2.2 Resolution als Spiel

Resolution hat eine einfache Spielcharakterisierung, die dabei hilft, untere Schranken zu beweisen.

Das Spiel wird von zwei Personen gespielt:

Spieler 1 (a.k.a. Prover, Spoiler, Prosecutor) und

Spieler 2 (a.k.a. Adversary, Duplicator, Delayer, Liar)

Das "Spielbrett" ist eine Klauselmenge F.

- Spieler 2 behauptet, dass er eine erfüllende Belegung für F kennt.
- Spieler 1 versucht zu beweisen, dass Spieler 1 lügt.

Die Positionen/Konfigurationen in dem Spiel sind partielle Belegungen α. (Sie entsprechen Teilen der behaupteten erfüllenden Belegung von F.)

- Spieler 1 gewinnt das Spiel, wenn eine Belegung α erreicht wird, die eine Klausel $C \in F$ widerlegt ($\alpha \nvDash C$).

Ausgehend von einer Startbelegung α (meist $\alpha = \emptyset$) läuft jede Runde wie folgt ab:

1. Spieler 1 fragt nach der Belegung einer Variablen $x \notin dom(\alpha)$.
2. Spieler 2 antwortet mit $b \in \{0,1\}$, die neue Position ist $\alpha \cup \{x \mapsto b\}$.
3. Spieler 1 kann nun Belegungen löschen, die neue Position ist $\alpha' \subseteq \alpha \cup \{x \mapsto b\}$.

Die Variante des Spiels in dem für alle partiellen Belegungen $|\alpha| \leq k$ gilt, heißt <u>k-Pebble-Spiel</u>.

(Anmerkung: Dieses Spiel kann auch als eine Art Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel, das existentiell-positive k-Pebble-Spiel, aufgefasst werden.)

Lemma 2.8 Sei F eine Klauselmenge und $k \geq w(F)$. Spieler 1 hat genau dann eine Gewinnstrategie ausgehend von α für das Resolutionsspiel mit $k+1$ Pebbeln und höchstens r Runden, wenn $C(\alpha)$ eine Resolutionsableitung der Weite k und Tiefe r aus F besitzt.

Beweisidee:

F hat Resolutionswiderlegung der Weite k und Tiefe r

$\Leftrightarrow$ F hat baumartige Resolutionswiderlegung der Weite k und Tiefe r.

Diese entspricht einem Entscheidungsbaum für Spieler 1:

Klausel $C(\alpha)$	$\hat{=}$	Belegung α
Weakening	$\hat{=}$	"Vergessen" von Belegungen (Schritt 3)
Resolution auf x	$\hat{=}$	Fragen nach x.

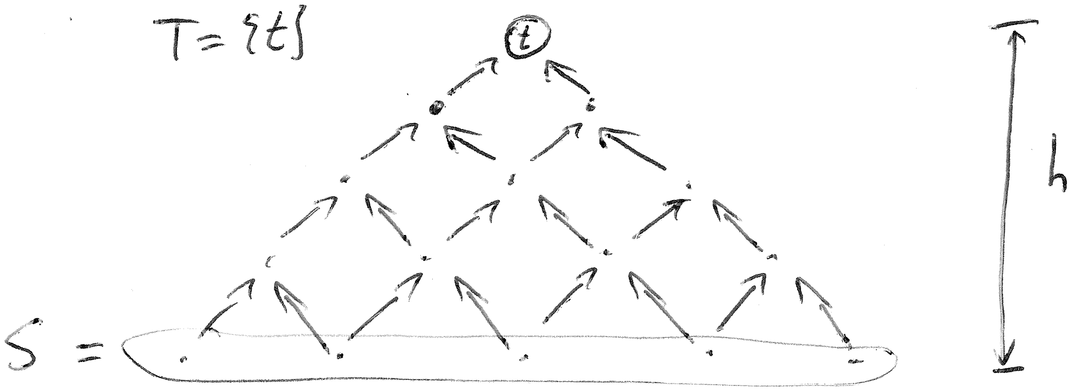
2.3 Black-Pebble Formeln

Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass es unerfüllbare Klauselmengen F mit $w(F) = 3$ und $D(F \vdash \emptyset) = \Omega(\sqrt{n})$ gibt.
Im nächsten Abschnitt zeigen wir dann, dass man daraus eine Klauselmenge F' mit $L_T(F' \vdash \emptyset) = 2^{\Omega(\sqrt{n})}$ generieren kann.

