

Um eine untere Schranke für cutting planes mit Hilfe der Interpolationsmethode zu zeigen, benötigen wir eine Klausurmenge $F = F^{X,Y} \cup F^{X,Z}$, wobei die gemeinsamen Variablen X in $F^{X,Y}$ nur positiv vorkommen, für die die Interpolante keine kleinen monotonen vollen Schaltkreise hat.

Dies wurde zuerst von Pudlak (1997) für die folgenden Clique-Formeln gezeigt:

- CLIQUE $_n^k$: $x_e \hat{=} \text{"e ist Kante in G"}$
- $y_v^i \hat{=} \text{"v ist der i-te Knoten in einer k-Clique"}$
- $z_v^i \hat{=} \text{"v erhält in einer (k-1)-Färbung die Farbe i"}$

$$F^{X,Y} \begin{cases} \bullet \bigvee_{v \in [n]} y_v^i & \text{für } 1 \leq i \leq k \\ \bullet \overline{y_v^i} \vee \overline{y_w^{i'}} \vee x_{(v,w)} & 1 \leq i < i' \leq k; v, w \in [n] \end{cases}$$

$$F^{X,Z} \begin{cases} \bullet \overline{z_v^i} \vee \overline{z_w^{i'}} & \text{für } 1 \leq i < i' \leq k; v \in [n] \\ \bullet \overline{z_v^i} \vee \overline{z_w^i} \vee \overline{x_{(v,w)}} & \text{für } 1 \leq i \leq k; v, w \in [n] \end{cases}$$

Für einen Graphen G mit $V(G) = [n]$ sei

$$\alpha(x_e) := \begin{cases} 0, & e \notin E(G) \\ 1, & e \in E(G) \end{cases} \quad \text{eine part. Belegung } \alpha: X \rightarrow \{0,1\}.$$

Dann gilt:

$$F^{X,Y} \Big|_{\alpha_G} \text{ erfüllbar} \iff G \text{ hat eine } k\text{-clique.}$$

$$F^{X,Z} \Big|_{\alpha_G} \text{ erfüllbar} \iff G \text{ ist } (k-1)\text{-partit.}$$

Daraus folgt: $\text{CLIQUE}_n^k = F^{X,Y} \cup F^{X,Z}$ ist unerfüllbar.

Eine Interpolant für CLIQUE_n^k ist eine Funktion f über den Variablen X mit

$$f(\alpha) = 0 \implies \alpha = \alpha_G \text{ und } G \text{ enthält keine } k\text{-clique}$$

$$f(\alpha) = 1 \implies \alpha = \alpha_G \text{ und } G \text{ ist nicht } (k-1)\text{-partit}$$

Satz 3.6 (Pudlák '97) - hier ohne Beweis

Für $k = \left\lfloor \frac{1}{8} \left(\frac{n}{\log n} \right)^{\frac{2}{3}} \right\rfloor$ hat jeder monotone kelle Schaltkreis, der eine Interpolant von CLIQUE_n^k berechnet, mindestens

$$\frac{1}{2} \Omega \left(\left(\frac{n}{\log n} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \text{ Gatter.}$$

Daraus folgt dann mit Satz 3.5, dass cutting planes nicht p -beschränkt ist. Anstelle von CLIQUE_n^k betrachte wir eine ähnliche Klauselmenge und zeige für diese untere Schranke an die Größe monotoner Schaltkreise.

3.3 Das kaputte Fliegengitter

3-14

Um untere Schranken für cutting planes zu zeigen, benötigen wir Klauselmengen, deren entsprechende Ungleichungen den Anforderungen aus Satz 3.4 und 3.5 entsprechen.

Für diese zeigen wir dann eine exponentielle untere Schranke an die Größe monotoner reeller Schaltkreise.

Die Klauselmenge ist KF_m "Broken Mosquito Screen" aus [Haken, Cook '97].

Das kombinatorische Problem ist das folgende:

Gegeben ein Graphen G mit $n = m^2 - 2$ Knoten,

G ist "good", falls $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_m$ mit

$|V_i| = m$, $i = 1, \dots, m-1$, $|V_m| = m-2$, alle V_i sind Cliquen in G .

G ist "bad", falls $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_m$ mit

$|V_i| = m$, $i = 1, \dots, m-1$, $|V_m| = m-2$, alle V_i sind stabile Mengen in G .

Lemma: Ein Graph ist nicht "good" und "bad" gleichzeitig.

Sei G Graph mit $V(G) = [n]$ und

$\alpha_G = X \rightarrow \{0,1\}$ part. Ass. mit

$$\alpha_G(x_e) = \begin{cases} 0, & e \notin E(G) \\ 1, & e \in E(G) \end{cases}$$

Dann $F_{\text{bad}}^m \mid_{\alpha_G}$ erfüllbar $\Leftrightarrow G$ ist bad

$F_{\text{good}}^m \mid_{\alpha_G}$ erfüllbar $\Leftrightarrow G$ ist good.

► \mathcal{G}_0 ist die Menge aller Graphen, die aus einer disjunkten Vereinigung von $m-1$ m -Clique und einer $(m-2)$ -Clique bestehen.

► \mathcal{B}_0 ist die Menge aller Graphen, deren Komplement in \mathcal{G}_0 ist.

