

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2019

Übungsblatt 1

Zu bearbeiten 23. April 2019

Aufgabe 1:

(9 + 9 + 22 = 40 Punkte)

- (a) Sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und R, E zweistellige Relationssymbole. Berechnen Sie $\varphi \frac{f(v_1, v_2), v_0}{v_0, v_3}$ und $\psi \frac{v_1}{v_0}$ für
- (i) $\varphi = \exists v_1 (R(v_0, v_2) \wedge \forall v_0 R(v_1, f(v_4, v_0)))$
 - (ii) $\psi = \exists v_1 (E(v_0, v_1) \wedge (\exists v_0 (E(v_1, v_0) \wedge \exists v_1 E(v_0, v_1))))$
- (b) Beweisen Sie das *Substitutionslemma für Formeln* aus der Vorlesung. Das Substitutionslemma für Terme darf dabei verwendet werden.

Aufgabe 2:

(20 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgende Regel des Sequenzenkalküls \mathfrak{K}_S korrekt ist.

$$(\exists A) : \frac{\Gamma, \varphi \frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x \varphi, \psi)$$

Aufgabe 3:

(20 + 20 Punkte)

Leiten Sie die folgenden Sequenzen im Sequenzenkalkül \mathfrak{K}_S ab. Hierbei sind x, y, z paarweise verschiedene Elemente aus Var .

- (a) $\forall x f(x, x)=x \vdash \forall x (P(x) \vee \neg P(f(x, x)))$
- (b) $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)) \wedge \forall x \neg R(x, x) \vdash \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$

Zur Erinnerung:

Im Rahmen des Vollständigkeitsatzes betrachten wir Formeln der Art $(\varphi \rightarrow \psi)$ stets als abkürzende Schreibweise für die Formel $(\neg\varphi \vee \psi)$.