod_{i=1}^{s} Y_i,$$

wobei $Y_i := e^{-tX_i}$ für jedes $i \in \{1,\dots,s\}$ ist.
Da die $X_1,\dots,X_s$ Zufallsvariablen sind, die vollständig unabhängig voneinander sind (X_i hängt nämlich nur vom Ergebnis des i-ten Münzwurfs ab), sind auch die Zufallsvariablen $Y_1,\dots,Y_s$ vollständig unabhängig voneinander. Insbes. gilt für alle Werte $r_1,\dots,r_s$, dass $\mathrm{P}(\text{für alle } i \in \{1,\dots,s\} \text{ ist } Y_i = r_i) = \prod_{i=1}^{s} \mathrm{P}(Y_i = r_i)$ ist. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass daher gilt:

$$\mathrm{E}\Big(\prod_{i=1}^{s} Y_i\Big) \quad = \quad \prod_{i=1}^{s} \mathrm{E}(Y_i).$$

Somit ist also

$$\mathrm{E}(Y) \quad = \quad \prod_{i=1}^{s} \mathrm{E}(Y_i) \quad = \quad \prod_{i=1}^{s} \mathrm{E}(e^{-tX_i}).$$

Gemäß der Definition des Erwartungswerts einer Zufallsvariable gilt für jedes $i \in \{1,\dots,s\}$, dass

$$\mathrm{E}(e^{-tX_i}) \quad = \quad \mathrm{P}(X_i = 0)\cdot e^{-t\cdot 0} \ + \ \mathrm{P}(X_i = 1)\cdot e^{-t\cdot 1} \quad = \quad (1-p) \ + \ p\cdot e^{-t}.$$

Somit ist

$$\mathrm{E}(e^{-tX_i}) \;=\; 1+p(e^{-t}-1) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{E}(Y) \;=\; \Big(1+p(e^{-t}-1)\Big)^s.$$

Unser Ziel ist, ein $t>0$ zu finden, für das (B.1) gilt, d.h. für das gilt:

$$\frac{1}{e^{-t(1-\varepsilon)ps}} \cdot \Big(1+p(e^{-t}-1)\Big)^s \quad < \quad \Big(\frac{e^{-\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}}\Big)^{ps}.$$

Wir wählen dazu

$$t \quad := \quad -\ln(1-\varepsilon).$$

Beachte: $t>0$, da $0<1-\varepsilon<1$ ist und da $\ln(x)<0$ für alle x mit $0<x<1$ gilt. Für $t:=-\ln(1-\varepsilon)$ gilt:

$$\frac{1}{e^{-t(1-\varepsilon)ps}} \quad = \quad \Big(\frac{1}{(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}}\Big)^{ps}$$

und

$$1+p(e^{-t}-1) \quad = \quad 1-p\varepsilon.$$

Um den Beweis von Schritt 1 abzuschließen, benutzen wir Folgendes:

Fakt B.21. *Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt: $e^x > 1+x$.*

Daraus folgt insbes. für $x := -p\varepsilon$, dass $1-p\varepsilon < e^{-p\varepsilon}$.
Insgesamt erhalten wir dadurch für $t := -\ln(1-\varepsilon)$, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{-t(1-\varepsilon)ps}} \cdot \Big(1+p(e^{-t}-1)\Big)^s \quad &< \quad \Big(\frac{1}{(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}}\Big)^{ps} \cdot \Big(e^{-p\varepsilon}\Big)^s \\ &= \quad \Big(\frac{e^{-\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}}\Big)^{ps}.\end{aligned}$$

Um den Beweis von Schritt 1 abzuschließen, müssen wir nur noch beweisen, dass Fakt B.21 gilt.

Beweis von Fakt B.21:
Für alle $x \leqslant -1$ ist $1+x \leqslant 0$, während $e^y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist. Somit gilt die Aussage des Fakts für alle $x \leqslant -1$.
Um die Aussage für alle x mit $x > -1$ zu beweisen, nutzen wir die Taylor-Entwicklung der e-Funktion, gemäß der für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^y \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \quad = \quad 1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\frac{y^4}{24}+\cdots.$$

Daraus folgt direkt, dass die Aussage von Fakt B.21 für alle $x>0$ gilt.

