

### 3. Cutting Planes

#### 3.1. Einführung

- Beweissystem für ganzzahlige lineare Programme.
- Zeilen sind lineare Ungleichungen.
- Hier betrachten wir nur 0/1 lineare Programme,

d.h.:  $A\vec{x} \geq \vec{b}$ ,  $\vec{x} \in \{0,1\}^n$ ,  $A$   $m \times n$ -Matrix über  $\mathbb{Z}$ ,  $\vec{b} \in \mathbb{Z}^m$ .

Cutting Planes ist der Kalkül über lineare Ungleichungen mit AXIOMEN  $\overline{x \geq 0}$ ,  $\overline{x \leq 1}$  für alle Variablen  $x_i$  und Ableitungsregeln:

Addition: 
$$\frac{\sum_i a_i x_i \geq c \quad \sum_j b_j y_j \geq d}{\sum_i a_i x_i + \sum_j b_j y_j \geq c+d}$$

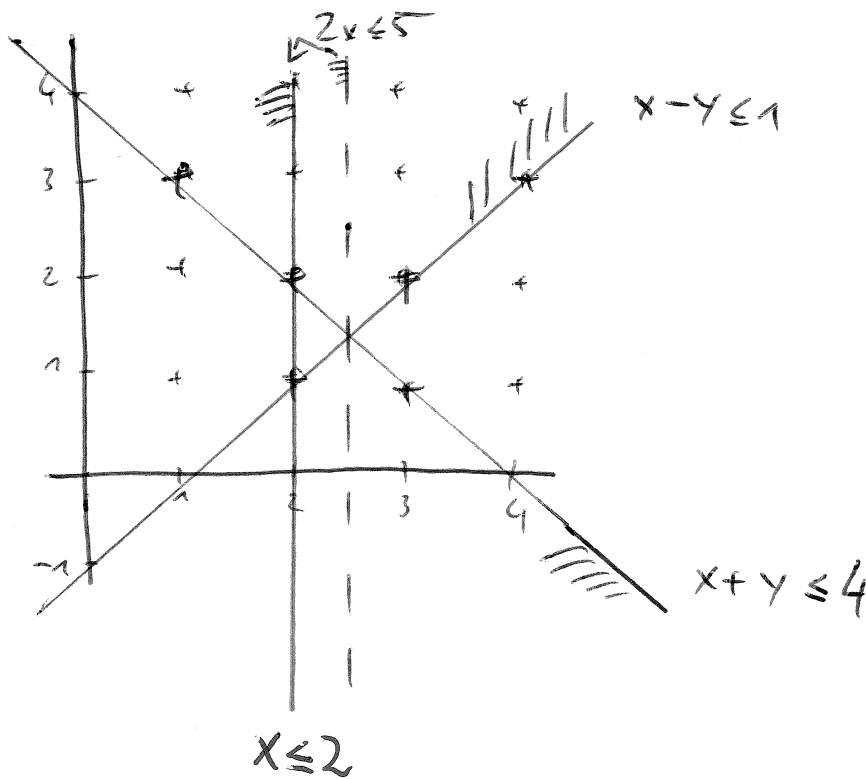
Multiplikation: 
$$\frac{\sum_i a_i x_i \geq c}{\sum_i b a_i x_i \geq bc} \quad \text{für } b \geq 0, b \in \mathbb{Z}$$

Division: 
$$\frac{\sum_i b a_i x_i \geq c}{\sum_i a_i x_i \geq \left\lceil \frac{c}{b} \right\rceil} \quad \text{für } b \geq 0, b \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Z}$$

(auch: "Gomory-Chvátal-cut")

Ein cutting planes Widerlegung ist eine  
Ableitung von  $0 \geq 1$ .

Bsp: Anwendung der cut-Regel:



$$\begin{array}{r}
 x - y \leq 1 \\
 + x + y \leq 4 \\
 \hline
 2x \leq 5 \\
 \hline
 x \leq 2
 \end{array}$$

▷ cutting planes ist ein vollständiges + korrektes  
Beweissystem für ganzzahlige lineare Programme:

$$A\vec{x} \geq \vec{b} \text{ hat keine Lösung } \vec{x} \in \{0,1\}^n$$

⇔ Es gibt eine cutting-planes-Widerlegung.

Wir zeigen hier nur, dass cutting planes  
Ableitungsvollständig für Klauselmengen ist.

# Lemma 3.1

3-3

Cutting planes  $p$  simuliert Resolution (mit weakening).

