Seien $C_1, \ldots, C_N$ die Gatter des Schaltkreises, sodass C_j Eingänge $C_{j'}, C_{j''}$ mit $j', j'' < j$ hat. Sei $k = \frac{m}{2}$. $\Rightarrow C_N$ ist der Ausgang

Wir definieren induktiv für $i \geq 0$:

- Sei $1 \leq j \leq N$ der kleinste Index, für den es ein $H_i \in \mathcal{G}_i \cup \mathcal{B}_i$ gibt, sodass jeder Zaun um H_i am Gatter C_j zum Zeitpunkt i die Länge $> \frac{k}{2}$ hat.
- $\mu(H_i) := C_j$
- $\mathcal{G}_{i+1} := \mathcal{G}_i \setminus \{H_i\}$
- $\mathcal{B}_{i+1} := \mathcal{B}_i \setminus \{H_i\}$

Dies wird solange wiederholt, bis es kein H_i mit der gewünschten Eigenschaft mehr gibt.

$\boxed{\text{Lemma 3.9}}$ $\|G_0\| = \dfrac{(m^2-2)!}{(m!)^{(m-1)}\,(m-2)!\,(m-1)!}$.

$\|B_0\|$

Beweis: $\|G_0\|$ ist die Anzahl der Partitionen von m^2-2 Knoten in $(m-1)$ Mengen der Größe m und eine Menge der Größe $m-2$.

Eine gelabelte Partition ~~die~~ weist jedem Knoten die Nummer der Partition $(1..m)$ und die Position $(1-m)$ in der Partition zu.

$\Rightarrow$ es gibt $(m^2-2)!$ gelabelte Partitionen.

$\Rightarrow$ jeder (ungelabelte) Partition entsprechen $(m!)^{m-1}(m-2)!\,(m-1)!$ gelabelte Partitionen durch Vertauschen der Partitionen (Faktor $(m-1)!$) und innerhalb der Partitionen (Faktor $(m!)^{m-1}(m-2)!$).

$$\Rightarrow \|G_0\| = \frac{(m-2)!}{(m!)^{m-1}\,(m-2)!\,(m-1)!} \qquad \square$$

$\boxed{\text{Lemma 3.10}}$

$$|\mathrm{dom}(\mu)| \geq \|\mathcal{G}_0\| = \frac{(m^2-2)!}{(m!)^{(m-1)}\,(m-2)!\,(m-1)!}$$

A

Beweis: Siehe Lemma 2 in (HC99).

$\boxed{\text{Lemma 3.11}}$ (Für $k = \frac{m}{2}$.)

Die Anzahl der Graphen aus $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{B}_0$, die von μ zu einem Gatter C abgebildet worden ist höchstens $2 \cdot \frac{(km)^{\frac{r}{2}}(m^2-m)^{r/2}(m^2-2-r)!}{(m!)^{m-1}(m-2)!\,(m-1)!}$,

B

wobei r die größte gerade Zahl $\leq \sqrt{\frac{m}{2}}$ ist.

Beweis: Siehe Lemma 4 in (HC99).

Beweis von Satz 3.7:

Die Anzahl der Gatter eines monotonen interpolierenden Schaltkreises ist nach Lemma 3.10 und 3.11 $\geq \frac{A}{B}$.

Durch Abschätzen erhalten wir ($k = \frac{m}{2}$, $\frac{r}{2} \geq \lfloor\sqrt{\frac{m}{8}}\rfloor$) für $m \geq 5$:

$$\frac{A}{B} = \frac{(m^2-2)!}{(km)^{\frac{r}{2}}(m^2-m)^{\frac{r}{2}}(m^2-2-r)!} \geq \frac{1}{2}\cdot 1{,}8^{\lfloor\sqrt{\frac{m}{8}}\rfloor}$$

$\square$

(Details siehe Rechnung in (HC99).)