Nachtrag 1

Der Punkt (c) im Beweis von Lemma 2.28 benötigt noch ein Argument über Boundary-Expander, welches auch "Peeling-Argument" genannt wird.

$\boxed{\text{Lemma 2.33}}$

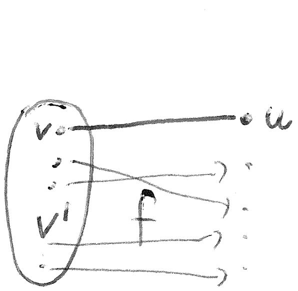
Sei $G=(V \dot\cup U, E)$ ein $(\Delta, \alpha\cdot n, c)$-Boundary-Expander mit $c \geq 1$. Dann gibt es für jedes $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq \alpha n$ eine injektive Abbildung $f: V' \to U$ mit $\{v, f(v)\} \in E$ für alle $v \in V'$.

<u>Beweis</u> (Induktion über $|V'|$)

Induktionsanfang: $|V'| = 1$ folgt aus $N(V') \geq \partial(V') \geq c \geq 1$.

Induktionsschritt:

- Wähle $u \in \partial(V')$ $\neq \emptyset$, da $|V'| \leq \alpha n$, sei $v \in V'$ <u>eindeutiger</u> Nachbar von u in V'.
- Sei $f: V' \setminus \{v\} \to U$ injektive Funktion nach IA.
- Nun ist $f \cup \{(v,u)\}$ Injektion von V' nach U.



$u \notin f(V' \setminus \{v\})$

(da $u \notin N(V' \setminus \{v\})$)

$\square$

Nachtrag 2

Mit Lemma 2.27. (das wir heute beweisen wollen) erhalten wir nur $L(G_n\text{-PHP} \vdash \emptyset) = 2^{\Omega(n)}$ in Satz 2.29. Allerdings ist $\|G_n\text{-PHP}\| = O(n^2)$ wegen der Klauseln H.

Wir haben $\|G_n\text{-PHP}\| = O(n)$, wenn der Grad der Knoten auf der rechten Seite ebenfalls beschränkt ist. Wir werden daher zeigen, dass es Expandergraphen gibt, in denen der Grad <u>aller</u> Knoten höchstens 5 ist.

Das folgt aus der folgenden verschärften Variante von Lemma 2.31:

Lemma 2.31 a

Für $\Delta \geq 3$ und $c' < \Delta - 1$ gibt es ein $\alpha(\Delta, c') > 0$, sodass es für alle n ein $n \times n$ $(\Delta, \alpha \cdot n, c')$-Expander gibt, in denen <u>jeder</u> Knoten höchstens Δ Nachbarn hat.

Beweis von Lemma 2.31 a

Wir zeigen die Existenz mit der probabilistischen Methode. D.h. wir wählen einen zufälligen Graphen nach einer bestimmten Verteilung und zeigen, dass dieser mit Wahrscheinlichkeit $\geq 0{,}9$ ein Expander ist.

Sei $\mathcal{B}_n$ der endliche Wahrscheinlichkeitsraum aller $n \times n$ Graphen $G = (V \dot\cup U, E)$ in denen E ein perfektes Matching zwischen V und U ist und jeder Graph die gleiche Wahrscheinlichkeit hat. nämlich $\frac{1}{n!}$

Für eine Permutation $\sigma : [n] \to [n]$, sei $\mathcal{B}_n^\sigma$ der Wahrscheinlichkeitsraum aller $n \times n$ Graphen $G = (V \dot\cup U, E)$ in dem ein Graph mittels des folgenden Prozesses gewonnen wird:

$E = \emptyset$, $U_0 = \emptyset$

Für $i = 1 .. n$:

- Wähle $u \in U \setminus U_{i-1}$ gleichverteilt (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-i+1}$)
- $E \leftarrow E \cup \{\{v_{\sigma(i)}, u\}\}$
- $U_i := U_{i-1} \dot\cup \{u\}$

Das folgende Lemma besagt, dass wir mit dieser Prozedur für alle σ ein bipartites Matching gleichverteilt wählen.

Lemma 2.34

Für alle n und alle $\sigma : [n] \to [n]$ (Permutationen) gilt: $B_n = B_n^\sigma$.

Beweis: Übung.

Wir wählen G, indem wir Δ mal ein Matching aus B_n ziehen und die Kantenmenge von G die Vereinigung dieser Matchings ist.

Im Folgenden zeigen wir, dass

$$\mathbb{P}[G \text{ ist } \underline{\text{kein}}\ (\Delta, \alpha\cdot n, c')\text{-Expander}] < 0{,}1 .$$

($\Rightarrow$ über 90% aller so gewählten Graphen hat die gewünschte Expansion.)

Sei $V' \subseteq V$ und $U' \subseteq U$ beliebig. Wähle eine Permutation $\sigma : [n] \to [n]$ so, dass $V' = \{v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(|V'|)}\}$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}_{G \in B_n}[N(V') \subseteq U'] \underset{\text{Lemma 2.34}}{=} \mathbb{P}_{G \in B_n^\sigma}[N(V') \subseteq U'] = \prod_{i=1}^{|V'|} \frac{|U' \setminus U_{i-1}|}{n-i+1}$$

$$\leq \left(\frac{|U'|}{n-|V'|}\right)^{|V'|} \quad (*)$$

Zum Abschätzen nutzen wir die union bound:

für Ereignisse $A_1, \dots, A_m$ gilt: $\mathbb{P}\left[\bigvee_{i=1}^{m} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}[A_i]$.