Beweis:

Kodierung von Klauseln als Ungleichungen:

$$x_1 \vee \dots \vee x_k \vee \bar{y}_1 \vee \dots \vee \bar{y}_l \rightsquigarrow x_1 + \dots + x_k + (1 - y_1) + \dots + (1 - y_l) \geq 1.$$

$$\text{Zunächst: } \frac{C \vee \{x\} \quad D \vee \{\bar{x}\}}{C \vee D} \xrightarrow{\text{(weakening)}} \frac{\frac{C \vee \{x\}}{C \vee D \vee \{x\}} \quad \frac{D \vee \{\bar{x}\}}{C \vee D \vee \{\bar{x}\}}}{C \vee D}$$

D.h. jede Resolutionsregel hat die Form

$$\frac{x_1 \vee \dots \vee x_k \vee \bar{y}_1 \vee \dots \vee \bar{y}_l \vee z \quad x_1 \vee \dots \vee x_k \vee \bar{y}_1 \vee \dots \vee \bar{y}_l \vee \bar{z}}{x_1 \vee \dots \vee x_k \vee \bar{y}_1 \vee \dots \vee \bar{y}_l}$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_i x_i + \sum_j (1 - y_j) + z \geq 1 \\ + & \sum_i x_i + \sum_j (1 - y_j) + (1 - z) \geq 1 \end{aligned} \right\} \text{Addition}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^k 2x_i + \sum_{j=1}^l 2 - 2y_j}{\sum_{i=1}^k x_i + \sum_{j=1}^l 1 - y_j} \geq 1 - 2 \cdot l$$

$$\sum_{i=1}^k x_i + \sum_{j=1}^l 1 - y_j \geq \lceil \frac{1}{2} - l \rceil = 1 - l$$

Division

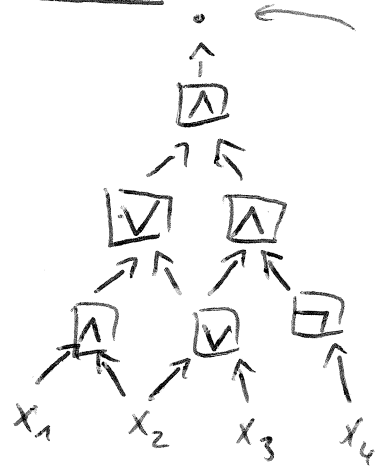
Weakening = Addieren von  $x \geq 0$  oder  $1 - x \geq 0$ .



Ziel ist es ein Prozedur zu haben,  
die für jede Belegung  $\alpha$  der Variable  $X$   
entscheidet, ob  $A|\alpha$  oder  $B|\alpha$  unerfüllbar  
ist.

Ein Schaltkreis ist ein <sup>azyklisch</sup> gerichteter Graph mit  
Eingangsgrad  $\leq 2$ , dessen Quellen mit Variablen  $x_i \in X$   
gelabelt sind und dessen inneren Knoten Funktionen  
über ihren Eingängen besitzen.

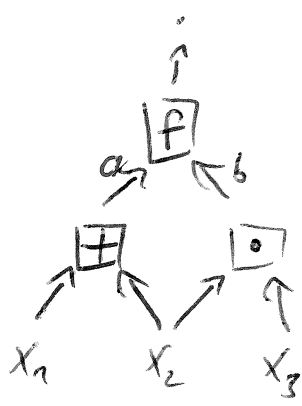
Beispiele:



Ausgang des Schaltkreises

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig  
z.B.:

$$f = 2ab - a$$



Boolescher Schaltkreis

Reeller Schaltkreis

Wir wollen interpolierende Schaltkreise finden,  
die für alle Belegungen  $\alpha: X \rightarrow \{0,1\}$  entscheiden,  
ob  $A|\alpha$  oder  $B|\alpha$  unerfüllbar ist, und deren Größe  
mit der Größe einer Widerlegung von ~~A~~  $A \vee B$  korreliert.

# Satz 3.4 [P 97]

(3-6)

Sei  $P$  eine cutting planes Widerlegung von  $F =$

$$\left\{ \sum_k c_{i,k} x_k + \sum_l b_{i,l} y_l \geq A_i \mid i \in I \right\} =: F^{x,y}$$

$$\cup \left\{ \sum_k c'_{j,k} x_k + \sum_m d_{j,m} z_m \geq B_j \mid j \in J \right\} =: F^{x,z}$$

über

der Variablenmenge

$$X = \{x_1, x_2, \dots\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, \dots\} \text{ und sei}$$

$$Z = \{z_1, z_2, \dots\}$$

$\alpha: X \rightarrow \{0,1\}$  eine partielle Belegung.

