Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

27. Juni 2019

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2019

Übungsblatt 8

Zu bearbeiten 9. Juli 2019

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass in Definition 4.10 („Repräsentierbarkeit einer Funktion“) die Bedingung (1.2) bereits aus den Bedingungen (1.1) und (2) folgt, sofern $T \supseteq Q$ ist. D.h.:

Sei $T \supseteq Q$ eine Menge von $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Sätzen, sei $k \geqslant 1$, sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion, und sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ eine $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formel, so dass gilt:

(1.1) Für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \ldots, m_k) = n$ gilt: $T \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

(2) Für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$T \models \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_1) \land \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_2) \big) \to y_1{=}y_2 \Big).$$

Zeigen Sie, dass dann auch Folgendes gilt:

(1.2) Für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \ldots, m_k) \neq n$ gilt: $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

Frage: An welcher Stelle benutzt Ihr Beweis, dass $T \supseteq Q$ ist?

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Gilt auch die folgende Variante von Gödels 1. Unvollständigkeitssatz?

> *Jede σ_{Ar}-Theorie T, für die gilt*
>
> *(1) T ist widerspruchsfrei (d.h. erfüllbar)*
>
> *(2) T besitzt ein semi-entscheidbares Axiomensystem und*
>
> *(3) $T \supseteq Q$*
>
> *ist unvollständig (d.h. es gibt einen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Satz φ, so dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus T folgt).*

Falls Ihre Antwort „ja“ ist, so beweisen Sie, dass Sie Recht haben; falls Ihre Antwort „nein“ ist, so zeigen Sie auf, welche Probleme entstehen, wenn man versucht, den in der Vorlesung behandelten Beweis von Gödels 1. Unvollständigkeitssatz auf die in dieser Aufgabe formulierte Variante zu übertragen.

... auf der Rückseite geht's weiter!

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Eine Signatur σ heißt *binär*, falls jedes Symbol in σ ein Relationssymbol der Stelligkeit 2 ist. Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Trakhtenbrot:

Es gibt eine endliche binäre Signatur $\hat{\sigma}$, so dass das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$ unentscheidbar ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation beliebiger σ-Strukturen durch kantengefärbte Graphen, repräsentiert durch Strukturen über einer geeigneten binären Signatur $\hat{\sigma}$. Benutzen Sie die in der Vorlesung für $\sigma := \tilde{\sigma}_{\mathrm{Ar}} := \{\leqslant, R_+, R_\cdot, R_0, R_1\}$ bewiesene Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätze, um die Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für $\mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$-Sätze zu beweisen.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Trakhtenbrot:

Sei $\sigma_{\mathrm{Graph}} := \{E\}$ die Signatur, die aus einem zweistelligen Relationssymbol E besteht. Das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Graph}}]$ ist unentscheidbar.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die in Aufgabe 3 bewiesene Aussage. Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation von Strukturen über einer binären Signatur σ durch gerichtete Graphen (d.h. σ_{Graph}-Strukturen).