

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2019

Übungsblatt 3

Zu bearbeiten 21. Mai 2019

Aufgabe 1: (8 + 17 = 25 Punkte)

(a) Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ widerspruchsvoll. Wie sieht die reduzierte Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$ aus?

(b) Betrachten Sie den Beweis des Satzes von Henkin.

Arbeiten Sie die Details für den Fall $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ im Beweis des Satzes von Henkin aus.

Aufgabe 2: (13 + 12 = 25 Punkte)

Zeigen Sie Folgendes (wobei σ eine geeignete Signatur sei, die mindestens ein Relationssymbol enthält):

(a) Es gibt eine widerspruchsfreie, negationstreue Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

(b) Es gibt eine widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$, die Beispiele enthält, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

Zur Information: Mit dieser Aufgabe zeigen Sie, dass im Satz von Henkin die beiden Forderungen, dass Φ negationstreu ist und Beispiele enthält, unverzichtbar sind.

Aufgabe 3: (10 + 15 = 25 Punkte)

Sei σ eine beliebige Signatur. Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Phi := \{ v_0 = t : t \in T_\sigma \} \cup \{ \exists v_0 \exists v_1 \neg v_0 = v_1 \}.$$

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Φ ist widerspruchsfrei.

(b) Es gibt keine Menge $\Psi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

Zur Information: Mit dieser Aufgabe zeigen Sie, dass in Lemma 1.39 die Forderung, dass $|\text{VAR} \setminus \text{frei}(\Phi)| = \infty$ ist, unverzichtbar ist.

... auf der Rückseite geht's weiter!

Aufgabe 4:**(25 Punkte)**

Betrachten Sie den Beweis von Lemma 1.41 und arbeiten Sie Details dazu aus, warum Φ' widerspruchsfrei ist. D.h., ersetzen Sie die Zeile

„Durch geeignetes Umbenennen von Variablen in der Ableitung der Sequenz
 $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ erhält man eine Ableitung der Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$.“

durch einen detaillierten Beweis.