- Das <u>Black-Pebble Spiel</u> ist ein ein-Personen-Spiel auf einem azyklischen, gerichteten Graphen G mit Quellen $S \subseteq V(G)$ und Zielen $T \subseteq V(G)$. Ziel ist es, einen Spielstein auf ein $t \in T$ zu setzen. Hierbei gelten die folgenden Regeln:
  - Es darf ein Spielstein auf $v \in S$ gesetzt werden.
  - Wenn auf allen eingehenden Nachbarn von $v \in V(G)$ ein Spielstein liegt, darf ein Spielstein auf v gelegt werden.
  - Es dürfen jederzeit Spielsteine weggenommen werden.

Die Kosten des Spiels $Peb_G(S,T)$ sind die minimale Anzahl von Spielsteinen, die benötigt werden, um das Spiel zu gewinnen.

Sei P_h eine Pyramide der Höhe h. Bsp: P_4:



Lemma 2.9

$$Peb_{P_h}(S, \{t\}) = h+2$$

Beweis: Original von Cook '74. Siehe (N15) Theorem 4.8.

Korollar 2.10.

Es gibt gerichtete Graphen G mit Eingangsgrad ≤ 2 und n Knoten, für die $Peb_G(S,T) = \Omega(\sqrt{n})$.

Bemerkung 2.11 Für geeignete Graphen lässt sich diese Schranke auf $\Omega\left(\frac{n}{\log n}\right)$ verbessern.

Pebble Formeln

Für einen gerichteten azyklischen Graphen G mit Eingangsgrad ≤ 2 mit Quellen $S_G := \{ s \in V(G) \mid N^-(s) = \emptyset \}$ und Senken $T_G := \{ t \in V(G) \mid N^+(t) = \emptyset \}$ ist PEB_G die folgende Klauselmenge mit

- $\{ X_s \}$, für alle $s \in S_G$
- $\{ \overline{X_t} \}$, für alle $t \in T_G$
- $\{ X_v \} \cup \{ \overline{X_u} \mid u \in N^-(v) \}$, für alle $v \in V(G) \setminus S_G$

Beobachtung: PEB_G ist unerfüllbar.

$\boxed{\text{Satz 2.12}}$ $D(PEB_G \vdash \emptyset) \geq Peb_G(S_G, T_G) - 3$.

Aus Korollar 2.10 folgt dann direkt:

$\boxed{\text{Lemma 2.13}}$ Es gibt eine 3-KNF F mit n Variablen und $O(n)$ Klauseln für die $D(F \vdash \emptyset) = \Omega(\sqrt{n})$ gilt.

Für den Beweis von Satz 2.12 geben wir eine Strategie für Spieler 2 im Resolutionsspiel an.

Wenn α eine Position im Spiel ist, sei

$$S_\alpha := S_G \cup \{v \mid \alpha(x_v) = 1\}$$ und

$$T_\alpha := T_G \cup \{v \mid \alpha(x_v) = 0\}.$$

Die Strategie für Spieler 2 ist die folgende.
Ausgehend von einer Position α fragt Spieler 1 nach einer Variablen x_v.
Spieler 2 antwortet mit $\begin{cases} 0, & \text{falls } v \in T_\alpha \\ 1, & \text{falls } v \in S_\alpha \end{cases}$
Ansonsten antwortet er mit

0, falls $Peb_G(S_\alpha, T_\alpha) = Peb_G(S_\alpha, T_\alpha \cup \{v\})$ und

1, falls $Peb_G(S_\alpha, T_\alpha) > Peb_G(S_\alpha, T_\alpha \cup \{v\})$.

