3.3 Kompositionslemmata

Folie 30

Unter gewissen Umständen ist es möglich, Gewinnstrategien für Duplicator auf „kleinen“ Strukturen zu Gewinnstrategien für Duplicator auf größeren Strukturen zusammenzusetzen. Die folgenden *Kompositionslemmata* fassen einige einfache Situationen zusammen, in denen dies möglich ist.

Folie 31

Kompositionslemma für die Vereinigung disjunkter Strukturen

Notation 3.17. Sei σ eine relationale Signatur.
Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen *disjunkt*, falls ihre Universen disjunkt sind. Für disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird. Wir sagen auch: $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ ist die *disjunkte Vereinigung* von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lemma 3.18. *Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei disjunkte σ-Strukturen und seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ zwei disjunkte σ-Strukturen. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\mathcal{A}_1 \approx_m \mathcal{B}_1 \quad \textit{und} \quad \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \;\approx_m\; \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2.$$

Beweis. Übung. □

Folie 32

Beispiel 3.19. Die Signatur $\sigma := \{R, B\}$ bestehe aus zwei einstelligen Relationssymbolen R (für „rote Knoten“) und B (für „blaue Knoten“).
Für $k, \ell \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_{k,\ell}$ eine σ-Struktur, die aus k roten und ℓ blauen Knoten besteht, d.h. $A_{k,\ell}$ ist die disjunkte Vereinigung der k-elementigen Menge $R^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$ und der ℓ-elementigen Menge $B^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$.
Für alle Zahlen $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2 \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{c} \big(\; k_1 = k_2 \;\text{ oder }\; k_1, k_2 \geqslant m \;\big) \\ \text{und} \\ \big(\; \ell_1 = \ell_2 \;\text{ oder }\; \ell_1, \ell_2 \geqslant m \;\big) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_{k_1,\ell_1} \approx_m \mathcal{A}_{k_2,\ell_2}.$$

Unter Verwendung von Lemma 3.18 erhält man einen kurzen Beweis für diese Aussage.

Auch die Richtung „$\Longleftarrow$“ gilt und lässt sich leicht durch Angabe einer Gewinnstrategie für Spoiler beweisen.

Details: Übung.

Folie 33

Kompositionslemma für das kartesische Produkt

Notation 3.20. Sei σ eine funktionenfreie Signatur.
Für zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \times B$ zu bezeichnen, bei der jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ mit $(c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{B}})$ und jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $r := \mathrm{ar}(R)$ mit

$$\big\{ \, \big((a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r) \big) \ : \ (a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathcal{A}} \ \text{ und } \ (b_1, \ldots, b_r) \in R^{\mathcal{B}} \, \big\}$$

interpretiert wird. Wir sagen auch: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist das *kartesische Produkt* (oder *Tensorprodukt*) von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lemma 3.21. *Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ vier σ-Strukturen. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\mathcal{A}_1 \approx_m \mathcal{B}_1 \ \text{ und } \ \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \ \approx_m \ \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2.$$

Beweis. Übung. □

Folie 34

Beispiel 3.22. Die Signatur $\sigma := \{S_v, S_h\}$ bestehe aus zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h (für „vertikale" und „horizontale" Kanten).
Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k{\times}\ell)$-*Gitter* $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \big\{ \big((i,j),(i{+}1,j)\big) \ : \ 1 \leqslant i < k, \ 1 \leqslant j \leqslant \ell \big\}, \\ S_h^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \big\{ \big((i,j),(i,j{+}1)\big) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant k, \ 1 \leqslant j < \ell \big\}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 3.21 erhält man einen kurzen Beweis dafür, dass es keinen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ gibt, der die Gitter *quadratischer* Größe beschreibt, d.h. bei dem für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt: $\mathcal{G}_{k,\ell} \models \varphi \iff k = \ell$.

Details: Übung.