Um die Aussage auch für alle x mit $-1 < x < 0$ zu beweisen, betrachten wir $x = -z$ für reelle Zahlen z mit $0 < z < 1$. Gemäß Taylor-Entwicklung gilt:

$$e^{-z} \quad = \quad 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} - \cdots .$$

Wegen $0 < z < 1$ ist $z^n \geqslant z^{n+1}$ für alle $n \geqslant 1$, und daher ist

$$e^{-z} \quad = \quad 1 - z + \underbrace{\Big(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\Big)}_{>0} + \underbrace{\Big(\frac{z^4}{24} - \cdots\Big)}_{\geqslant 0} + \cdots \quad > \quad 1 - z.$$

Somit gilt für alle x mit $-1 < x < 0$, dass $e^x > 1 + x$.
Dies beendet den Beweis von Fakt B.21 und somit auch den Beweis von Schritt 1.

Beweis von Schritt 2:
Da die Funktion $\ln(x)$ streng monoton wachsend ist, gilt die in Schritt 2 zu zeigende Ungleichung genau dann, wenn gilt:

$$(1-\varepsilon)\cdot\ln(1-\varepsilon) \quad \geqslant \quad -\varepsilon + \tfrac{\varepsilon^2}{2}.$$

Um zu zeigen, dass diese Ungleichung gilt, nutzen wir die Taylor-Entwicklung des natürlichen Logarithmus, gemäß der für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x \leqslant 2$ gilt:

$$\ln(x) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

Wegen $0 < 1 - \varepsilon < 1$ folgt daraus speziell für $x := (1 - \varepsilon)$, dass

$$\ln(1-\varepsilon) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\varepsilon^n}{n} \quad = \quad -\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\varepsilon^4}{4} - \cdots$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\cdot\ln(1-\varepsilon) \quad &= \quad \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\varepsilon^n}{n} \quad + \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n+1}}{n} \\
&= \quad -\varepsilon + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\Big(\frac{\varepsilon^n}{n-1} - \frac{\varepsilon^n}{n}\Big)}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant \quad -\varepsilon + \tfrac{\varepsilon^2}{2}.
\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis von Schritt 2 und insgesamt den Beweis von (b).

(c): Wir gehen in drei Schritten vor:

Schritt 1: Wir zeigen, dass

$$\mathrm{P}\Big(X > (1+\beta)\cdot\mathrm{E}(X)\Big) \quad < \quad \Big(\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{(1+\beta)}}\Big)^{ps}.$$

Schritt 2: Wir zeigen, dass für alle reellen Zahlen β mit $0 < \beta \leqslant 1$ gilt:

$$\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{(1+\beta)}} \quad \leqslant \quad e^{-\frac{1}{3}\beta^2}.$$

Schritt 3: Wir zeigen, dass für alle reellen Zahlen β mit $\beta > 1$ gilt:

$$\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{(1+\beta)}} \quad \leqslant \quad e^{-\frac{1}{3}\beta}.$$

Durch Kombination der beiden in Schritt 1 und Schritt 2 (bzw. Schritt 1 und Schritt 3) erzielten Ungleichungen erhält man direkt, dass (c) für alle β mit $0 < \beta \leqslant 1$ (bzw. $\beta > 1$) gilt.

Beweis von Schritt 1:
Wir gehen ähnlich wie im Beweis von Schritt 1 in Teil (b) vor.
Sei t eine beliebige Zahl > 0 (später werden wir für t einen konkreten Wert einsetzen, mit dem wir den Beweis abschließen können). Da die Funktion f mit $f(x) = e^{tx}$ streng monoton steigend ist, gilt:

$$X \;>\; (1+\beta)\cdot\mathrm{E}(X) \qquad \iff \qquad e^{tX} \;>\; e^{t\cdot(1+\beta)\cdot\mathrm{E}(X)}.$$

