Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

28. Mai 2019

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2019

Übungsblatt 4

Zu bearbeiten 4. Juni 2019

Aufgabe 1: **($12,5 + 12,5 = 25$ Punkte)**

Arbeiten Sie das folgende Detail aus dem Beweis von Lemma 1.40' aus:

> Sei K eine Kette in $(M, \subseteq)$, sei n eine natürliche Zahl $\geqslant 1$ und seien $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ Elemente aus K. Beweisen Sie, dass es eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $\Theta_{\pi(1)} \subseteq \Theta_{\pi(2)} \subseteq \cdots \subseteq \Theta_{\pi(n)}$ ist.

Aufgabe 2: **($12,5 + 12,5 = 25$ Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom aus dem Wohlornungssatz folgt.

(b) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom aus dem Zornschen Lemma folgt.

Aufgabe 3: **($18 + 7 = 25$ Punkte)**

(a) Beweisen Sie den absteigenden Satz von Löwenheim und Skolem (Satz 2.15).

(b) Gilt auch die verschärfte Variante des absteigenden Satzes von Löwenheim und Skolem, die besagt, dass die Mächtigkeit des Modells höchstens so groß wie die Mächtigkeit von Φ ist?

Aufgabe 4: **($18 + 7 = 25$ Punkte)**

Beweisen Sie Bemerkung 2.17, das heißt zeigen Sie Folgendes: Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Struktur. Dann gilt:

(a) Ist $\mathcal{A}$ endlich, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$: $\quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

(b) Ist $\mathcal{A}$ unendlich, so gibt es eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ und $\mathcal{B} \ncong \mathcal{A}$.

Hinweis: Für (a) können Sie folgendermaßen vorgehen: Zeigen Sie zunächst, dass (a) für *endliche* Signaturen gilt. Folgern Sie daraus, dass für *beliebige* Signaturen gilt: Falls $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, so ist $|B| = |A|$. Folgern Sie daraus, dass (a) für abzählbare Signaturen gilt. Folgern Sie dann, dass (a) auch für beliebige Signaturen gilt.