Lemma 2.14 Für jede Spielposition α gilt:
Wenn $Peb_G(S_\alpha, T_\alpha) > 3$, dann widerlegt α keine Klausel $C \in PEB_G$.

Lemma 2.15

Für alle $v \in V$ und $S, T \subseteq V(G)$ gilt:

$$Peb_G(S,T) \leq \max\left\{ Peb_G(S, T \cup \{v\}),\ Peb_G(S \cup \{v\}, T) + 1 \right\}.$$

<u>Beweis:</u> Einfach. Siehe auch Lemma 15 in (BIW04). □

$\Longrightarrow$ In jeder Runde im Spiel verringert sich $Peb_G(S_\alpha, T_\alpha)$ um höchstens 1.

$\Longrightarrow$ Die Anzahl der Runden ist mindestens

$$Peb_G(\underset{\substack{\shortparallel \\ S_G}}{S_\emptyset}, \underset{\substack{\shortparallel \\ T_G}}{T_\emptyset}) - 3.$$

□ (Satz 2.12)

2.4. Das Prover-Delayer-Spiel

Das Prover-Delayer-Spiel ist eine Abwandlung des Resolutionsspiels. Hier hat Spieler 2 zwei Optionen, wenn Spieler 1 nach der Belegung einer Variablen fragt:

- Spieler 2 antwortet mit $b \in \{0,1\}$ (wie bisher) und erhält dafür keinen Punkt
- Spieler 2 überlässt dem Spieler 1 die Wahl einer Belegung $b \in \{0,1\}$ und bekommt dafür <u>einen Punkt</u>.

Lemma 2.16

Wenn Spieler 2 auf einer Klauselmenge F eine Strategie für das Prover-Delayer Spiel besitzt, in der er am Ende des Spiels mindestens p Punkte hat, dann ist

$$L_T(F \vdash \emptyset) \geq 2^p .$$

<u>Beweis</u>: Siehe Lemma 9 in (BIW04).

2.5. XORification

Definition 2.17 (Binär XOR Substitution)

Sei F eine Klauselmenge mit $var(F) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Dann ist $F[\oplus]$ eine Klauselmenge mit
$var(F[\oplus]) = \{x_i^j \mid i \in [n], j \in \{0,1\}\}$, in der
jede Variable x_i durch $x_i^0 \oplus x_i^1$ "ersetzt" wurde.

Formal sei
$$S(x_i) := \{\{x_i^0, x_i^1\}, \{\overline{x_i^0}, \overline{x_i^1}\}\},$$
$$S(\overline{x_i}) := \{\{\overline{x_i^0}, x_i^1\}, \{x_i^0, \overline{x_i^1}\}\} \text{ und}$$
$$F[\oplus] := \left\{ C_1 \cup \dots \cup C_k \;\middle|\; \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \in F,\ C_j \in S(\lambda_j) \text{ für } j \in [k] \right\}$$

Lemma 2.18

1. F ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $F[\oplus]$ ist erfüllbar
2. Wenn F unerfüllbar ist, dann gilt:
   - $D(F \vdash \emptyset) \leq D(F[\oplus] \vdash \emptyset) \leq 2 \cdot D(F \vdash \emptyset)$ und
   - $w(F \vdash \emptyset) \leq w(F[\oplus] \vdash \emptyset) \leq 2 \cdot w(F \vdash \emptyset)$.

<u>Beweis</u>: Übung

Lemma 2.19.

Sei F eine unerfüllbare Klauselmenge.

Dann gilt: $L_T(F[\oplus] \vdash \emptyset) \geq 2^{D(F \vdash \emptyset)}$

Beweis: Wir haben das Resolutionsspiel.

