Kapitel 4: Untere Schranken für die Größe von Formeln in Normalform

4.1 Kodierung von großen Zahlen durch Bäume geringer Höhe

Bemerkung: Die im Folgenden vorgestellten Baumkodierungen $\mathcal{T}(n)$ sowie das für dieses Kapitel zentrale Lemma 4.5 finden sich in Kapitel 10 des Buchs "Parameterized Complexity" von Flum und Grohe (Springer-Verlag, 2006).

Definition 4.1

(a) Die Funktion $Tower: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist rekursiv wie folgt definiert:

$$Tower(0) := 1$$

$$Tower(i+1) := 2^{Tower(i)} \quad \text{f.a. } i \in \mathbb{N}.$$

D.h.: $Tower(i)$ entspricht einem Turm, der aus i Zweierpotenzen gebildet wird.
Insbes. ist $Tower(3) = 2^{(2^2)}$, was wir i.d.R. verkürzt als 2^{2^2} schreiben.

(b) F.a. $i, n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $Bit(i,n)$ um das i-te Bit der Binärdarstellung von n zu bezeichnen. D.h.

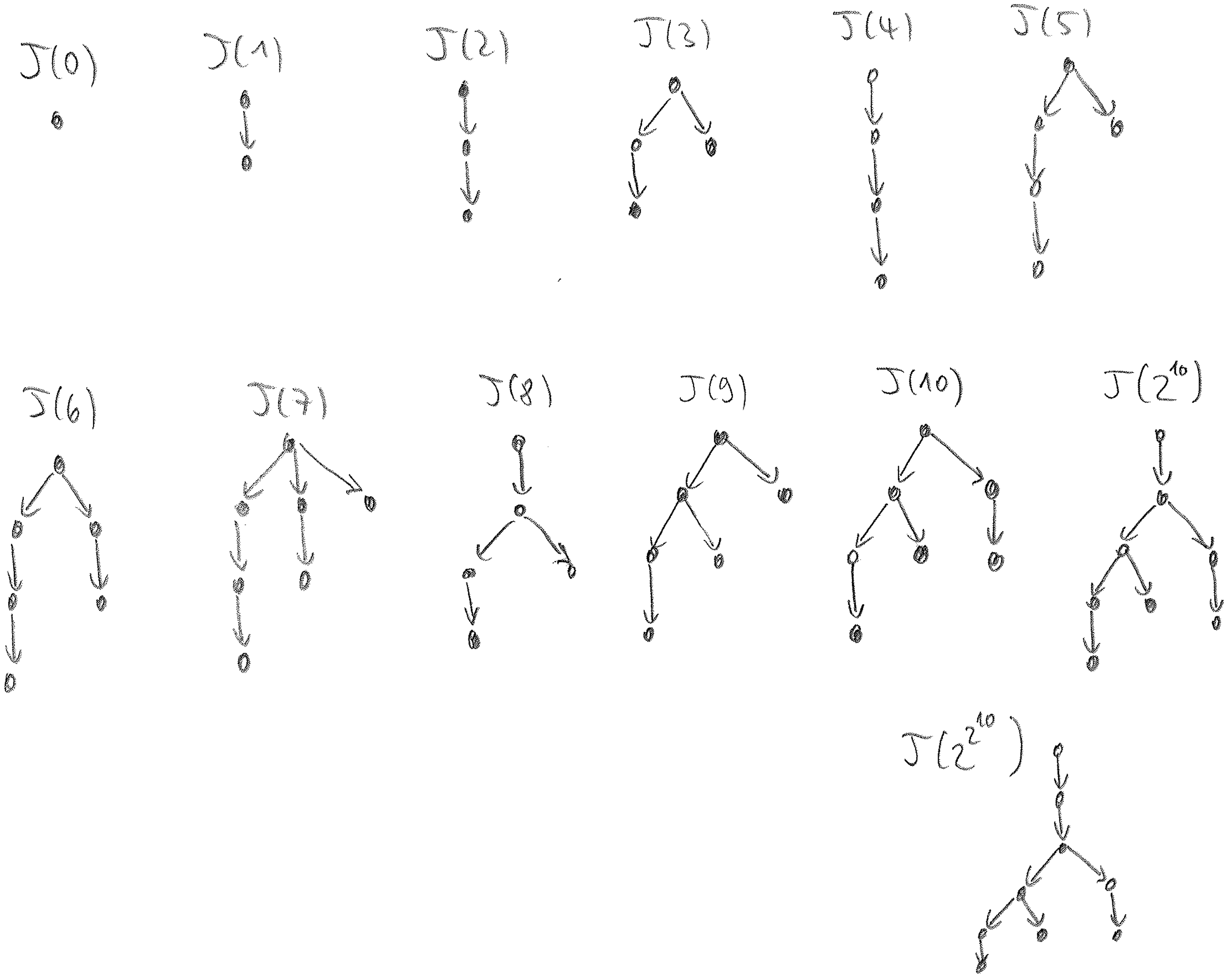
$$Bit(i,n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor \text{ gerade ist} \\ 1 & \text{-"- ungerade -"-} \end{cases}$$