Dann gibt es für  $P = ((L_1, M_1), \dots, (L_s, M_s))$  eine

Folge  $(L_1^y, L_1^z), \dots, (L_s^y, L_s^z)$ , so dass eines von

beiden gilt:  $\underbrace{\text{mit } \text{var}(L_i^z) \subseteq Z, \text{var}(L_i^y) \subseteq Y}$

•  $((L_1^y, M_1), \dots, (L_s^y, M_s))$  ist eine cutting planes

Widerlegung von  $F^{x,y} |_{\alpha}$  oder

•  $((L_1^z, M_1), \dots, (L_s^z, M_s))$  ist eine cutting planes

Widerlegung von  $F^{x,z} |_{\alpha}$ .

Beweis von Satz 3.4:

(3-7)

$$\text{Sei } L_t = \sum_k e_k \cdot x_k + \sum_l f_l \cdot y_l + \sum_m g_m z_m \geq D^t,$$

$$\text{dann ist } L_t^y = \sum_l f_l y_l \geq D_0^t \quad \text{und}$$

$$L_t^z = \sum_m g_m z_m \geq D_1^t \quad \text{für konstante } D_0^t, D_1^t. \\ (\text{Leere Summe} \hat{=} 0)$$

Wir wählen  $D_0^t$  und  $D_1^t$  wie folgt:

Axiom 1:

$$\sum_k c_{ik} x_k + \sum_l b_{il} y_l \geq A_i \rightsquigarrow \begin{cases} D_0^t := A_i - \sum_k c_{ik} \alpha(x_k) \\ D_1^t := 0 \quad (\Rightarrow L_1^t = 0 \geq 0) \end{cases}$$

$$\sum_k c'_{ik} x_k + \sum_m d_{jm} z_m \geq B_j \rightsquigarrow \begin{cases} D_0^t := 0 \quad (\Rightarrow L_0^t = 0 \geq 0) \\ D_1^t := B_j - \sum_k c'_{ik} \alpha(x_k) \end{cases}$$

Addition:

$$\frac{L_t^y \quad L_t^z}{L_t} \rightsquigarrow \begin{cases} D_0^t := D_0^{t'} + D_0^{t''} \\ D_1^t := D_1^{t'} + D_1^{t''} \end{cases}$$

Multiplikation mit  $b \geq 0$ :

$$\frac{L_t^y}{L_t} \rightsquigarrow \begin{cases} D_0^t := D_0^{t'} \cdot b \\ D_1^t := D_1^{t'} \cdot b \end{cases}$$

Division durch  $b \geq 0$ 

$$\frac{L^t}{L_t} \rightsquigarrow \begin{cases} D_0^t := \left\lfloor \frac{D_0^{t'}}{b} \right\rfloor \\ D_1^t := \left\lfloor \frac{D_1^{t'}}{b} \right\rfloor \end{cases}$$

(die Teilbarkeitsbedingung der Koeffizienten auf der linken Seite bleibt erhalten)

Behauptung:

Für alle  $L_t = \sum_k e_k x_k + \sum_l f_l y_l + \sum_m g_m z_m \geq D^t$

gilt:  $D_0^t + D_1^t \geq D^t - \sum_k e_k \alpha(x_k)$ .

Beweis: Induktionsanfang (Axiome) und Induktionsschritt für Addition und Multiplikation ist einfach.

Division durch  $b \geq 0$ :

Induktionsannahme:  $D_0^{t'} + D_1^{t'} \geq D^{t'} - \sum_k e_k' \alpha(x_k)$

$$\Rightarrow D_0^t + D_1^t = \left\lfloor \frac{D_0^{t'}}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D_1^{t'}}{b} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{D_0^{t'} + D_1^{t'}}{b} \right\rfloor$$

ganzzahlig  
 $\in \{0, 1\}$

$$\stackrel{IA}{\geq} \left\lfloor \frac{D^{t'} - \sum_k e_k' \alpha(x_k)}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{D^{t'}}{b} \right\rfloor - \sum_k \frac{e_k'}{b} \alpha(x_k)$$

$$\Rightarrow D_0^s + D_1^s \geq D^s = 1$$

$$\Rightarrow D_0^s \geq 1 \text{ oder } D_1^s \geq 1$$

$\Rightarrow$  Widerspruch ist  $0 \geq D_0^s$  oder  $0 \geq D_1^s$   
(nach Division:  $0 \geq 1$ )  $\square$  (Satz)

$$= D^t - \sum_k e_k \alpha(x_k)$$

$\square$   
(Beh.)