Folie 35

Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen

Notation 3.23. Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Für zwei linear geordnete,[1] disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B}$, um die linear geordnete σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma \setminus \{\leqslant\}$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird, und bei der $\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}$ die natürliche Erweiterung von $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ auf $A \cup B$ ist, bei der jedes Element aus A kleiner als jedes Element aus B ist, d.h.:

$$\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}} \quad = \quad \leqslant^{\mathcal{A}} \ \cup \ \leqslant^{\mathcal{B}} \ \cup \ (A \times B).$$

Wir sagen auch: $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B}$ ist die *Konkatenation* von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lemma 3.24. *Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ linear geordnete σ-Strukturen, so dass gilt: $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind disjunkt, $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ sind disjunkt, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ besitzen maximale Elemente a_1, a_2, b_1, b_2 bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}_1}$, $\leqslant^{\mathcal{A}_2}$, $\leqslant^{\mathcal{B}_1}$, $\leqslant^{\mathcal{B}_2}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(\mathcal{A}_1, a_1) \approx_m (\mathcal{B}_1, b_1) \quad \text{und} \quad (\mathcal{A}_2, a_2) \approx_m (\mathcal{B}_2, b_2) \quad \Longrightarrow \quad \big(\mathcal{A}_1{\cdot}\mathcal{A}_2,\ a_1, a_2\big) \approx_m \big(\mathcal{B}_1{\cdot}\mathcal{B}_2,\ b_1, b_2\big).$$

Beweis. Übung. □

Folie 36

Im nächsten Abschnitt werden wir dieses Lemma beim Beweis des *Satzes von McNaughton und Papert* benutzen, der eine logische Charakterisierung der sternfreien regulären Sprachen liefert.

3.4 Der Satz von McNaughton und Papert

Folie 37

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke).
Die Klasse SFR_Σ aller *sternfreien regulären Ausdrücke* über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

[1] Eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ heißt *linear geordnet*, falls $\leqslant^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf $\mathcal{A}$ ist.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(a) := \{a\}$.

(3) Sind $r \in \mathsf{SFR}_\Sigma$ und $s \in \mathsf{SFR}_\Sigma$, so gehört auch

- $(r \mid s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \mid s)) := L(r) \cup L(s)$,
- $(r \cdot s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \cdot s)) := L(r) \cdot L(s)$, wobei die Konkatenation $L_1 \cdot L_2$ zweier Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ definiert ist als $L_1 \cdot L_2 := \{\, uv \ : \ u \in L_1,\ v \in L_2 \,\}$,
- $\overline{r}$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\overline{r}) := \Sigma^* \setminus L(r)$.

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *sternfrei regulär*, falls es ein $r \in \mathsf{SFR}_\Sigma$ gibt mit $L = L(r)$.

Beispiele.

(a) Für $\Sigma = \{a, b\}$ wird die durch den regulären Ausdruck $(a \mid b)^* \, a \, (a \mid b)^* b$ definierte Sprache durch den sternfreien regulären Ausdruck

$$((\overline{\emptyset} \cdot a) \cdot (\overline{\emptyset} \cdot b))$$

beschrieben.

(b) Für $\Sigma = \{a, b, c\}$ wird die durch den regulären Ausdruck $(a \mid b)^*$ beschriebene Sprache durch den sternfreien regulären Ausdruck

$$r \quad := \quad \overline{((\overline{\emptyset} \cdot c) \cdot \overline{\emptyset})}$$

beschrieben. Entsprechend wird die durch den regulären Ausdruck $(a \mid b)^* \, a \, (a \mid b)^* b$ definierte Sprache durch den sternfreien regulären Ausdruck

$$((r \cdot a) \cdot (r \cdot b))$$

beschrieben.

Der Satz von McNaughton und Papert (1971)

Definition 3.26. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt FO-*definierbar*, falls es einen $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz φ gibt, der L beschreibt, d.h. für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

Theorem 3.27 (Satz von McNaughton und Papert)**.**
Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt:
L ist sternfrei regulär $\iff$ L ist FO-definierbar.