Sei $A_{V', U'}$ das Ereignis, dass $N(V') \subseteq U'$.

Wenn G kein $(\Delta, \alpha n, c')$-Expander ist, dann gibt es ein $\ell \leq \alpha \cdot n$, $V' \subseteq V$ mit $|V'| = \ell$, $U' \subseteq U$ mit $|U'| \leq c' \cdot \ell$ sodass $N(V') \subseteq U'$. Damit folgt:

$$\mathbb{P}[\, G \text{ ist kein } (\Delta, \alpha n, c')\text{-Expander}\,]$$

$$\leq \mathbb{P}\Big[\bigvee_{\ell=1}^{\alpha \cdot n} \bigvee_{\substack{V' \subseteq V \\ |V'| = \ell}} \bigvee_{\substack{U' \subseteq U \\ |U'| = c'\ell}} A_{V', U'}\Big]$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{\alpha n} \sum_{\substack{V' \subseteq V \\ |V'| = \ell}} \sum_{\substack{U' \subseteq U \\ |U'| = c'\ell}} \mathbb{P}[A_{V', U'}]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\alpha n} \sum_{\substack{V' \subseteq V \\ |V'| = \ell}} \sum_{\substack{U' \subseteq U \\ |U'| = c'\ell}} \left(\mathbb{P}_{G \in \mathcal{B}_n}[N(v') \subseteq U']\right)^{\Delta}$$

wg. (*)

$$\leq \sum_{\ell=1}^{\alpha n} \binom{n}{\ell} \cdot \binom{n}{c'\ell} \cdot \left(\frac{c'\ell}{n-\ell}\right)^{\ell \cdot \Delta}$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{\alpha n} \underbrace{\left(\left(\frac{ne}{\ell}\right) \cdot \left(\frac{ne}{c'\ell}\right)^{c'} \cdot \left(\frac{c'\ell}{n-\ell}\right)^{\Delta}\right)}_{(**)}{}^{\ell}$$

siehe S. 2-44

Es gilt:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k$$

Behauptung: $(**) \le \frac{1}{11}$ für α klein genug.

Daraus folgt:

$\boxed{\text{geometrische Reihe } \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}}$

$$\ldots \le \sum_{\ell=1}^{\alpha n} \left(\frac{1}{11}\right)^{\ell} < \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{1}{11}\right)^{\ell} = \frac{1}{1-\frac{1}{11}} - 1 = \underline{\underline{\frac{1}{10}}} \quad \square$$

Lemma 2.31a (modulo Behauptung)

Beweis der Behauptung:

$$(**) \le \frac{ne}{\ell}\left(\frac{ne}{c'\ell}\right)^{c'}\left(\frac{c'\ell}{\underbrace{n-\ell}_{\ge (1-\alpha)n}}\right)^{\Delta}$$

$\ge (1-\alpha)n$, da $\ell \le \alpha n$

$$\le n^{1+c'-\Delta} \cdot \underbrace{\ell}_{\le \alpha n}^{\overbrace{-1-c'+\Delta}^{>0}} \cdot \frac{e^{1+c'}\, c'^{\Delta}}{c'^{c'}\,(1-\alpha)^{\Delta}}$$

$$\le \alpha^{-1-c'+\Delta} \cdot \frac{e^{1+c'}\, c'^{\Delta}}{c'^{c'}\,(1-\alpha)^{\Delta}}$$

$$\le \frac{1}{11}$$ (oder jedes beliebige $\varepsilon > 0$ für $\alpha = \alpha(\Delta, c')$ klein genug).

$\square$ (Behauptung)

Abschätzung des Binomialkoeffizienten:

$$e^k = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{k^a}{a!} \ge \frac{k^k}{k!} \Rightarrow k! \ge \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \le \frac{n^k}{k!} \le \left(\frac{ne}{k}\right)^k$$

Übersicht Kapitel 2

Beweissysteme	Methoden	Formeln
$A \to B :\Leftrightarrow B$ p-simuliert A		
Resolution	• Lineare Weite (Satz 2.24) $\Rightarrow$ Exponentielle Größe	G-PHP , PHP_n^{n+1}
$\uparrow$ trivial	• Für G-PHP: (Lemma 2.28) Hohe Expansion $\Rightarrow$ Hohe Weite (mit sub-additivem Komplexitätsmaß μ)	
reguläre Resolution		
$\uparrow$ Blatt #1 Aufg. 2	• Untere Schranke an die <u>Tiefe</u> mit Resolutionsspiel (Lemma 2.8)	PEB_G (Satz 2.12) (mit Black-Pebble-Spiel für P_h)
Baumartige Resolution	• Hohe Tiefe + XOR-Substitution (Lemma 2.19) $\Rightarrow$ Exponentielle Größe (mit Prover-Delayer-Spiel)	$PEB_G[\oplus]$
$\uparrow$ Korollar 2.5		
Lauf eines DPLL-Algorithmus	• Hohe Weite (Satz 2.22) $\Rightarrow$ Exponentielle Größe	$EPHP_n^{n+1}$, PHP_n^{n+1}

Resolution $\not\to$ Baumartige Resolution: $PEB_{P_h}[\oplus]$