Definition 4.2 ($J(n)$)

Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ repräsentieren wir durch einen gerichteten Baum $J(n)$ wie folgt:

- $J(0)$ ist der Baum, der aus nur einem Knoten besteht
- Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist $J(n)$ der Baum, der aus einer Wurzel besteht, die für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Bit}(i,n) = 1$ ein Kind hat, das die Wurzel des Baumes $J(i)$ ist.

Skizze:



<u>Lemma 4.3</u>

F.a. $h, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\text{Höhe}(\mathcal{J}(n)) \leq h \iff n \leq \text{Tower}(h) - 1$$

wobei die Höhe eines Baumes definiert ist als die max. Anzahl der Kanten auf dem Weg von der Wurzel des Baumes zu einem Blatt.

<u>Beweis:</u> Per Induktion nach h.

<u>$h=0$.</u> <u>zu zeigen:</u> f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{Höhe}(\mathcal{J}(n)) \leq 0 \iff n \leq \underbrace{\text{Tower}(0)}_{=1} - 1$$

<u>Beweis:</u> Für $n=0$ ist $\text{Höhe}(\mathcal{J}(n)) = 0$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ ist $\text{Höhe}(\mathcal{J}(n)) \geq 1$

Also gilt: $\text{Höhe}(\mathcal{J}(n)) \leq 0 \iff n \leq 0$ ✓

<u>$h \to h+1$</u> <u>Ind.annahme:</u> f.a. $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\text{Höhe}(\mathcal{J}(i)) \leq h \iff i \leq \text{Tower}(h)-1$

<u>zu zeigen:</u> f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\text{Höhe}(\mathcal{J}(n)) \leq h+1 \iff n \leq \text{Tower}(h+1)-1$

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Es gilt:

$$\text{Höhe}(\mathcal{J}(n)) \leq h+1 \underset{\text{Def 4.2}}{\iff} \text{f.a. } i \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{Bit}(i,n)=1 \text{ ist } \text{Höhe}(\mathcal{J}(i)) \leq h$$

$$\underset{\text{Ind.ann.}}{\iff} \text{f.a. } i \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{Bit}(i,n)=1 \text{ ist } i \leq \text{Tower}(h)-1$$

Gemäß Definition der Binärkodierung gilt außerdem f.a. $\ell, n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq 2^{\ell}-1 \iff \text{f.a. } i \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{Bit}(i,n)=1 \text{ ist } i \leq \ell-1$$

(dazu beachte, dass $\sum_{i=0}^{\ell-1} 2^i = 2^{\ell}-1$).