Beweis.

Folie 39

„$\Longrightarrow$“: Per Induktion über den Aufbau der Menge SFR_Σ kann man leicht zeigen, dass es für jedes $r \in \mathsf{SFR}_\Sigma$ einen $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz φ_r gibt, der die Sprache $L(r)$ beschreibt. Details: *Übung.*

Folie 40

„$\Longleftarrow$“: Wir erweitern die Signatur σ_Σ um ein Konstantensymbol *max*, setzen $\sigma'_\Sigma := \sigma_\Sigma \cup \{max\}$ und bezeichnen mit $\mathcal{A}'_w$ die σ'_Σ-Expansion von $\mathcal{A}_w$, bei der *max* durch $|w|$ (also durch das größte Element von A_w bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}_w}$) interpretiert wird. Die von einem $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ *beschriebene* Sprache $L(\varphi)$ ist definiert als $L(\varphi) := \{w \in \Sigma^+ \ : \ \mathcal{A}'_w \models \varphi\}$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sagen wir, dass L durch φ *beschrieben* wird, falls für jedes *nicht-leere* Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff w \in L(\varphi)$.

Per Induktion nach der Quantorentiefe m zeigen wir, dass es für jeden $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ einen sternfreien regulären Ausdruck $r_\varphi \in \mathsf{SFR}_\Sigma$ gibt, so dass φ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt. Wegen $\sigma'_\Sigma \supseteq \sigma_\Sigma$ ist dann auch die Richtung „$\Longleftarrow$“ des Satzes von McNaughton und Papert bewiesen.
Da der Allquantor $\forall$ und die Junktoren $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ durch Kombination des Existenzquantors $\exists$ und der Junktoren $\neg$ und $\vee$ ausgedrückt werden können, genügt es, im Folgenden nur die Fälle zu betrachten, in denen in φ keins der Symbole $\forall$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ vorkommt.

Induktionsanfang $m = 0$:
Sei φ ein $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz der Quantorentiefe $m = 0$.

Fall 1: φ ist von der Form $P_a(max)$ für ein $a \in \Sigma$.
Dann ist $L(\varphi) = \Sigma^* \cdot \{a\}$ und wird durch den sternfreien regulären Ausdruck $(\overline{\emptyset} \cdot a)$ beschrieben.

Fall 2: φ ist von der Form $max{=}max$ oder von der Form $max \leqslant max$.

Dann ist $L(\varphi) = \Sigma^+$ und wird durch den sternfreien regulären Ausdruck $(a_1 \mid \cdots \mid a_\ell) \cdot \overline{\emptyset}$ beschrieben, für $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_\ell\}$.

Fall 3: φ ist von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, für $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Sätze φ_1 und φ_2. Per Induktion (über den Aufbau der Menge aller $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Sätze der Quantorentiefe 0) gibt es für jedes $i \in \{1,2\}$ ein $r_{\varphi_i} \in \mathsf{SFR}_\Sigma$, so dass φ_i die Sprache $L(r_{\varphi_i})$ beschreibt.
Wegen $L(\varphi) = L(\varphi_1) \cup L(\varphi_2)$ gilt dann: Für $r_\varphi := (r_{\varphi_1} \mid r_{\varphi_2})$ beschreibt φ die Sprache $L(r_\varphi)$.

Fall 4: φ ist von der Form $\neg\varphi_1$, für einen $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ_1.
Per Induktion (über den Aufbau der Menge aller $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Sätze der Quantorentiefe 0) gibt es ein $r_{\varphi_1} \in \mathsf{SFR}_\Sigma$, so dass φ_1 die Sprache $L(r_{\varphi_1})$ beschreibt.
Wegen $L(\varphi) = \Sigma^+ \setminus L(\varphi_1)$ gilt dann: Für $r_\varphi := \overline{r_{\varphi_1}}$ beschreibt φ die Sprache $L(r_\varphi)$.

