

# Logik und Komplexität

Sommersemester 2018

## Übungsblatt 10

Zu bearbeiten bis 10. Juli 2018

### Aufgabe 1:

(12 + 13 = 25 Punkte)

- (a) Sei  $\sigma$  eine endliche Signatur und sei  $\mathcal{A}$  eine beliebige  $\sigma$ -Struktur. Zeigen Sie, dass  $\text{Th}(\mathcal{A})$  eine vollständige Theorie ist.
- (b) Beweisen Sie Lemma 4.39', d.h. beweisen Sie:  
Jede vollständige, effektiv axiomatisierbare Theorie ist entscheidbar.

### Aufgabe 2:

(5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) Es gibt Abbildungen, die weder monoton noch inflationär sind.
- (b) Es gibt Abbildungen, die monoton, aber nicht inflationär sind.
- (c) Es gibt Abbildungen, die inflationär, aber nicht monoton sind.
- (d) Es gibt Abbildungen, die keinen Fixpunkt besitzen.
- (e) Es gibt Abbildungen, die induktiv, aber weder monoton noch inflationär sind.

### Aufgabe 3:

(8 + 8 + 9 = 25 Punkte)

Sei  $\sigma = \{E\}$ .

- (a) Welche Klasse gerichteter endlicher Graphen wird von folgendem LFP[ $\sigma$ ]-Satz  $\varphi$  definiert?

$$\varphi := \forall x \left[ \mathbf{lfp}_{P,x} \forall y \left( P(y) \vee \neg E(y, x) \right) \right](x).$$

- (b) Geben Sie einen LFP[ $\sigma$ ]-Satz an, der von genau denjenigen endlichen ungerichteten Graphen erfüllt wird, die bipartit sind.

*Hinweis:* Ein ungerichteter Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

- (c) Wir erhalten die Logik MLFP („Monadische kleinste Fixpunktlogik“), indem wir in LFP-Formeln die Verwendung von Formeln der Form  $[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t})$  auf einstellige Relationen  $R$  beschränken.

Sei  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Geben Sie eine MLFP[ $<$ ]-Formel  $\varphi_m(x)$  an, die in einer endlichen geordneten Struktur besagt, dass der Rang von  $x$  ein Vielfaches von  $m$  ist.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

**Aufgabe 4:****(25 Punkte)**

Beweisen Sie Proposition 4.15, d.h. zeigen Sie, dass für jede Signatur  $\sigma$ , jede LFP[ $\sigma$ ]-Formel  $\varphi(R, \vec{x})$ , die positiv in  $R$  ist, und jede  $\sigma$ -Struktur  $\mathcal{A}$  gilt:  $F_{\varphi, \mathcal{A}}$  ist monoton.