Für $\ell := \text{Tower}(h)$ folgt:

$\text{Höhe}(\mathcal{J}(n)) \leq h+1 \iff \text{f.a. } i \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{Bit}(i,n)=1 \text{ ist } i \leq \text{Tower}(h)-1 \iff n \leq \underbrace{2^{\text{Tower}(h)}-1}_{=\text{Tower}(h+1)-1}$ □

Notation 4.4

Sei $\sigma := \{E\}$.

Für eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ und ein $a \in A$ sei

$$A_a := \left\{ a' \in A : \begin{array}{l} a' \text{ ist im gerichteten Graphen } \mathcal{A} \\ \text{von } a \text{ aus erreichbar} \end{array} \right\},$$

und $\mathcal{A}_a := \mathcal{A}[A_a]$ sei die durch A_a induzierte Substruktur von $\mathcal{A}$.

Lemma 4.5

Sei $\sigma := \{E\}$. Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$, s.d. es für jedes $h \in \mathbb{N}$ eine FO[σ]-Formel $eq_h(x,y)$ der Länge $\leq c \cdot h$ gibt, s.d. f.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a, b \in A$ gilt:

Falls ex. $m, n \in \{0, \dots, \mathrm{Tower}(h) - 1\}$ s.d.

$\mathcal{A}_a \cong \mathcal{J}(m)$ und $\mathcal{A}_b \cong \mathcal{J}(n)$, so gilt:

$$\mathcal{A} \models eq_h[a,b] \iff m = n.$$

Beweis: Wir konstruieren die Formeln $(eq_h(x,y))_{h \in \mathbb{N}}$ induktiv nach h.

Für $h = 0$ können wir

$$eq_0(x,y) := (x = x \wedge y = y)$$

wählen, da $\{0, \dots, \mathrm{Tower}(0) - 1\} = \{0\}$ ist.

Im Folgenden betrachten wir $h \in \mathbb{N}$, nehmen an, dass die Formel $eq_h(x,y)$ bereits konstruiert ist und konstruieren die Formel $eq_{h+1}(x,y)$ unter Verwendung von eq_h.

F.a. $m, n \in \mathbb{N}$ gilt offensichtlicherweise

$$m = n \iff \begin{array}{l} \text{f.a. } i \in \mathbb{N} \text{ mit } Bit(i,m)=1 \text{ ist } Bit(i,n)=1 \\ \text{und} \\ \text{f.a. } j \in \mathbb{N} \text{ mit } Bit(j,n)=1 \text{ ist } Bit(j,m)=1 \end{array}$$

Daher drückt die Formel

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) := \; & \forall x' \left(E(x,x') \rightarrow \exists y' \left(E(y,y') \wedge eq_{th}(x',y') \right) \right) \wedge \\ & \forall y'' \left(E(y,y'') \rightarrow \exists x'' \left(E(x,x'') \wedge eq_{th}(x'',y'') \right) \right) \end{aligned}$$

das Gewünschte aus. Wenn wir allerdings $eq_{th+1} := \varphi$ wählen, ist eq_{th+1} mindestens doppelt so lang wie eq_{th}, und daher kann es kein $c \in \mathbb{N}$ geben, s.d. für jedes $h \in \mathbb{N}$ die Formel eq_{th} die Länge $\leq c \cdot h$ hat.

Wir formen daher die Formel $\varphi(x,y)$ zu einer äquivalenten Formel um, in der die Formel eq_{th} nur 1x genutzt wird.

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) \equiv \; & \left(\exists z \, E(x,z) \leftrightarrow \exists z \, E(y,z) \right) \wedge \\ & \forall x' \forall y'' \Big(\left(E(x,x') \wedge E(y,y'') \right) \rightarrow \\ & \quad \exists y' \exists x'' \big(E(y,y') \wedge E(x,x'') \wedge \\ & \quad\quad eq_{th}(x',y') \wedge eq_{th}(y',y'') \big) \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \equiv \; & \left(\exists z \, E(x,z) \leftrightarrow \exists z \, E(y,z) \right) \wedge \\ & \forall x' \forall y'' \Big(\left(E(x,x') \wedge E(y,y'') \right) \rightarrow \\ & \quad \exists y' \exists x'' \big(E(y,y') \wedge E(x,x'') \wedge \\ & \quad\quad \forall u \forall v \left(\left((u = x' \wedge v = y') \vee (u = x'' \wedge v = y'') \right) \right. \\ & \quad\quad\quad \left. \rightarrow eq_{th}(u,v) \right) \big) \Big) \end{aligned}$$