Folie 41

Induktionsschritt $m \to m{+}1$*:* Sei $m \geqslant 0$.

Induktionsannahme: Für jeden $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz ψ der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt es ein $r_\psi \in \mathsf{SFR}_\Sigma$, so dass ψ die Sprache $L(r_\psi)$ beschreibt.

Behauptung: Für jeden $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ der Quantorentiefe $m{+}1$ gibt es ein $r_\varphi \in \mathsf{SFR}_\Sigma$, so dass φ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt.

Beweis: Per Induktion nach dem Aufbau von $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Sätzen der Quantorentiefe $m{+}1$.

Folie 42

Bevor wir den (schwierigen) Induktionsanfang betrachten, behandeln wir zunächst den (trivialen) Induktionsschritt.

Induktionsschritt: Hier betrachten wir den Fall, dass φ von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ oder von der Form $\neg\varphi_1$ ist, wobei φ_1 und φ_2 $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m{+}1$ sind, für die gemäß Induktionsannahme bereits bekannt ist, dass es für jedes $i \in \{1,2\}$ einen sternfreien regulären Ausdruck r_{φ_i} gibt, so dass φ_i die Sprache $L(r_{\varphi_i})$ beschreibt.
Analog zu den Fällen 3 und 4 im Induktionsanfang für $m = 0$ setzen wir dann $r_\varphi := (r_{\varphi_1} \mid r_{\varphi_2})$ bzw. $r_\varphi := \overline{r_{\varphi_1}}$ und erhalten dadurch einen sternfreien regulären Ausdruck, so dass φ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt.

Um den Beweis des Satzes von McNaughton und Papert abzuschließen, müssen wir nur noch den folgenden Induktionsanfang betrachten.

Induktionsanfang: φ ist von der Form $\exists y\, \psi(y)$, wobei $\psi(y)$ eine $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Formel der Quantorentiefe m mit $\text{frei}(\psi) = \{y\}$ ist.

Ziel: Konstruiere einen sternfreien regulären Ausdruck r_φ, so dass der Satz $\exists y\, \psi(y)$ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt.

Um ein solches r_φ zu finden, betrachten die Menge

$$m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma] \;=\; \{\varphi^m_{\mathcal{A},a}(x) \;:\; \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma_\Sigma\text{-Struktur und } a \in A\}$$

aller m-Hintikka-Formeln mit *einer* freien Variablen x. Aus Bemerkung 3.13 wissen wir, dass diese Menge *endlich* ist und nur $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$ enthält.
Indem wir die freie Variable x jeweils durch das Konstantensymbol *max* ersetzen, können wir jede Formel $\tau \in m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma]$ mit einem $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz identifizieren. Wegen $\text{qr}(\tau) \leqslant m$ gibt es gemäß Induktionsannahme einen sternfreien regulären Ausdruck $r_\tau \in \mathsf{SFR}_\Sigma$, so dass τ (genauer: der mit τ identifizierte $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz) die Sprache $L(r_\tau)$ beschreibt.
Wir zeigen im Folgenden, wie man aus den sternfreien regulären Ausdrücken r_τ (für alle $\tau \in m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma]$) den gesuchten Ausdruck r_φ konstruieren kann.
Dazu betrachten wir die Menge

Folie 43

$$S_\psi \;:=\; \left\{ (\tau,\tau') \;:\; \begin{array}{l} \tau,\tau' \in m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma], \\ \text{es gibt } \tilde{w} \in \Sigma^+ \text{ und } \tilde{u} \in \Sigma^+, \text{ so dass für } \tilde{p} := |\tilde{w}| \\ \text{und } \tilde{q} := |\tilde{u}| \text{ gilt:} \\[1ex] (1) \quad \mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \quad \text{und} \\[1ex] (2) \quad \mathcal{A}_{\tilde{w}} \models \tau[\tilde{p}] \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{\tilde{u}} \models \tau'[\tilde{q}]. \end{array} \right\}$$