Sei $p := D(F \vdash \emptyset)$. Wegen Lemma 2.8. hat Spieler 2 eine Strategie, die es erlaubt p Runden zu spielen, bis Spieler 1 gewinnt.

Wir zeigen, dass Spieler 2 im Prover-Delayer-Spiel auf $F[\oplus]$ p Punkte erzielen kann.

Für eine Position α im Spiel auf $F[\oplus]$ sei

$\beta(\alpha) := \{X \mapsto \alpha(X^0) \oplus \alpha(X^1) \mid X^0, X^1 \in dom(\alpha)\}$ die entsprechende Position im Spiel auf F.

Wenn in Position α Spieler 1 nach X^a fragt, gibt es zwei Fälle.

Fall 1: $X^{1-a} \notin dom(\alpha)$.

→ überlasse Spieler 1 die Entscheidung und erhalte einen Punkt.

In diesem Fall ist $\beta(\alpha \cup \{X^a \mapsto b\}) = \beta(\alpha)$

Fall 2: $x^{1-q} \in dom(\alpha)$.

Sei b die Antwort von Spieler 2 auf die Frage nach x im Spiel auf F in Position $\beta(\alpha)$.

Im Spiel auf $F[\oplus]$ wählt Spieler 2 nun $b' \in \{0,1\}$, sodass $b = b' \oplus \alpha(x^{1-q})$.

Nun ist $\beta' = \beta(\alpha) \cup \{x \mapsto b\}$ die neue Position im Spiel auf F und $\alpha' = \alpha \cup \{x^q \mapsto b'\}$ die neue Position im Spiel auf $F[\oplus]$ und es gilt:

$$\beta' = \beta(\alpha').$$

Das Lemma folgt nun wegen der folgenden beiden Aussagen:

- α widerlegt eine Klausel von $F[\oplus]$
  $\Leftrightarrow$
  $\beta(\alpha)$ widerlegt eine Klausel von F
- Jedes Mal wenn $\beta(\alpha)$ sich auf $\beta(\alpha) \cup \{x \mapsto b\}$ ändert, hat Spieler 2 einen Punkt erzielt (für x^0 oder x^1).

$\square$ (Lemma 2.19)

Mit der unteren Schranke für die Resolutions-tiefe von Pebble-Formeln (Lemma 2.13) und XORification-Lemma (Lemma 2.19) erhalten wir:

Satz 2.20

Sei $F = PEB_{P_h}[\oplus]$ dann gilt

$$L_T(F \vdash \emptyset) \geq 2^{\Omega(\sqrt{\|F\|})}.$$

Korollar: Baumartige Resolution ist nicht p-beschränkt.

Außerdem ist es leicht zu zeigen, dass $w(PEB_{P_h} \vdash \emptyset) = 3$ und damit (nach Lemma 2.18) $w(PEB_{P_h}[\oplus] \vdash \emptyset) \leq 7$.*) Das bedeutet aber, dass

$L(PEB_{P_h}[\oplus] \vdash \emptyset) \leq O(n^7)$, wobei n die Anzahl der Variablen in $PEB_{P_h}[\oplus]$ bezeichnet. Daraus folgt:

Korollar: Baumartige Resolution kann Resolution nicht p-simulieren.

*) es gilt sogar $w(PEB_{P_h}[\oplus] \vdash \emptyset) = 6$.

2.6 Zusammenhang zwischen Länge und Weite von Resolutionswiderlegungen

- Wir haben gezeigt, dass untere Schranken an die Länge von baumartigen Widerlegungen aus unteren Schranken an die Tiefe + XORification folgen.

- Wir zeigen nun ein wichtiges Ergebnis von Ben-Sasson & Widgerson (BW01), das es ermöglicht untere Schranke an die Länge von baumartigen <u>und</u> nicht-baumartigen Widerlegungen durch untere Schranken an die <u>Weite</u> zu erhalten.