$$=: eq_{th+1}(x,y)$$

Man kann leicht nachprüfen (Details: Übung), dass diese Formel $eq_{T_{h+1}}(x,y)$ das Gewünschte aussagt und dass es außerdem ein $c \in \mathbb{N}$ gibt, s.d. f.a. $h \in \mathbb{N}$ gilt: die Formel $eq_{T_h}(x,y)$ hat die Länge $\leq c \cdot h$.

$\square$

4.2 Eine untere Schranke für die Länge von Formeln in Gaifman-Normalform

Notation 4.6

(a) Im Folgenden schreiben wir kurz

"Es gibt Formeln $(\varphi_h)_{h \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ der Länge $O(h)$"

um auszudrücken, dass es ein $c \in \mathbb{N}$ und für jedes $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine Formel φ_h der Länge $\leq c \cdot h$ gibt.

(b) Wir setzen $root(x) := \neg \exists y\, E(y,x)$.

Theorem 4.7

Sei $\sigma := \{E\}$.
Es gibt FO[σ]-Sätze $(\varphi_h)_{h \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ der Länge $O(h)$, s.d. für jedes $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt:
Jeder zu φ_h äquivalente FO[σ]-Satz in Gaifman-Normalform hat die Länge $\geq$ Tower(h).

Beweis:

Für jedes $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ setze

$$\varphi_h := \forall x \left(root(x) \rightarrow \exists y \left(root(y) \wedge \neg x{=}y \wedge eq_{T_h}(x,y) \right) \right),$$

wobei $root(x)$ und $eq_{T_h}(x,y)$ gemäß Notation 4.6 und Lemma 4.5 gewählt sind.

Somit haben die Formeln $(\varphi_h)_{h\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ die Länge $O(h)$.

Sei nun $h\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ beliebig und sei ψ ein zu φ_h äquivalenter FO[σ]-Satz in GNF. Dann gibt es ein $s\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ und basis-lokale FO[σ]-Sätze $\chi_1,\dots,\chi_s$, s.d. ψ eine Boolesche Kombination von $\chi_1,\dots,\chi_s$ ist. Für jedes $i\in\{1,\dots,s\}$ sei χ_i von der Form

$$\exists x_{i,1}\cdots\exists x_{i,\ell_i}\underbrace{\Big(\bigwedge_{1\leq\nu<\mu\leq\ell_i} dist(x_{i,\nu},x_{i,\mu})>2r_i \;\wedge\; \bigwedge_{\nu=1}^{\ell_i}\lambda_i(x_{i,\nu})\Big)}_{=:\vartheta_i(x_{i,1},\dots,x_{i,\ell_i})}$$

wobei $\ell_i\in\mathbb{N}_{\geq 1}$, $r_i\in\mathbb{N}$ und $\lambda_i(x)$ r_i-lokal um x ist.

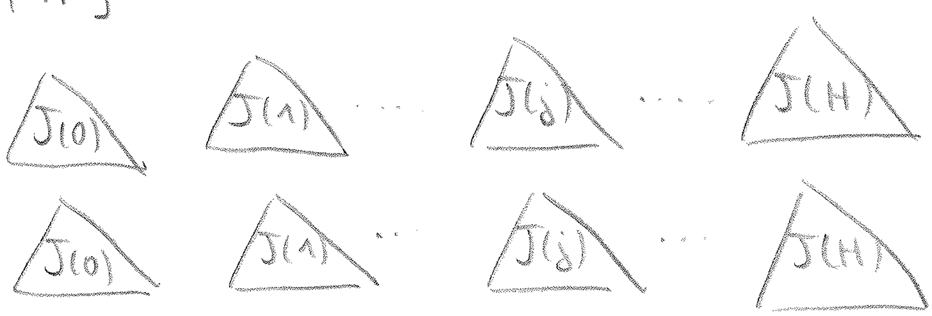
Angenommen, die Länge von ψ ist $\leq H := \mathrm{Tower}(h)-1$.