Die Menge S_ψ ist endlich, da die Menge $m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma]$ endlich ist.
Aussage (1) bedeutet insbesondere, dass für $\tilde{v} := \tilde{w}\tilde{u}$ gilt: $\mathcal{A}'_{\tilde{v}} \models \exists y\, \psi(y)$.
Aussage (2) bedeutet, dass τ und τ' die m-Hintikka-Formeln von $(\mathcal{A}_{\tilde{w}}, |\tilde{w}|)$ und von $(\mathcal{A}_{\tilde{u}}, |\tilde{u}|)$ sind, d.h.

$$\tau \;=\; \varphi^m_{\mathcal{A}_{\tilde{w}},|\tilde{w}|}(x) \qquad \text{und} \qquad \tau' \;=\; \varphi^m_{\mathcal{A}_{\tilde{u}},|\tilde{u}|}(x)\,. \tag{3.8}$$

Folie 44

Die Menge S_ψ wurde so gewählt, dass Folgendes gilt:

Behauptung $(*)$. Für alle Worte $v \in \Sigma^+$ gilt: $\mathcal{A}'_v \;\models\; \exists y\, \psi(y) \quad \Longleftrightarrow$

- $\mathcal{A}'_v \models \psi[p]$, wobei die freie Variable y von ψ durch die maximale Position $p := |v|$ interpretiert wird, *oder*

- es gibt eine Position $p \in \{1, \ldots, |v|-1\}$ und ein Paar $(\tau, \tau') \in S_\psi$, so dass für die (nicht-leeren) Worte w und u mit $v = wu$ und $|w| = p$ gilt: $\mathcal{A}_w \models \tau[p]$ und $\mathcal{A}_u \models \tau'[q]$, wobei die freie Variable x von τ und τ' durch die maximalen Positionen $p = |w|$ von w und $q := |u|$ von u interpretiert wird.

Beweis von Behauptung $(*)$*:*
„$\Longrightarrow$“: Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies direkt aus der Definition der Menge S_ψ folgt.

„$\Longleftarrow$“: Fall 1: Es gilt $\mathcal{A}'_v \models \psi[p]$ für $p := |v|$.
Dann gilt insbesondere auch $\mathcal{A}'_v \models \exists y\, \psi(y)$.
Fall 2: Es gibt $p \in \{1, \ldots, |v|-1\}$ und $(\tau, \tau') \in S_\psi$, so dass für die Worte $w, u \in \Sigma^+$ mit $wu = v$ und $|w| = p$ gilt:

$$\mathcal{A}_w \models \tau[p] \qquad \text{und} \qquad \mathcal{A}_u \models \tau'[q] \tag{3.9}$$

für $q := |u|$.
<u>Ziel:</u> Zeige, dass $\mathcal{A}'_{wu} \models \exists y\, \psi(y)$.
Wegen (τ, τ') gibt es gemäß der Definition der Menge S_ψ Worte $\tilde{w}, \tilde{u} \in \Sigma^+$, so dass für $\tilde{p} := |\tilde{w}|$ und $\tilde{q} := |\tilde{u}|$ gilt:

$$\mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \tag{3.10}$$

und

$$\mathcal{A}_{\tilde{w}} \models \tau[\tilde{p}] \qquad \text{und} \qquad \mathcal{A}_{\tilde{u}} \models \tau[\tilde{q}]\,.$$

Aus (3.8) und (3.9) folgt mit Korollar 3.15, dass

$$(\mathcal{A}_{\tilde{w}}, \tilde{p}) \;\approx_m\; (\mathcal{A}_w, p) \qquad \text{und} \qquad (\mathcal{A}_{\tilde{u}}, \tilde{q}) \;\approx_m\; (\mathcal{A}_u, q) \tag{3.11}$$

