Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

11. Juni 2019

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2019

Übungsblatt 6

Zu bearbeiten 18. Juni 2019

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Berechnen Sie die Gödelnummern der σ_{Ar}-Terme $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$ und $\underline{3}$.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Behauptung 5 aus dem Beweis von Lemma 3.15, d.h. zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$g(y_1, y_2) \quad := \quad \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + 1)(y_1 + y_2) + y_2 \ , \qquad \text{für alle } y_1, y_2 \in \mathbb{N},$$

bijektiv ist.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Definition: Die Menge Σ_1 besteht aus allen $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln der Form $\exists x\, \varphi$, wobei x eine Variable und φ eine Δ_0-Formel ist.

Definition: Für zwei $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln ψ und ψ' schreiben wir $\psi \equiv_{\leqslant-\text{ord}} \psi'$, falls für jede σ_{Ar}-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$, für die $\leqslant^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung ist, gilt: $\mathcal{I} \models \psi \iff \mathcal{I} \models \psi'$.

Seien φ_1 und φ_2 zwei Formeln in Σ_1.
Zeigen Sie, dass es Σ_1-Formeln $\varphi_\wedge$ und $\varphi_\vee$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi_\vee \ \equiv_{\leqslant-\text{ord}} \ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad \text{und} \qquad \varphi_\wedge \ \equiv_{\leqslant-\text{ord}} \ (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Betrachten Sie Turingmaschinen (siehe Abschnitt 3.3.2 im Skript), deren Zustandsmengen endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind.

Geben Sie eine geeignete Gödelisierung für solche Turingmaschinen an. D.h. geben Sie eine berechenbare, injektive Funktion $\langle\cdot\rangle$ an, die jeder solchen Turingmaschine M eine natürliche Zahl $n_M := \langle M \rangle$ zuordnet.