Eine Funktion  $f(x_1, \dots, x_k)$  ist monoton, falls

für alle  $x_1, \dots, x_k$  und  $x'_1, \dots, x'_k$  mit  $x_1 \leq x'_1, \dots, x_k \leq x'_k$  gilt:  $f(x_1, \dots, x_k) \leq f(x'_1, \dots, x'_k)$ .

Ein monotoner reeller Schaltkreis ist ein Schaltkreis  $C$ , in dem jedes Gatter eine monotone reelle Funktion benutzt und darüber Eingänge Boolescher Werte  $x_i \in \{0, 1\}$  eine Boolesche Ausgabe  $C(\bar{x}) \in \{0, 1\}$  erzeugt.

### Satz 3.5

der Länge  $s$

Sei  $P$  eine Widerlegung von  $F = F^{x_i, y} \bar{\vee} F^{x_i, z}$  wie in Satz 3.4 und sei zusätzlich  $c_{i,k} \geq 0$  für alle  $i, k$ .

Dann gibt es einen monotonen reellen Schaltkreis  $C$  mit Eingängen  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , sodass für

$\alpha: X \rightarrow \{0, 1\}$ :

$C(\alpha) = 0 \Rightarrow F^{x_i, y}|_{\alpha}$  ist unerfüllbar und

$C(\alpha) = 1 \Rightarrow F^{x_i, z}|_{\alpha}$  ist unerfüllbar.

Die Anzahl der Gatter in  $C$  ist  $s$ .

Beweis von Satz 3.5

Notationswechsel:  $D_t^y = D_0^y$   
 $D_t^z = D_1^z$

Sei  $(L_1^y, L_1^z), \dots, (L_s^y, L_s^z)$  die Folge

aus Satz 3.4. mit  $L_t^y \dots \geq D_t^y$

und  $L_s^y = 0 \geq D_s^y$  und  $L_s^z = 0 \geq D_s^z (\geq 1 - D_s^y)$

wir haben:

$-D_s^y \leq -1 \implies F^{xy}|_\alpha$  ist unerfüllbar und

$-D_s^z \geq 0 \implies F^{xz}|_\alpha$  ist unerfüllbar.

(Beachte, dass in der Folge  $(L_1^y, L_1^z), \dots, (L_s^y, L_s^z)$  nur die Konstanten  $D_t^y, D_t^z$  auf der rechten Seite von  $\alpha$  abhängen.)

Wir definieren eine Monoton reduzierende Schaltkreis, deren Aufbau genau dem Ableiten, dann von  $F$  entspricht und in dem jedes Gatter  $C_t$  den Wert  $-D_t^y$  (abhängig von  $\alpha = X \rightarrow \{0,1\}$ ) berechnet.

Das letzte Gatter  $C_s = f(a_1, a_2)$  ersetzen wir dann

durch  $f'(a_1, a_2) = \begin{cases} 0, & \text{falls } f(a_1, a_2) < 0 \\ 1, & \text{falls } f(a_1, a_2) \geq 0 \end{cases}$

Das liefert uns dann die gewünschte Eigenschaft.

Es bleibt zu zeigen, dass jedes Gatter  $C_t$  eine monotone Funktion berechnet

# Beweis von Satz 3.5 (cont.)

(3-11)

Induktion, anfang (Axiome)

$$C_t = \begin{cases} 0, & \text{falls Axiom aus } F^{x,z} \\ -A_i + \sum_k c_{i,k} \cdot x_{i,k}, & \text{falls Axiom aus } F^{x,y} \end{cases}$$

$\nearrow \Rightarrow 0$  nach Vor.       $\nwarrow$  Einträge des Schaltkreises  
 $\Rightarrow$  monoton  $\checkmark$

Induktionsschritt:

Addition:  $C_t = C_{t'} + C_{t''} \quad \checkmark$

Multiplikation  
mit  $b \geq 0$ :  $C_t = b \cdot C_{t'} \quad \checkmark$

Division:  $C_t = - \left\lceil \frac{D_{t'}^y}{b} \right\rceil = \left\lfloor -\frac{D_{t'}^y}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{C_{t'}}{b} \right\rfloor \quad \checkmark$

II (Satz 3.5)