Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

2. Mai 2018

Logik und Komplexität

Sommersemester 2018

Übungsblatt 2

Zu bearbeiten bis 9. Mai 2018

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie folgende Verschärfung des Satzes von Trakhtenbrot:

Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{E\}$ die Signatur, die aus einem zweistelligen Relationssymbol E besteht. Das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma_{\text{Graph}}]$ ist unentscheidbar.

Hinweis: Verwenden Sie dazu Aufgabe 2 auf Blatt 1. Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation von Strukturen über einer binären Signatur σ durch gerichtete Graphen (d.h. $\{E\}$-Strukturen).

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, sei $r \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei R ein r-stelliges Relationssymbol mit $R \notin \sigma$.

Eine $\text{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(\bar{x})$ mit $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ heißt *im Endlichen monoton in R*, wenn für alle endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle Relationen $R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}} \subseteq A^r$ gilt:

$$\text{Falls} \quad R_1^{\mathcal{A}} \subseteq R_2^{\mathcal{A}}, \quad \text{so} \quad [\![\varphi(\bar{x})]\!]^{(\mathcal{A}, R_1^{\mathcal{A}})} \subseteq [\![\varphi(\bar{x})]\!]^{(\mathcal{A}, R_2^{\mathcal{A}})},$$

wobei $[\![\varphi(\bar{x})]\!]^{(\mathcal{A}, R_i^{\mathcal{A}})} := \{\bar{a} \in A^r \ : \ (\mathcal{A}, R_i^{\mathcal{A}}) \models \varphi[\bar{a}]\}$.

Beweisen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist.

MONOTONIE IM ENDLICHEN:
Eingabe: Eine $\text{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(\bar{x})$.
Frage: Ist $\varphi(\bar{x})$ im Endlichen monoton in R?

Hinweis: Benutzen Sie die in Aufgabe 1 bewiesene Version des Satzes von Trakhtenbrot.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 3: **($12 + 12 + 12 = 36$ Punkte)**

Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

(a) Was drückt der folgende Satz in einem ungerichteten Graphen aus?

$$\forall X \left(\left(\exists x X(x) \ \wedge \ \exists x \neg X(x) \right) \rightarrow \ \exists x \exists y \left(X(x) \wedge E(x,y) \wedge \neg X(y) \right) \right)$$

(b) Geben Sie einen MSO[σ_{Graph}]-Satz an, der in einem ungerichteten Graphen G ausdrückt, dass G ein Baum ist.

(c) Geben Sie einen ESO[σ_{Graph}]-Satz an, der in einem ungerichteten Graphen G ausdrückt, dass G eine gerade Anzahl an Zusammenhangskomponenten enthält.

Aufgabe 4: **(14 Punkte)**

Hinweis: Die für diese Aufgabe nötigen Definitionen zu Baumautomaten und regulären Baumsprachen finden Sie auf der Rückseite von Blatt 1 und am Ende des Blattes.

Sei L die Baumsprache aus Aufgabe 3 von Blatt 1. Zeigen Sie, dass L MSO-definierbar ist.

Definitionen

Σ-Bäume und Logik. Zur Repräsentation von Σ-Bäumen durch logische Strukturen nutzen wir die Signatur $\tau_\Sigma := \{E_1, E_2\} \cup \{P_a \ : \ a \in \Sigma\}$, wobei E_1 und E_2 2-stellige und alle P_a 1-stellige Relationssymbole sind. Ist t ein Σ-Baum mit Knotenmenge $V(t)$, Kantenmengen $E_1(t)$ und $E_2(t)$ und Beschriftungsfunktion λ, so repräsentieren wir t durch die τ_Σ-Struktur $\mathcal{A}_t$ mit dem Universum $V(t)$ und den Relationen $E_i^{\mathcal{A}_t} := E_i(t)$ (für jedes $i \in \{1,2\}$) und $P_a^{\mathcal{A}_t} := \{v \in V(t) \ : \ \lambda(v) = a\}$ (für jedes $a \in \Sigma$). Ein SO[τ_Σ]-Satz φ *beschreibt* eine Baumsprache L, wenn gilt: $L = \{t \in T_\Sigma \ : \ \mathcal{A}_t \models \varphi\}$. Eine Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ heißt *MSO-definierbar*, wenn es einen MSO[τ_Σ]-Satz gibt, der L beschreibt.