Dann ist auch $\sum_{i=1}^{s}\ell_i \leq H$. (*)

Betrachte die σ-Struktur $\mathcal{A}$, die aus der disjunkten Vereinigung von je 2 disjunkten Kopien von $J(j)$ für alle $j\in\{0,\dots,H\}$ besteht.

Skizze:

$\mathcal{A}$:



Gemäß Wahl von φ_h gilt: $\mathcal{A}\models\varphi_h$; und da ψ äquivalent zu φ_h ist, gilt auch: $\mathcal{A}\models\psi$. (I)

OBdA ex. $\tilde{s} \in \{0,\dots,s\}$ s.d. gilt:

① $\mathcal{A} \models \chi_i$ f.a. $i \in \{1,\dots,\tilde{s}\}$ und

② $\mathcal{A} \not\models \chi_i$ f.a. $i \in \{\tilde{s}+1,\dots,s\}$.

Wegen ① gibt es für jedes $i \in \{1,\dots,\tilde{s}\}$ Elemente $a_{i,1},\dots,a_{i,\ell_i} \in A$ s.d. $\mathcal{A} \models \vartheta_i[a_{i,1},\dots,a_{i,\ell_i}]$.

Sei $Z := \bigcup_{i=1}^{\tilde{s}} \{a_{i,1},\dots,a_{i,\ell_i}\}$. Es gilt:

$$|Z| \leq \sum_{i=1}^{\tilde{s}} \ell_i \underset{(*)}{\leq} H.$$

Gemäß Wahl von $\mathcal{A}$ ex. $j \in \{0,\dots,H\}$ s.d. keine der beiden disjunkten Kopien von $\mathcal{I}(j)$ in $\mathcal{A}$ ein Element aus Z enthält.

Sei $\mathcal{A}^{\dot{}}$ die σ-Struktur, die aus $\mathcal{A}$ durch Löschen <u>einer</u> der beiden disjunkten Kopien von $\mathcal{I}(j)$ entsteht.

Gemäß Wahl von φ_h gilt: $\mathcal{A}^{\dot{}} \not\models \varphi_h$; und da ψ äquivalent zu φ_h ist, gilt auch: $\mathcal{A}^{\dot{}} \not\models \psi$. (II)

Aber das Universum von $\mathcal{A}^{\dot{}}$ enthält alle Elemente aus Z, und für jedes $r \in \mathbb{N}$ und jedes $a_{i,\nu} \in Z$ ist

$$\left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}^{\dot{}}}(a_{i,\nu}), a_{i,\nu}\right) \cong \left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(a_{i,\nu}), a_{i,\nu}\right).$$

Somit gilt für jedes $i \in \{1,\dots,\tilde{s}\}$, dass $\mathcal{A}^{\dot{}} \models \vartheta_i[a_{i,1},\dots,a_{i,\ell_i}]$, und somit gilt

①' $\mathcal{A}^{\dot{}} \models \chi_i$ f.a. $i \in \{1,\dots,\tilde{s}\}$

<u>Behauptung:</u> (2'): $\mathcal{A}^{\tilde{\gamma}} \not\models \chi_i$, f.a. $i \in \{\tilde{s}+1, \dots, s\}$

<u>Beweis:</u> Sei $i \in \{\tilde{s}+1, \dots, s\}$. Angenommen $\mathcal{A}^{\tilde{\gamma}} \models \chi_i$.