Somit ist

$$\mathrm{P}(X \;>\; (1+\beta)\cdot\mathrm{E}(X)) \quad = \quad \mathrm{P}(e^{tX} \;>\; e^{t\cdot(1+\beta)\cdot\mathrm{E}(X)}).$$

Wir betrachten die Zufallsvariable $Y := e^{tX}$, die offensichtlicherweise nur Werte $\geqslant 0$ annehmen kann. Auf Grund der Markov-Ungleichung gilt daher für die Zahl $a := e^{t(1+\beta)\mathrm{E}(X)} > 0$, dass

$$\mathrm{P}(Y \geqslant e^{t(1+\beta)\mathrm{E}(X)}) \quad \leqslant \quad \frac{\mathrm{E}(Y)}{e^{t(1+\beta)\mathrm{E}(X)}}.$$

Aus Teil (a) wissen wir bereits, dass $\mathrm{E}(X) = ps$ ist. Um den Beweis von Schritt 1 abzuschließen, reicht es also, ein $t > 0$ zu finden, für das gilt:

$$\frac{\mathrm{E}(Y)}{e^{t(1+\beta)\mathrm{E}(X)}} \quad < \quad \Big(\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{(1+\beta)}}\Big)^{ps}. \tag{B.2}$$

Dazu berechnen wir den Erwartungswert $\mathrm{E}(Y)$.
Es ist $Y = e^{tX}$ mit $X = \sum_{i=1}^{s} X_i$. Somit ist

$$Y \;=\; e^{tX} \;=\; e^{\sum_{i=1}^{s} tX_i} \;=\; \prod_{i=1}^{s} e^{tX_i} \;=\; \prod_{i=1}^{s} Y_i,$$

wobei $Y_i := e^{tX_i}$ für jedes $i \in \{1,\ldots,s\}$ ist. Auf Grund des gleichen Arguments wie im Beweis von Schritt 1 in Teil (b) gilt:

$$\mathrm{E}(Y) \;=\; \mathrm{E}\Big(\prod_{i=1}^{s} Y_i\Big) \;=\; \prod_{i=1}^{s} \mathrm{E}(Y_i) \;=\; \prod_{i=1}^{s} \mathrm{E}(e^{tX_i}).$$

Gemäß der Definition des Erwartungswerts einer Zufallsvariable gilt für jedes $i \in \{1,\ldots,s\}$, dass

$$\mathrm{E}(e^{tX_i}) \;=\; \mathrm{P}(X_i = 0)\cdot e^{t\cdot 0} \;+\; \mathrm{P}(X_i = 1)\cdot e^{t\cdot 1} \;=\; (1-p) \;+\; p\cdot e^{t}.$$

Somit ist

$$\mathrm{E}(e^{tX_i}) \;=\; 1 + p(e^t - 1) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{E}(Y) \;=\; \Big(1 + p(e^t - 1)\Big)^{s}.$$

Unser Ziel ist, ein $t > 0$ zu finden, für das (B.2) gilt, d.h. für das gilt:

$$\frac{1}{e^{t(1+\beta)ps}} \cdot \Big(1 + p(e^t - 1)\Big)^{s} \;<\; \Big(\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{(1+\beta)}}\Big)^{ps}.$$

Wir wählen dazu

$$t \;:=\; \ln(1+\beta).$$

Beachte: $t > 0$, da $1+\beta > 1$ ist und $\ln(x) > 0$ für alle $x > 1$ gilt.
Für $t := \ln(1+\beta)$ gilt:

$$\frac{1}{e^{t(1+\beta)ps}} \;=\; \Big(\frac{1}{(1+\beta)^{1+\beta}}\Big)^{ps}$$

und

$$1 + p(e^t - 1) \;=\; 1 + p\beta.$$

Gemäß Fakt B.21 ist $1 + p\beta < e^{p\beta}$. Insgesamt erhalten wir dadurch für $t := \ln(1+\beta)$, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{t(1+\beta)ps}} \cdot \Big(1 + p(e^t - 1)\Big)^{s} \;&<\; \Big(\frac{1}{(1+\beta)^{(1+\beta)}}\Big)^{ps} \cdot \Big(e^{p\beta}\Big)^{s} \\ &=\; \Big(\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{(1+\beta)}}\Big)^{ps}.\end{aligned}$$

Dies schließt den Beweis von Schritt 1 ab.

