Beweis von Lemma 2.4

Induktion über n:

$n=0$: $\Rightarrow$ $\emptyset \in F|_\alpha$ $\Rightarrow$ es gibt eine Klausel $C \in F$ mit $\mathrm{dom}(\alpha) \supseteq \mathrm{vars}(C)$ und $\alpha \not\models C$.

$\Rightarrow$ $C \subseteq C(\alpha)$ und damit ist $C(\alpha)$ aus F mit einem weakening-Schritt ableitbar.

$n \to n+1$:

Fall 1: unit propagation

Sei $\{\lambda\} \in F|_\alpha$ und $\mathrm{DPLL}(F, \alpha \cup \{\lambda \mapsto 1\})$ gibt nach n rekursiven Aufrufen FALSE aus.

Nach Induktionsannahme hat $C(\alpha \cup \{\lambda \mapsto 1\})$ eine baumartige Resolutionsableitung aus F mit $\leq n$ Resolutionsschritten.

Sei $D \in F$ die Klausel mit $D|_\alpha = \{\lambda\}$.

$\Rightarrow$ $D \subseteq C(\alpha \cup \{\lambda \mapsto 0\})$ und $C(\alpha)$ ist Resolvente aus dem Axiom D und $C(\alpha \cup \{\lambda \mapsto 1\})$

$\Rightarrow$ $C(\alpha)$ hat Ableitung mit $\leq n+1$ Resolutionsschritten.

Fall 2: pure literal rule

Beobachtung: DPLL $(F, \alpha \cup \beta)$ verhält sich gleich zum Aufruf DPLL $(F|_\alpha, \beta)$ für alle F, α, β.

Sei λ das "pure literal" in $F|_\alpha$.

$\Rightarrow$ DPLL$(F, \alpha \cup \{\lambda \mapsto 1\})$ gibt nach n rekursiven Aufrufen FALSE aus.

$\Rightarrow$ (Beobachtung) Das gleiche gilt für DPLL$(F|_{\{\lambda \mapsto 1\}}, \alpha)$.

$\Rightarrow$ (nach Induktionsannahme) $C(\alpha)$ ist aus $F|_{\{\lambda \mapsto 1\}}$ mit n Resolutionsschritten ableitbar.

Wegen der Definition von "pure literal" ist $F|_{\{\lambda \mapsto 1\}} \subseteq F$, da die Belegung $\{\lambda \mapsto 1\}$ nur Klauseln erfüllt.

$\Rightarrow$ $C(\alpha)$ ist aus F mit n Resolutionsschritten ableitbar.

Fall 3: Verzweigung

Der Algorithmus verzweigt in die Aufrufe $DPLL(F, \alpha \cup \{x \mapsto 0\})$ und $DPLL(F, \alpha \cup \{x \mapsto 1\})$, die beide FALSE zurück geben.

$\Rightarrow$ nach Induktionsannahme ist
$C(\alpha \cup \{x \mapsto 0\}) = C(\alpha) \cup \{x\}$ mit n_1 Resolutionsschritten
und $C(\alpha \cup \{x \mapsto 1\}) = C(\alpha) \cup \{\bar{x}\}$ mit n_2 Resolutionsschritten
aus F ableitbar, wobei $n_1 + n_2 \leq n$.

Durch resolvieren von $C(\alpha) \cup \{x\}$ mit $C(\alpha) \cup \{\bar{x}\}$ ist $C(\alpha)$ mit $n_1 + n_2 + 1 \leq n+1$ Schritten ableitbar. $\square$

Bemerkung 2.6

Ein wesentliches Kriterium für die Geschwindigkeit des DPLL-Algorithmus ist geschickte Auswahl der Variable $x \in vars(F|_\alpha)$ im Verzweigungsschritt. Wenn die Auswahl „optimal" getroffen wird, das heißt so, dass die Laufzeit des Algorithmus minimiert wird, dann gilt sogar die Umkehrung von Lemma 2.4. D.h. die Laufzeit des optimalen DPLL ist $\mathcal{O}(L_T(F \vdash \emptyset))$ auf unerfüllbaren Instanzen. Beweis: Übung.