Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

18. Juni 2019

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2019

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten 25. Juni 2019

Sie dürfen für die Lösung der Aufgaben die Church-Turing-These benutzen.

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Welche der folgenden Relationen bzw. partiellen Funktionen sind Σ_1-definierbar, welche nicht? Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(a) $\exp\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \exp(a,b) \ := \ a^b \quad (\text{f.a. } a,b \in \mathbb{N})$

(b) $\mathrm{Bit} \ := \ \{(i,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{das } i\text{-te Bit in der Binärdarstellung von } n \text{ ist } 1\}$

(c) $\mathrm{H} \ := \ \{n_M : M$ ist eine Turing-Maschine, deren Zustandsmenge eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, die bei leerer Eingabe nach endlich vielen Schritten anhält$\}$

(d) $\overline{\mathrm{H}} \ := \ \mathbb{N} \setminus \mathrm{H}$

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie die Korrektheit der Aussage von Bemerkung 3.22, d.h. zeigen Sie:

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ ist genau dann TM-berechenbar, wenn sie Σ_1-definierbar ist.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann TM-rekursiv aufzählbar, wenn sie Σ_1-definierbar ist.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass es eine Σ_1-Formel φ gibt, so dass es keine zu $\neg\varphi$ bezüglich des Standardmodells $\mathcal{N}$ der Arithmetik äquivalente Σ_1-Formel gibt.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Sei $\mathcal{Z}$ die σ_{Ar}-Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$ und Konstanten $0^{\mathcal{Z}} = 0$ und $1^{\mathcal{Z}} = 1$, für die $\leqslant^{\mathcal{Z}}$, $+^{\mathcal{Z}}$ und $\cdot^{\mathcal{Z}}$ die natürliche lineare Ordnung, Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ sind.

Zeigen Sie: $\mathrm{Th}(\mathcal{Z})$ ist nicht rekursiv aufzählbar.