Aus dem Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen (Lemma 3.24) folgt wegen $\mathcal{A}_w \cdot \mathcal{A}_u \cong \mathcal{A}_{wu}$, dass

$$\big(\mathcal{A}_{\tilde{w}\tilde{u}},\ \tilde{p},\ |\tilde{w}\tilde{u}|\big) \;\approx_m\; \big(\mathcal{A}_{wu},\ p,\ |wu|\big). \tag{3.12}$$

Hieraus folgt wegen $\mathrm{qr}(\psi) = m$ laut Satz von Ehrenfeucht insbesondere für die $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Formel $\hat{\psi}(y, x)$, die aus $\psi(y)$ entsteht, indem jedes Vorkommen des Konstantensymbols *max* durch die Variable x ersetzt wird, dass

$$\mathcal{A}_{\tilde{w}\tilde{u}} \;\models\; \hat{\psi}\,\big[\,\tilde{p},\ |\tilde{w}\tilde{u}|\,\big] \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{A}_{wu} \;\models\; \hat{\psi}\,\big[\,p,\ |wu|\,\big]\,,$$

und somit dass

$$\mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}'_{wu} \models \psi[p].$$

Wegen (3.10) gilt also $\mathcal{A}'_{wu} \models \psi[p]$, und somit auch $\mathcal{A}'_{wu} \models \exists y\, \psi(y)$. $\square_{\textit{Behauptung } (*)}$

Behauptung $(*)$ liefert, dass die vom Satz $\varphi := \exists y\, \psi(y)$ beschriebene Sprache $L(\varphi)$ wie folgt aussieht:

$$L(\varphi) \;=\; \{\, v \in \Sigma^+ \;:\; \mathcal{A}'_v \models \psi\,[\,|v|\,]\,\} \;\cup \bigcup_{(\tau,\tau')\in S_\psi} L(\tau,\tau')\,,$$

für

$$\begin{aligned} L(\tau,\tau') \;&:=\; \{\, wu \;:\; w,u \in \Sigma^+,\; \mathcal{A}_w \models \tau\,[\,|w|\,],\; \mathcal{A}_u \models \tau\,[\,|u|\,]\,\} \\ &=\; L(\tau)\cdot L(\tau')\,, \end{aligned}$$

wobei gemäß Induktionsannahme bereits sternfreie reguläre Ausdrücke r_τ und $r_{\tau'}$ existieren, so dass τ (genauer: der mit τ identifizierte $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz) die Sprache $L(r_\tau)$ und τ' die Sprache $L(r_{\tau'})$ beschreibt.
Indem wir in der Formel $\psi(y)$ jedes Vorkommen der freien Variablen y durch das Konstantensymbol *max* ersetzen, erhalten wir einen $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz $\hat{\psi}$ der Quantorentiefe m, so dass

$$\{\, v \in \Sigma^+ \;:\; \mathcal{A}'_v \models \psi\,[\,|v|\,]\,\} \;=\; \{\, v \in \Sigma^+ \;:\; \mathcal{A}'_v \models \hat{\psi}\,\} \;=\; L(\hat{\psi}).$$

Wegen $\mathrm{qr}(\hat{\psi}) = m$ gibt es gemäß Induktionsannahme einen sternfreien regulären Ausdruck $r_{\hat{\psi}}$, so dass $\hat{\psi}$ die Sprache $L(r_{\hat{\psi}})$ beschreibt.
Für $s := |S_\psi|$ und $\{(\tau_1,\tau'_1),\ldots,(\tau_s,\tau'_s)\} = S_\psi$ können wir also

$$r_\varphi \;:=\; r_{\hat{\psi}} \;\mid\; \big(r_{\tau_1}\cdot r_{\tau'_1}\big) \;\mid\; \cdots \;\mid\; \big(r_{\tau_s}\cdot r_{\tau'_s}\big)$$

wählen und erhalten damit einen sternfreien regulären Ausdruck, so dass $\varphi := \exists y\, \psi(y)$ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt.
Dies beendet den Beweis des Satzes von McNaughton und Papert. $\square$