Dann ex $a_{i,1}, \dots, a_{i,l_i} \in A^{\tilde{\gamma}}$ s.d. $\mathcal{A}^{\tilde{\gamma}} \models \vartheta_i[a_{i,1}, \dots, a_{i,l_i}]$.

Gemäß Konstruktion von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^{\tilde{\gamma}}$ gilt f.a. $v \in \{1, \dots, l_i\}$:

$a_{i,v} \in A$ und $\left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(a_{i,v}), a_{i,v}\right) \cong \left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}^{\tilde{\gamma}}}(a_{i,v}), a_{i,v}\right)$ f.a. $r \in \mathbb{N}$

Somit gilt auch: $\mathcal{A} \models \vartheta_i[a_{i,1}, \dots, a_{i,l_i}]$ und daher

$\mathcal{A} \models \chi_i$. ↯ Widerspruch zu (2).

□ Beh (2').

Da ψ eine Boolesche Kombination der Sätze $\chi_1, \dots, \chi_s$ ist, folgt aus (1)+(2) und (1')+(2'): $\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{A}^{\tilde{\gamma}} \models \psi$.

Aber gemäß (I) und (II) gilt: $\mathcal{A} \models \psi$ und $\mathcal{A}^{\tilde{\gamma}} \not\models \psi$.

↯ Widerspruch!

□

<u>Bemerkung 4.8</u>

Theorem 4.7 für "Länge $O(h^4)$" statt "Länge $O(h)$" wurde von Dawar, Grohe, Kreutzer, Schweikardt (ICALP 2007) gezeigt. Die Verbesserung zu "Länge $O(h)$" ist aus der Arbeit von Heimberg, Kuske, Schweikardt (LICS 2013).

4.3 Eine untere Schranke für die Länge von Feferman-Vaught-Zerlegungen

Das folgende Theorem bezieht sich auf Definition 2.2 (Feferman-Vaught-Zerlegungen) für den Spezialfall, in dem $L = FO$, $\sigma = \{E/2\}$ und $k = \ell = 0$ ist.
$\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ und $\bar{y} = (y_1, \dots, y_\ell)$ sind dann <u>leere</u> Listen von Variablen und $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ ist ein $FO[\sigma_2]$-<u>Satz</u>, wobei $\sigma_2 := \{E, X, Y\}$ mit 2 unären Relationssymbolen X und Y ist.

Theorem 4.9
Sei $\sigma := \{E\}$.
Es gibt $FO[\sigma]$-Sätze $(\varphi_h)_{h \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ der Länge $O(h)$, s.d. für jedes hinreichend große $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt:
Jede Feferman-Vaught-Zerlegung Δ in FO von φ_h bzgl. $(\bar{x}; \bar{y})$ für $\bar{x} := \bar{y} := ()$ enthält mind. ein Paar $(\alpha, \beta) \in \Delta$, bei dem mindestens einer der beiden Sätze α, β die Länge $> \text{Tower}(h)$ hat.

<u>Beweis:</u>
Für jedes $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ setze

$$\varphi_h := \exists x \exists y \left(root(x) \wedge root(y) \wedge \neg eq_{h+3}(x, y) \right),$$

wobei $root(x)$ und $eq_{h+3}(x,y)$ gemäß Notation 4.6 und Lemma 4.5 gewählt sind.

Somit haben die Formeln $(\varphi_h)_{h\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ die Länge $O(h)$.

Sei nun $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ beliebig und sei Δ eine Feferman-Vaught-Zerlegung in FO von φ_h bzgl. $(\bar{x};\bar{y})$ für $\bar{x} := \bar{y} := ()$ (dh $k = l = 0$). Gemäß Definition 2.2 gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit $A \cap B = \emptyset$:

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \varphi_h \iff \text{ex. } (\alpha,\beta) \in \Delta \text{ s.d. } \mathcal{A} \models \alpha \text{ und } \mathcal{B} \models \beta,$$

und Δ ist eine endliche, nicht-leere Menge von Tupeln (α,β), wobei α, β $FO[\sigma]$-Sätze sind.