Beweis von Schritt 2:
Sei $\beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \beta \leqslant 1$. Es gilt:

$$\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{(1+\beta)}} \quad = \quad \frac{e^{\beta}}{e^{(1+\beta)\cdot\ln(1+\beta)}} \quad = \quad e^{\beta-(1+\beta)\cdot\ln(1+\beta)}.$$

Somit gilt die Aussage von Schritt 2 gilt genau dann, wenn

$$\beta - (1+\beta)\cdot\ln(1+\beta) \quad \leqslant \quad -\tfrac{1}{3}\beta^2,$$

was wiederum genau dann gilt, wenn

$$\tfrac{1}{3}\beta^2 \ + \ \beta \ - \ (1+\beta)\cdot\ln(1+\beta) \quad < \quad 0$$

ist. Um zu verstehen, für welche Werte β dies erfüllt ist, machen wir eine Kurvendiskussion für die Funktion f mit

$$f(x) \quad := \quad \tfrac{1}{3}x^2 + x - (1+x)\ln(1+x).$$

Die ersten beiden Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{2}{3}x - \ln(1+x) \\ f''(x) &= \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Es ist $f''(x) < 0$ für alle x mit $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, und $f''(x) > 0$ für alle x mit $x > \frac{1}{2}$. Somit fällt $f'(x)$ im Intervall zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ ab und steigt im Intervall zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 wieder an.
Wegen $f'(0) = 0$ und $f'(1) < 0$ ist $f'(x) \leqslant 0$ für alle x im Intervall $[0,1]$.
Somit fällt $f(x)$ im Intervall $[0,1]$ ab. Wegen $f(0) = 0$ ist also $f(x) \leqslant 0$ für alle $x \in [0,1]$. Daher gilt die Aussage von Schritt 2 für alle β mit $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

Beweis von Schritt 3:
Sei $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \geqslant 1$. Die Aussage von Schritt 3 gilt genau dann, wenn

$$\beta - (1+\beta)\cdot\ln(1+\beta) \quad \leqslant \quad -\tfrac{1}{3}\beta,$$

was wiederum genau dann gilt, wenn

$$\tfrac{4}{3}\beta \ - \ (1+\beta)\cdot\ln(1+\beta) \quad < \quad 0$$

ist. Um zu verstehen, für welche Werte β dies erfüllt ist, machen wir eine Kurvendiskussion für die Funktion f mit

$$f(x) \quad := \quad \tfrac{4}{3}x - (1+x)\ln(1+x).$$

Die erste Ableitung von f ist

$$f'(x) \quad = \quad \tfrac{4}{3} - 1 - \ln(1+x) \quad = \quad \tfrac{1}{3} - \ln(1+x).$$

Für alle $x \geqslant 1$ ist $\ln(1+x) \geqslant \ln(2) = 0{,}6931\cdots > \frac{1}{3}$. Somit ist $f'(x) < 0$ für alle $x \geqslant 1$. Daher fällt $f(x)$ auf dem Intervall $[1, \infty)$ ab. Wegen $f(1) = \frac{4}{3} - 2\ln(2) = 1{,}3333\cdots - 1{,}3862\cdots < 0$ ist also $f(x) < 0$ für alle $x \geqslant 1$. Daher gilt die Aussage von Schritt 3 für alle β mit $\beta \geqslant 1$.