Lemma 2.21

Sei $\Gamma = ((C_1, M_1), \ldots, (C_\ell, M_\ell))$ eine Resolutionsableitung von C_ℓ aus F und α part. Belegung mit $\alpha \not\models C_\ell$.
Dann ist $\Gamma|_\alpha := ((C_1|_\alpha, M_1), \ldots, (C_\ell|_\alpha, M_\ell))$ (nach entfernen von Klauseln C_i mit $\alpha \models C_i$) eine Resolutionsableitung (mit Weakening) von $C_\ell|_\alpha$ aus $F|_\alpha$.

$\boxed{\text{Satz 2.22}}$ (BW01)

$$L_T(F \vdash \emptyset) \geq 2^{w(F\vdash\emptyset) - w(F)}$$

Der Satz folgt direkt aus folgendem Lemma:

$\boxed{\text{Lemma 2.23}}$

Für alle $b, n \geq 0$ und Klauselmengen F mit n Variablen gilt: Wenn es eine Widerlegung von F mit $\leq 2^b$ Resolutionsschritten gibt, dann ist $w(F \vdash \emptyset) \leq w(F) + b$.

Beweis: Induktion über b und n.

Sei $\frac{\{x\} \quad \{\overline{x}\}}{\emptyset}$ letzter Resolutionsschritt.

$\Rightarrow$ es gibt Ableitungen Γ_x von $\{x\}$ aus F und $\Gamma_{\overline{x}}$ von $\{\overline{x}\}$ aus F mit S_x und $S_{\overline{x}}$ Ableitungsschritten und $S_x + S_{\overline{x}} + 1 \leq 2^b$.

O.B.d.A. sei $S_x \leq 2^{b-1}$.

$\Rightarrow$ (Induktion über b): $w(F|_{x=0} \vdash \emptyset) \leq w(F|_{x=0}) + b - 1$

$\leq w(F) + b - 1$

wegen Widerlegung $\Gamma_x|_{x=0}$ und Lemma 2.21

$\Rightarrow$ (Induktion über n): $w(F|_{x=1} \vdash \emptyset) \leq w(F|_{x=1}) + b$

$\leq w(F) + b$

① $w(F|_{x=0} \vdash \emptyset) \leq w(F) + \delta - 1$

$\overset{*)}{\Rightarrow} w(F \vdash \{x\}) \leq w(F) + \delta$

② $w(F|_{x=1} \vdash \emptyset) \leq w(F) + \delta$

$\overset{**)}{\Rightarrow} w(F \cup \{x\} \vdash \emptyset) \leq w(F) + \delta$

① + ② $\overset{***)}{\Rightarrow} w(F \vdash \emptyset) \leq w(F) + \delta$. $\square$

*) Sei Γ Widerlegung von $F|_{x=0}$, füge x zu jeder Klausel in $F|_{x=0}$ und Γ hinzu und erhalte F' und Γ'. Dann ist Γ' Resolutionsableitung von $\{x\}$ aus F' (und damit aus F, da $F' \subseteq F$) mit $w(\Gamma') = w(\Gamma) + 1$.

(Siehe auch Lemma 3.1 in (BW01).)

**) $F|_{x=1}$ entsteht aus F durch Löschen aller Klauseln C mit $x \in C$ und Resolvieren aller Klausel C mit $\bar{x} \in C$ mit der Klausel $\{x\}$. $\Rightarrow w(F \cup \{x\} \vdash \emptyset) \leq w(F|_{x=1} \vdash \emptyset)$

***) Erst $\{x\}$ aus F ableiten, dann $\emptyset$ aus $F \cup \{x\}$ ableiten.

$\boxed{\text{Satz 2.24}}$ (BW01)

$$L(F \vdash \emptyset) \geq 2^{\Omega\left(\frac{(w(F\vdash\emptyset) - w(F))^2}{n}\right)}$$

Für jede unerfüllbare Klauselmenge F mit n Variablen.