Sei $\mathcal{F} := \{\alpha, \beta : (\alpha,\beta) \in \Delta\}$ die Menge aller Formeln, die in Δ vorkommen. Wir müssen zeigen, dass mindestens eine der Formeln in $\mathcal{F}$ die Länge $>$ Tower(h) hat.

Angenommen <u>jede</u> Formel in $\mathcal{F}$ hat Länge $\leq H :=$ Tower(h)

OBdA können wir dann annehmen, dass jede Formel in $\mathcal{F}$ nur Variablen aus $\{v_1, \dots, v_H\}$ enthält (falls nicht, benennen wir Variablen konsistent um!). Dann ist jede Formel in $\mathcal{F}$ ein Wort der Länge $\leq H$ über dem Alphabet

$$\Sigma := \{v_1,\dots,v_H\} \cup \{E, =\} \cup \{(,)\} \cup \{,\} \cup \{\exists, \forall, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}.$$

Also ist

$$|\mathcal{F}| \leq |\{w \in \Sigma^+ : |w| \leq H\}| \leq \sum_{l=1}^{H} |\Sigma|^l \leq |\Sigma|^{H+1} = (H+12)^{H+1}$$

$$= 2^{(\log_2(H+12))\cdot(H+1)}$$

Für alle hinreichend großen h ist $(\log_2(H+12))\cdot(H+1) < 2^H$, und somit $|\mathcal{F}| < 2^{(2^H)} =$ Tower$(h+2)$. ⊛

Für jedes $i \in \{0, \dots, \mathrm{Tower}(h+3)-1\}$ sei

$M_i := \{ \psi \in F : \mathcal{J}(i) \models \psi \}$

Klar: $M_i \subseteq F$. Wegen $|F| < \mathrm{Tower}(h+2)$ gibt es weniger als $2^{\mathrm{Tower}(h+2)} = \mathrm{Tower}(h+3)$ verschiedene Teilmengen von F. Somit gibt es Zahlen $i, j \in \{0, \dots, \mathrm{Tower}(h+3)-1\}$ mit $i \neq j$ und $M_i = M_j$.

Für diese beiden Zahlen i, j sei $\mathcal{A}$ die σ-Struktur, die aus zwei disjunkten Kopien von $\mathcal{J}(i)$ und $\mathcal{J}(j)$ besteht — d.h.: $\mathcal{A} := \mathcal{J}(i) \sqcup \mathcal{J}(j)$.

Gemäß unserer Wahl von φ_h gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_h$.

Da Δ eine FVZ von φ_h ist, gibt es $(\alpha, \beta) \in \Delta$ s.d. $\mathcal{J}(i) \models \alpha$ und $\mathcal{J}(j) \models \beta$

Wegen $M_i = M_j$ und $\beta \in M_j$ gilt: $\beta \in M_i$.

Gemäß Definition von M_i gilt also: $\mathcal{J}(i) \models \beta$.

Sei $\mathcal{J}'(i)$ eine zu $\mathcal{J}(i)$ isomorphe Kopie mit zum Universum von $\mathcal{J}(i)$ disjunktem Universum. Dann gilt: $\mathcal{J}'(i) \models \beta$.

Also: $\mathcal{J}(i) \models \alpha$ und $\mathcal{J}'(i) \models \beta$.

Da Δ eine FVZ von φ_h und $(\alpha, \beta) \in \Delta$ ist, gilt für die σ-Struktur $\mathcal{A}' := \mathcal{J}(i) \sqcup \mathcal{J}'(i)$, dass $\mathcal{A}' \models \varphi_h$.

↯ Widerspruch zur Wahl der Formel φ_h. $\square$

Bemerkung 4.10

Eine etwas schwächere Variante von Theorem 4.9 wurde von Dawar, Grohe, Kreutzer, Schweikardt (ICALP 2007) gezeigt; der hier vorgestellte Beweis ist aus der Arbeit von Kuske und Schweikardt (ICALP 2018).