3.5 Logische Reduktionen

Folie 45

Graph-Zusammenhang und Erreichbarkeit sind nicht FO-definierbar

Zur Erinnerung:

Aus Satz 3.10 wissen wir, dass es keinen $\mathsf{FO}[\leqslant]$-Satz ψ gibt, so dass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \models \psi \iff |B|$ ist gerade. Unter Verwendung von „logischen Reduktionen" können wir daraus folgern, dass *Zusammenhang* von und *Erreichbarkeit* in Graphen nicht FO-definierbar sind:

Satz 3.28. *Sei E ein 2-stelliges Relationssymbol.*

(a) Graph-Zusammenhang ist nicht FO*-definierbar.*

D.h.: Es gibt keinen $\mathsf{FO}[E]$-Satz φ_{Conn}, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ und die zugehörige[2] $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ ist zusammenhängend.

(b) Erreichbarkeit ist nicht FO*-definierbar.*

D.h.: Es gibt keine $\mathsf{FO}[E]$-Formel $\varphi_{Reach}(x,y)$, so dass für alle endlichen gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a,b] \iff$ es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg von Knoten a zu Knoten b.

Beweis.
(a): Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nutzen Satz 3.10. Angenommen, φ_{Conn} ist ein $\mathsf{FO}[E]$-Satz, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen $\mathcal{G}$ und die zugehörige $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \quad \iff \quad \mathcal{G} \text{ ist zusammenhängend.} \tag{3.13}$$

Idee: Nutze den Satz φ_{Conn}, um einen $\mathsf{FO}[\leqslant]$-Satz ψ zu konstruieren, so dass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$ gilt:

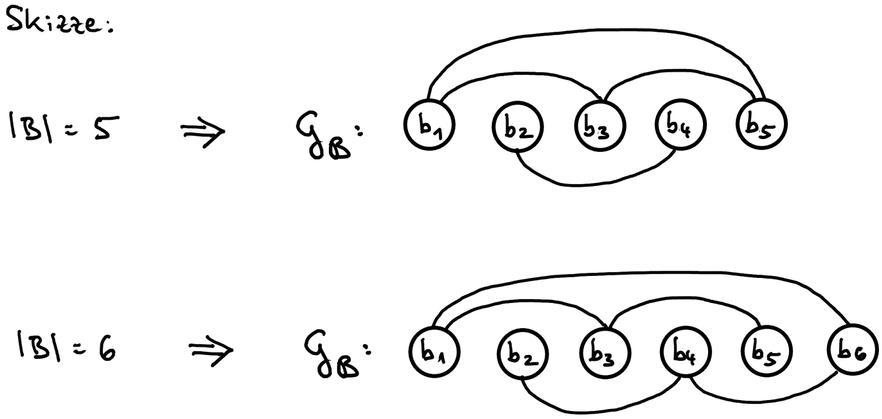
$$\mathcal{B} \models \psi \quad \iff \quad |B| \text{ ist gerade.}$$

Von Satz 3.10 wissen wir, dass es einen solchen Satz ψ nicht geben kann.

Um den Satz ψ zu konstruieren, ordnen wir jeder endlichen linearen Ordnung $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$ mit $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $b_1 <^{\mathcal{B}} b_2 <^{\mathcal{B}} \cdots <^{\mathcal{B}} b_n$ (für $n := |B|$) den Graphen $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ mit Knotenmenge B zu, dessen Kantenmenge aus genau den Kanten zwischen b_i und b_{i+2}, für alle $i \leqslant n{-}2$, und einer zusätzlichen Kante zwischen b_1 und b_n besteht.

