

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2019

Übungsblatt 2

Zu bearbeiten 14. Mai 2019

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Beweisen Sie das Lemma 0.43 aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie:

Für jeden σ -Term t , jede FO[σ]-Formel φ und jede Variable $x \in \text{VAR}$ gilt: $t_x^x = t$ und $\varphi_x^x = \varphi$.

Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Geben Sie eine Ableitung der Regel
$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)}$$
 im Sequenzenkalkül \mathfrak{R}_S an.

Zur Erinnerung:

Im Rahmen des Vollständigkeitssatzes betrachten wir Formeln der Art $(\varphi \rightarrow \psi)$ stets als abkürzende Schreibweise für die Formel $(\neg\varphi \vee \psi)$, d.h. $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$ steht hier für die Formel $(\neg(\varphi \wedge \psi) \vee \chi)$.

Aufgabe 3:

(10 + 15 = 25 Punkte)

Betrachten Sie die Regel

$$(\forall\exists) \frac{}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \forall x \varphi}$$

- (a) Prüfen Sie, ob die Regel $(\forall\exists)$ korrekt ist.
- (b) Sei \mathfrak{R}'_S der Kalkül, der aus dem Sequenzenkalkül \mathfrak{R}_S durch Hinzufügen der Regel $(\forall\exists)$ entsteht. Prüfen Sie, ob *jede* Sequenz in \mathfrak{R}'_S ableitbar ist.

Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Berechnen Sie die reduzierte Termstruktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ für die Formelmenge

$$\begin{aligned} \Phi &:= \{v_i = v_{i+2} : i \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \\ &\cup \{E(v_0, v_7), E(v_1, v_4), E(v_6, v_0), \forall v_1 \forall v_3 (E(v_1, v_3) \rightarrow E(v_3, v_1))\}. \end{aligned}$$