(d): Dies folgt leicht aus (b) und (c), indem wir für $0 < \varepsilon \leqslant 1$ beachten, dass

$$\min(\varepsilon, \varepsilon^2) \quad = \quad \varepsilon^2$$

ist, dass

$$-\tfrac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 \cdot ps \quad \leqslant \quad -\tfrac{1}{3} \cdot \varepsilon^2 \cdot ps$$

ist, dass die e-Funktion streng monoton wachsend ist und dass für beliebige Ereignisse A und B gilt:

$$\mathrm{P}(A \text{ oder } B) \quad \leqslant \quad \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Dies schließt den Beweis von Satz B.20 (Chernoff-Schranke) ab. $\square$

B.6 Paarweise Unabhängigkeit

Definition B.22. Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zwei Ereignisse A und B heißen *unabhängig*, wenn gilt:

$$\mathrm{P}(A \cap B) \quad = \quad \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Für jede Zahl $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ heißen die Ereignisse $A_1, \ldots, A_s$ *paarweise unabhängig*, wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ mit $i \neq j$ die Ereignisse A_i und A_j unabhängig voneinander sind.

(b) Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen *unabhängig*, wenn für alle Werte $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathrm{P}(X = r \text{ und } Y = s) \quad = \quad \mathrm{P}(X = r) \cdot \mathrm{P}(Y = s).$$

Für jede Zahl $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ heißen die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_s$ *paarweise unabhängig* (kurz: *pw. unabh.*), wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ mit $i \neq j$ die Zufallsvariablen X_i und X_j unabhängig voneinander sind.

Beispiel B.23.

(a) Wir betrachten das Szenario aus Beispiel B.2, bei dem eine faire Münze zwei mal hintereinander geworfen wird.

Sei A_1 das Ereignis, dass die Münze beim ersten Wurf auf „Zahl" landet, sei A_2 das Ereignis, dass die Münze beim zweiten Wurf auf „Kopf" landet, und sei A_3 das Ereignis, dass die Münze bei beiden Münzwürfen auf der gleichen Seite landet. Also ist

$$A_1 = \{ZK,\ ZZ\}\ , \quad A_2 = \{KK,\ ZK\}\ , \quad A_3 = \{KK,\ ZZ\}\ ,$$

und es gilt

$$\mathrm{P}(A_1) = \tfrac{1}{2}\ , \qquad \mathrm{P}(A_2) = \tfrac{1}{2}\ , \qquad \mathrm{P}(A_3) = \tfrac{1}{2}\ .$$

Außerdem gilt

$$\begin{array}{rclclcl}
\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) & = & \mathrm{P}(\{ZK\}) & = & \tfrac{1}{4} & = & \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2). \\
\mathrm{P}(A_1 \cap A_3) & = & \mathrm{P}(\{ZZ\}) & = & \tfrac{1}{4} & = & \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3). \\
\mathrm{P}(A_2 \cap A_3) & = & \mathrm{P}(\{KK\}) & = & \tfrac{1}{4} & = & \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(A_3).
\end{array}$$

Daher sind die drei Ereignisse A_1, A_2, A_3 paarweise unabhängig.

Man beachte, dass trotz der paarweisen Unabhängigkeit die Ereignisse hier *nicht* paarweise disjunkt sind. Außerdem gilt hier

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \quad \neq \quad \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(A_3),$$

denn $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$, d.h. die drei Ereignisse können nicht alle gleichermaßen eintreten, und daher ist $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$, wohingegen $\mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(A_3) = \frac{1}{8}$ ist.

(b) Entsprechend dem in Teil (a) betrachteten Szenario definieren wir die Zufallsvariablen Y_1, Y_2, Y_3 wie folgt:

$$Y_1 \ := \ \begin{cases} 1 & \text{falls die Münze beim 1. Wurf auf „Zahl" landet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Y_2 \ := \ \begin{cases} 1 & \text{falls die Münze beim 2. Wurf auf „Kopf" landet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Y_3 \ := \ \begin{cases} 1 & \text{falls die Münze bei beiden Würfen auf der gleichen Seite landet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit gilt für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\mathrm{P}(Y_i = 1) \ = \ \mathrm{P}(A_i) \ = \ \tfrac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{P}(Y_i = 0) \ = \ \tfrac{1}{2}.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die drei Zufallsvariablen Y_1, Y_2, Y_3 paarweise unabhängig sind.