Beweis:

Sei Γ eine Resolutionwiderlegung von F mit minimaler Länge $L(\Gamma) = L(F \vdash \emptyset)$.

Sei $d := \left\lceil \sqrt{2 \cdot n \cdot \ln(L(F\vdash\emptyset))} \right\rceil$ und

$$a_n := \frac{1}{1 - \frac{d}{2n}} .$$

d ist fest im Induktionsbeweis von ⊛ : erst später wählen.

Sei $S_\Gamma := \{ C \mid C \in \Gamma, w(C) \geq d \}$ die Menge aller "großen" Klauseln in der Widerlegung Γ.

Wir beweisen induktiv über b und n (= #var. in F) die folgende Behauptung:

$$\circledast \quad |S_\Gamma| < a_n^b \implies w(F \vdash \emptyset) \leq d + b + w(F)$$

Der Induktionsanfang (b=0 bzw. n=0) ist trivial.

Da es 2n Literale gibt, muss mindestens ein Literal (O.B.d.A x) in mindestens $\frac{d \cdot |S_\Gamma|}{2n}$ Klauseln aus S_Γ

vorkommen. Durch die partielle Belegung $x=1$ werden diese alle erfüllt.

Nach Lemma 2.21 folgt, dass $\Gamma|_{x=1}$ eine Widerlegung von $F|_{x=1}$ mit höchstens $\left(1-\frac{d}{2n}\right)\cdot|S_\Gamma| < \left(1-\frac{d}{2n}\right)a_n^b = a_n^{b-1}$ Klauseln der Größe $w(C)\geq d$ ist.

$\Longrightarrow$ (Induktion nach b): $w(F|_{x=1}\vdash\emptyset)\leq d+b-1+w(F)$

$\overset{+)}{\Longrightarrow}$ 1 $w(F\vdash\{\overline{x}\})\leq d+b+w(F)$

Sei Γ' minimale Widerlegung der Klauselmenge $F|_{x=0}$ mit $n-1$ Variablen. Mit Induktion nach n und $|S_{\Gamma'}|\leq|S_{\Gamma|_{x=0}}|\leq|S_\Gamma|< a_n^b\leq a_{n-1}^b$ folgt:

$w(F|_{x=0}\vdash\emptyset)\leq d+b+w(F)$

$\overset{++)}{\Longrightarrow}$ 2 $w(F\cup\{\overline{x}\}\vdash\emptyset)\leq d+b+w(F)$

1 + 2 $\overset{+++)}{\Longrightarrow}$ $w(F\vdash\emptyset)\leq d+b+w(F)$ $(*)$ ✓

+) ++) +++) analog zu *) **) ***) im Beweis von Satz 2.22

Indem wir nun

$$d := \left\lceil \sqrt{2n \cdot \ln(L(F \vdash \emptyset))} \right\rceil \quad \text{setzen,}$$

erhalten wir

$$L(F \vdash \emptyset) = e^{\frac{\sqrt{2n \cdot \ln(L(F \vdash \emptyset))}^2}{2n}}$$

$$\leq e^{\frac{d^2}{2n}} \qquad \boxed{\text{da } e^x \leq \frac{1}{1-x}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{1 - \frac{d}{2n}} \right)^d$$

$$= a^d$$

Insbesondere ist die Anzahl großer Klauseln in Γ $|S_\Gamma| < a^d$. Aus ⊛ folgt dann

$$w(F \vdash \emptyset) \leq 2d + w(F) \leq \sqrt{8n \cdot \ln(L(F \vdash \emptyset))} + w(F)$$

$$\Rightarrow L(F \vdash \emptyset) \geq e^{\frac{(w(F \vdash \emptyset) - w(F))^2}{8n}} .$$

□ (Satz 2.24)