(Alle \mathcal{G}_0 sind minimal "good" und alle \mathcal{B}_0 maximal "bad".)

Satz 3.7 (HC'97)

Sei $m \geq 5$ und C ein monotoner reeller Schaltkreis mit Eingängen $x_{v,w}, 1 \leq v < w \leq m^2 - 2$, sodass für alle $G \in \mathcal{G}_0 \cup \mathcal{B}_0$ gilt:

$$C(\alpha_G) = 0 \Rightarrow G \in \mathcal{B}_0 \text{ und}$$

$$C(\alpha_G) = 1 \Rightarrow G \in \mathcal{G}_0.$$

Dann hat C mindestens $\frac{1}{2} \cdot 1,8^{\lfloor \frac{m}{8} \rfloor}$ Gatter.

Mit Satz 3.5 und $\|K_{F_m}\| = O(m^6)$

erhalten wir:

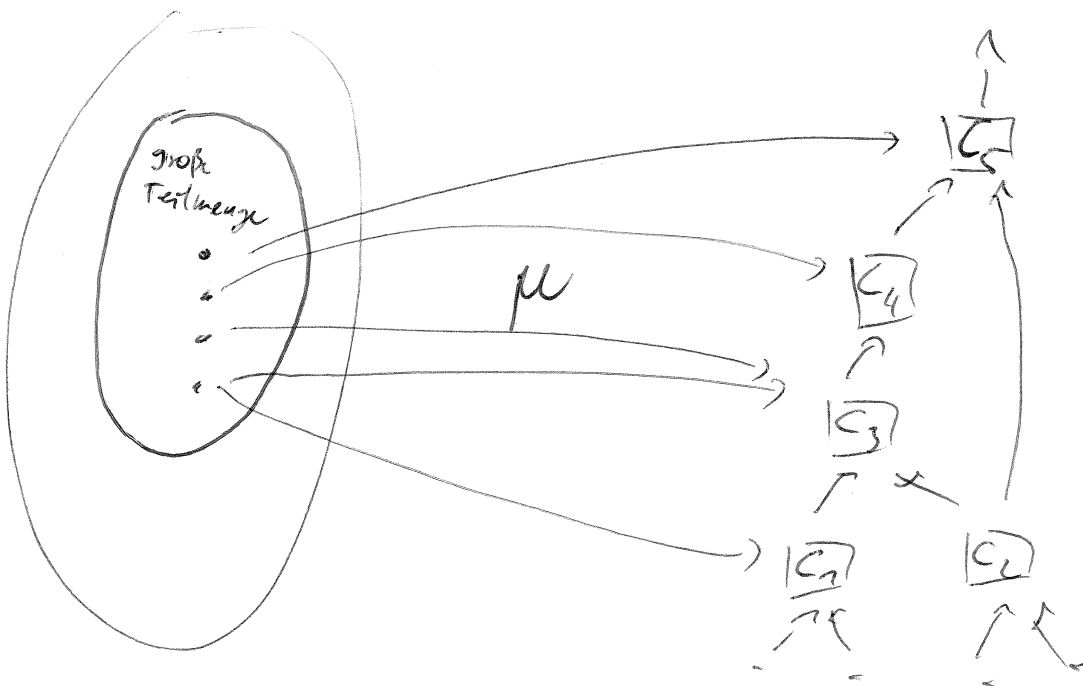
Satz 3.8

Jede Cutting-Planes-Widerlegung von K_{F_m} hat die Länge $\geq \Omega(\|K_{F_m}\|^{\frac{1}{12}})$.

Beweisstrategie für Satz 3.7:

Graphen in $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{B}_0 =$

Schaltkreis:



- $\text{dom}(\mu) \subseteq \mathcal{G}_0 \cup \mathcal{B}_0$ ist groß (A)

- $\max_{C_i} |\{G \in \text{dom}(\mu) \mid \mu(G) = C_i\}|$ ist klein (B)

$\implies \# \text{Gatter} \geq \frac{A}{B}$ ist groß.

Um die Abbildung μ zu definieren,
benötigen wir das folgende Konzept:

Sei $G_i \subseteq G_0$ und $B_i \subseteq B_0$ Teilmengen
"zum Zeitpunkt i ".

Für ein Gatter C_j und $G \in G_i$ und $E' \subseteq E(G)$

$F = \bigwedge_{e \in E'} x_e$ ein Zaun um G am Gatter C_j zum Zeitpunkt i ,

falls für alle $B \in B_i$ gilt: $C_j(\alpha_B) < C_j(\alpha_G) \Rightarrow F(\alpha_B) = 0$.

($F(\alpha_B) = 0 \Leftrightarrow \alpha_B \notin F \Leftrightarrow E' \not\subseteq E(B)$; $F(\alpha_G) = 1$)

Analog sei für C_j , $B \in B_i$, $E' \cap E(B) = \emptyset$ (d.h. $E' \subseteq E(\bar{B})$)

$F = \bigvee_{e \in E'} x_e$ ein Zaun um B am Gatter C_j zum Zeitpunkt i ,

falls für alle $G \in G_i$ gilt: $C_j(\alpha_G) > C_j(\alpha_B) \Rightarrow F(\alpha_G) = 1$.

($F(\alpha_G) = 1 \Leftrightarrow E' \cap E(G) \neq \emptyset$; $F(\alpha_B) = 0$).