Man beachte, dass trotz der paarweisen Unabhängigkeit die drei Zufallsvariablen nicht „vollständig unabhängig" voneinander sind. Beispielsweise gilt

$$\mathrm{P}(Y_1 = 1 \text{ und } Y_2 = 1 \text{ und } Y_3 = 0) \quad \neq \quad \mathrm{P}(Y_1 = 1) \cdot \mathrm{P}(Y_2 = 1) \cdot \mathrm{P}(Y_3 = 0),$$

da $\mathrm{P}(Y_1 = 1 \text{ und } Y_2 = 1 \text{ und } Y_3 = 0) = \mathrm{P}(\{ZK\}) = \frac{1}{4}$ ist, wohingegen $\mathrm{P}(Y_1 = 1) \cdot \mathrm{P}(Y_2 = 1) \cdot \mathrm{P}(Y_3 = 0) = \frac{1}{8}$ ist.

Für *paarweise unabhängige* Zufallsvariablen gelten für Erwartungswert und Varianz noch die folgenden sehr nützlichen Regeln.

Satz B.24 (Erwartungswert & Varianz von pw. unabh. Zufallsvariablen)**.** *Sei* (Ω, P) *ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, sei* $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ *und seien* $X_1, \ldots, X_s$ *paarweise unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt:*

$$\mathrm{E}(X_i \cdot X_j) \quad = \quad \mathrm{E}(X_i) \cdot \mathrm{E}(X_j)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ *mit* $i \neq j$, *und es gilt*

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{s} X_i\Big) \quad = \quad \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Var}(X_i).$$

Beweis. Seien $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ mit $i \neq j$. Wir setzen $Y := X_i$ und $Z := X_j$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) \cdot \mathrm{E}(Z) \quad &= \quad \Big(\sum_{y \in Bild(Y)} y \cdot \mathrm{P}(Y = y)\Big) \cdot \Big(\sum_{z \in Bild(Z)} z \cdot \mathrm{P}(Z = z)\Big) \\ &= \quad \sum_{\substack{y \in Bild(Y), \\ z \in Bild(Z)}} y \cdot z \cdot \mathrm{P}(Y = y) \cdot \mathrm{P}(Z = z) \end{aligned}$$

Laut Voraussetzung sind Y und Z unabhängig, d.h. es gilt für alle Werte $y, z \in \mathbb{R}$, dass

$$\mathrm{P}(Y = y \text{ und } Z = z) \quad = \quad \mathrm{P}(Y = y) \cdot \mathrm{P}(Z = z).$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y)\cdot\mathrm{E}(Z) &= \sum_{\substack{y\in Bild(Y),\\ z\in Bild(Z)}} y\cdot z\cdot \mathrm{P}(Y=y \text{ und } Z=z) \\
&= \sum_{x\in Bild(YZ)} x\cdot\Big(\sum_{\substack{y\in Bild(Y),\\ z\in Bild(Z)\\ \text{mit } yz=x}} \mathrm{P}(Y=y \text{ und } Z=z)\Big) \\
&= \sum_{x\in Bild(YZ)} x\cdot \mathrm{P}(YZ=x) \\
&= \mathrm{E}(YZ).
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass für alle $i,j\in\{1,\dots,s\}$ mit $i\neq j$ gilt:

$$\mathrm{E}(X_i\cdot X_j) \quad=\quad \mathrm{E}(X_i)\cdot\mathrm{E}(X_j).$$

Um zu zeigen, dass

$$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{s} X_i) \quad=\quad \sum_{i=1}^{s}\mathrm{Var}(X_i)$$

ist, beachten wir, dass $\mathrm{Var}(Z)=\mathrm{E}(Z^2)-\mathrm{E}(Z)^2$ für jede Zufallsvariable Z gilt. Speziell für

$$Z \quad:=\quad \sum_{i=1}^{s} X_i$$

ist

$$Z^2 \quad=\quad \sum_{i,j=1}^{s} X_i{\cdot}X_j \quad=\quad \sum_{i=1}^{s}(X_i)^2 \quad+\quad \sum_{\substack{i,j\in\{1,\dots,s\}\\ \text{mit } i\neq j}} X_i{\cdot}X_j.$$