[2] d.h. $A = V^{\mathcal{G}}$ und $E^{\mathcal{A}} = \{(u,v) \ : \ \{u,v\} \in E^{\mathcal{G}}\}$

Skizze:



Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

$$\mathcal{G}_\mathcal{B} \text{ ist zusammenhängend} \iff |B| \text{ ist gerade.} \tag{3.14}$$

Sei nun $\xi_E(x,y)$ eine $\mathsf{FO}[\leqslant]$-Formel, die besagt:

- „$y = x{+}2$“ oder „$x = y{+}2$“ oder
- „x ist das kleinste und y ist das größte Element bzgl. $\leqslant$“ oder
- „x ist das größte und y ist das kleinste Element bzgl. $\leqslant$“.

Klar: Eine solche $\mathsf{FO}[\leqslant]$-Formel $\xi_E(x,y)$ lässt sich leicht formulieren (Details: Übung).

Ausgewertet in einer linearen Ordnung $\mathcal{B}$ „simuliert“ die Formel $\xi_E(x,y)$ gewissermaßen die Kantenrelation des Graphen $\mathcal{G}_\mathcal{B}$.

Sei nun ψ der $\mathsf{FO}[\leqslant]$-Satz, der aus dem $\mathsf{FO}[E]$-Satz φ_{Conn} entsteht, indem jedes Atom der Form $E(z_1,z_2)$ durch die $\mathsf{FO}[\leqslant]$-Formel $\xi_E(z_1,z_2)$ ersetzt wird.
Der Satz ψ ist also gerade so konstruiert, dass beim Auswerten von ψ in $\mathcal{B}$ die Auswertung von φ_{Conn} in der zu $\mathcal{G}_\mathcal{B}$ gehörenden $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A}$ simuliert wird. Es gilt also für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{B}$, den ungerichteten endlichen Graphen $\mathcal{G}_\mathcal{B}$ und die zugehörige $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \models \psi \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \\ &\overset{(3.13)}{\iff} \quad \mathcal{G}_\mathcal{B} \text{ ist zusammenhängend} \\ &\overset{(3.14)}{\iff} \quad |B| \text{ ist gerade.} \end{aligned}$$

Aber dies ist ein Widerspruch zu Satz 3.10.

Somit muss unsere Annahme, dass der Satz φ_{Conn} existiert, falsch gewesen sein. Dies beendet den Beweis von *(a)*.

Folie 46

(b) folgt direkt aus *(a)*, denn:
Angenommen $\varphi_{Reach}(x,y)$ wäre eine $\mathsf{FO}[E]$-Formel, so dass für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt:
$\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a,b] \iff$ es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg von Knoten a zu Knoten b.
Dann ist

$$\varphi_{Conn} \ := \ \forall x \, \forall y \ \varphi_{Reach}(x,y)$$

ein $\mathsf{FO}[E]$-Satz, der in einem gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ genau dann erfüllt ist, wenn $\mathcal{A}$ stark zusammenhängend ist.
Insbesondere gilt dann für jeden ungerichteten Graphen $\mathcal{G}$ und die zu $\mathcal{G}$ gehörende $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ ist zusammenhängend.
Dies ist ein Widerspruch zu *(a)*.

$\square$

Folie 47

Logische Reduktionen

Bemerkung 3.29.
Die im Beweis von Satz 3.28 benutzte Vorgehensweise ist unter dem Begriff *logische Reduktion* bekannt.

Im Beweis von Teil *(b)* wurde gezeigt: Falls es eine $\mathsf{FO}[E]$-Formel gibt, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist, dann gibt es auch eine $\mathsf{FO}[E]$-Formel, die Graph-Zusammenhang definiert.

Somit wurde das Problem, einen $\mathsf{FO}[E]$-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert, auf das Problem reduziert, eine $\mathsf{FO}[E]$-Formel zu finden, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist.

Folie 48

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen $\mathsf{FO}[\leqslant]$-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine *gerade* Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen $\mathsf{FO}[E]$-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine *gerade* Kardinalität“ FO-definierbar.