Auf Grund der Linearität des Erwartungswerts gilt daher:

$$\mathrm{E}(Z^2) \quad=\quad \sum_{i=1}^{s}\mathrm{E}(X_i{}^2) \quad+\quad \sum_{\substack{i,j\in\{1,\dots,s\}\\ \text{mit } i\neq j}} \mathrm{E}(X_i{\cdot}X_j). \tag{B.3}$$

Andererseits gilt auf Grund der Linearität des Erwartungswerts auch, dass $\mathrm{E}(Z)=\sum_{i=1}^{s}\mathrm{E}(X_i)$. Somit ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z)^2 &= \sum_{i,j=1}^{s}\mathrm{E}(X_i){\cdot}\mathrm{E}(X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{s}\mathrm{E}(X_i)^2 \quad+\quad \sum_{\substack{i,j\in\{1,\dots,s\}\\ \text{mit } i\neq j}} \mathrm{E}(X_i){\cdot}\mathrm{E}(X_j).
\end{aligned}$$

Die paarweise Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_s$ liefert uns, dass $\mathrm{E}(X_i \cdot X_j) = \mathrm{E}(X_i) \cdot \mathrm{E}(X_j)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ mit $i \neq j$ gilt. Somit ist

$$\mathrm{E}(Z)^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{s} \mathrm{E}(X_i)^2 \;+ \sum_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,s\} \\ \text{mit } i \neq j}} \mathrm{E}(X_i \cdot X_j) \tag{B.4}$$

Aus den Gleichungen (B.3) und (B.4) erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{s} \mathrm{E}({X_i}^2) \;-\; \sum_{i=1}^{s} \mathrm{E}(X_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{s} \Big(\mathrm{E}({X_i}^2) - \mathrm{E}(X_i)^2 \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Var}(X_i). \end{aligned}$$

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] Arvind Arasu, Junghoo Cho, Hector Garcia-Molina, Andreas Paepcke, and Sriram Raghavan. Searching the web. *ACM Transactions on Internet Technology*, 1(1):2–43, 2001.

[2] Avrim Blum, John Hopcroft, and Ravindran Kannan. Foundations of data science. Vorabversion eines Lehrbuchs; erhältlich unter `http://www.cs.cornell.edu/jeh/`, Mai 2015.

[3] Sergey Brin and Lawrence Page. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer Networks*, 30(1-7):107–117, 1998.

[4] Ayman Farahat, Thomas LoFaro, Joel C. Miller, Gregory Rae, and Lesley A. Ward. Authority rankings from HITS, PageRank, and SALSA: Existence, uniqueness, and effect of initialization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(4):1181–1201, 2006.

[5] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications: Volume I.* Wiley, 3rd edition, 1968. ISBN: 978-0-471-25708-0.

[6] Olle Häggström. *Finite Markov chains and algorithmic applications.* Number 52 in London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2002. ISBN-10: 0521890012.

[7] Jon M. Kleinberg. Authoritative sources in a hyperlinked environment. *Journal of the ACM*, 46(5):604–632, 1999.

[8] Amy N. Langville and Carl D. Meyer. *Google's Pagerank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*. Princeton University Press, 2006.

[9] Jure Leskovec, Anand Rajamaran, and Jeffrey David Ullman. *Mining of Massive Datasets*. Cambridge University Press, 2. Auflage edition, 2014. Umfangreiche Informationen zum Buch sind unter http://www.mmds.org/ erhältlich.

[10] Christopher D. Manning, Prabhakar Raghavan, and Hinrich Schütze. *Introduction to Information Retrieval*. Cambridge University Press, 2008.

[11] Lawrence Page, Sergey Brin, Rajeev Motwani, and Terry Winograd. The PageRank citation ranking: Bringing order to the web. Technical Report 1999-66 (previous number: SIDL-WP-1999-0120), Stanford InfoLab, November 1999. The article is available from http://ilpubs.stanford.edu:8090/422/.

[12] Georg Schnitger. *Internet Algorithmen*. Skript zur Vorlesung am Institut für Informatik, Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2009.