Big Data Analytics in Theorie und Praxis — Theorieteil

Vorlesung (entspricht 2V+1Ü SWS)

Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Lehrstuhl Logik in der Informatik
Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

Version vom 24. Mai 2016

Kapitel 1

PageRank: Markov-Ketten als Grundlage der Funktionsweise von Suchmaschinen im Internet

1.1 Einleitung

Ziel dieses Kapitels ist, einen kurzen Überblick über die Arbeitsweise von Suchmaschinen für das Internet zu geben. Wir betrachten hierbei eine Suchmaschine, die als Eingabe ein Stichwort oder eine Liste von Stichworten erhält, und die als Ausgabe eine Liste von Links auf Webseiten geben soll, deren Inhalt relevante Informationen zu den eingegebenen Stichworten enthält. Diese Liste soll so sortiert sein, dass die informativsten Links am weitesten oben stehen.

Folie 1

Suchmaschine:

Eingabe:

Eine Anfrage, bestehend aus einem oder mehreren Stichworten

Ziel:

Eine nach Relevanz sortierte Liste von Webseiten, die Informationen zu den Stichworten enthalten

Die Herausforderungen, die sich beim Bau einer Suchmaschine stellen, sind vielfältig. Zum einen ist die Anzahl der Webseiten *sehr* groß: Bereits im

Jahr 2008 gab es mehr als 1 Billion Webseiten.[1] Beachten Sie: 1 Billion $= 1.000.000.000.000 = 10^{12}$. Niemand kennt den genauen Inhalt des gesamten Internets, und das Internet verändert sich ständig: Täglich kommen neue Webseiten hinzu, viele Webseiten werden täglich aktualisiert, und andere nach einiger Zeit auch wieder gelöscht.
Eine Suchmaschine muss daher eine enorm große Menge von Daten verarbeiten, die in kurzen Zeitabständen immer wieder aktualisiert werden. Trotzdem müssen Suchanfragen, die an eine Suchmaschine geschickt werden, in „Echtzeit" beantwortet werden. Um die Ergebnisse nach ihrer Relevanz für die jeweiligen Suchbegriffe sortieren zu können, benötigt man auch ein sinnvolles Maß dafür, welche Webseiten als besonders „informativ" bewertet werden sollen.

Folie 2

Herausforderungen:

- es gibt *sehr* viele Webseiten

  bereits in 2008 mehr als 1 Billion (also 10^{12}) URLs
  Quelle: Google „Official Blog", 25. Juli 2008
- ständig kommen neue hinzu
- viele Webseiten werden täglich akutalisiert;

  manche nach einiger Zeit auch wieder gelöscht
- niemand kennt den genauen Inhalt des gesamten Internets
- trotzdem müssen Suchanfragen in „Echtzeit" beantwortet werden

Die Herausforderung besteht darin, Anfragen für einen sich rasant ändernden Suchraum gigantischer Größe ohne merkliche Reaktionszeit zu beantworten.

1.2 Die Architektur von Suchmaschinen

Folie 3

Suchmaschinen nutzen u.a. die folgenden Komponenten:

(1) *Web-Crawler:* Computerprogramme, die *Crawler* genannt werden, durchforsten das Internet, um neue oder veränderte Webseiten zu

[1] Quelle: http://googleblog.blogspot.com/2008/07/we-knew-web-was-big.html; zuletzt besucht am 19.05.2015.

identifizieren. Die von den Crawlern gefundenen Informationen über Webseiten und deren Inhalt werden aufbereitet und gespeichert.

(2) *Indexierung:* Die Informationen werden in einer Datenstruktur gespeichert, mit deren Hilfe bei Eingabe eines Suchworts in „Echtzeit" alle Webseiten ermittelt werden können, die das Suchwort enthalten.

(3) *Bewertung der Webseiten:* Die ausgewählten Webseiten werden im Hinblick auf ihren Informationsgehalt (hinsichtlich möglicher Suchworte sowie hinsichtlich ihrer generellen Bedeutung im Internet) bewertet.

Folie 4

Einige Details dazu:

Zu jeder vom Crawler gefundenen Webseite wird die URL (d.h. die Adresse) sowie der Inhalt der Webseite gespeichert.

Der Inhalt der Webseite wird analysiert und es werden Informationen darüber gespeichert, welches Wort mit welcher Häufigkeit und an welchen Positionen in der Webseite vorkommt (etwa: im Titel, als Überschrift, im Fließtext, mit welcher Schriftgröße etc.).
Diese Informationen werden im so genannten *Index* gespeichert.

Außerdem werden die *Links*, die auf Webseiten angegeben sind, analysiert.
Enthält Webseite i einen Link auf eine Webseite j, so wird der Text, mit dem der Link beschriftet ist, im zu j gehörenden Index-Eintrag abgelegt.
Diese *Linkbeschriftungen* geben wertvolle Hinweise darüber, welche Informationen die Webseite j enthält.

Folie 5

Der invertierte Index:

Aus dem Index wird der so genannte *invertierte Index* generiert.
Dies ist eine Datenstruktur, die zu jedem möglichen Suchwort eine Liste aller Webseiten angibt, die dieses Suchwort enthalten.
Dabei werden jeweils auch Zusatzinformationen gespeichert, die die Wichtigkeit des Suchworts innerhalb der Webseite beschreiben, z.B. die Häufigkeit des Stichworts, seine Position und Schriftgröße innerhalb der Webseite sowie *das Vorkommen des Stichworts in Beschriftungen von Links auf die Webseite*.

Folie 6

Der Web-Graph:

Die *Link-Struktur* des Internets kann man durch einen gerichteten Graphen modellieren, bei dem jede Webseite (d.h. jede URL) durch einen Knoten repräsentiert wird, und bei dem es eine Kante von Knoten i zu Knoten j gibt, wenn die Webseite i einen Link auf Webseite j enthält.
Dieser Graph wird *Link-Index* oder *Web-Graph* genannt.
Der Web-Graph wird üblicherweise als Adjazenzliste gespeichert.

Folie 7

Bearbeitung von Such-Anfragen:

Eingabe: eine Liste von Such-Stichworten

Ziel: finde die hinsichtlich dieser Stichworte informativsten Webseiten und zeige diese sortiert nach ihrer Relevanz an

Dabei werden folgende Kriterien berücksichtigt:

(A) die Häufigkeit und Positionierung der Suchbegriffe auf der jeweiligen Webseite sowie in der Beschriftung von Links, die auf diese Webseite verweisen, und

(B) die grundlegende Bedeutung einer Webseite.

Für (A) können Methoden aus dem Bereich *Information Retrieval* verwendet werden. Details dazu finden sich z.B. in Kapitel 6 von [10].

Für (B) wird die Link-Struktur des Internets, d.h. der Web-Graph berücksichtigt.

Folie 8

Die „grundlegende Bedeutung“ einer Webseite:

Das Maß für die „grundlegende Bedeutung“ einer Webseite wird aus der Link-Struktur des Internets gewonnen, ohne dass der textuelle Inhalt einer Webseite dabei berücksichtigt wird.

Als Rechtfertigung für die Güte dieses Ansatzes, geht man von der folgenden Annahme aus:

Wenn eine Webseite i einen Link auf eine Webseite j enthält, dann

- gibt es eine inhaltliche Beziehung zwischen beiden Webseiten, und
- der Autor der Webseite i hält die Informationen auf Webseite j für wertvoll.

Folie 9

Es gibt verschiedene Verfahren, die Maße für die grundlegende Bedeutung einer Webseite liefern, beispielsweise das von *Google* genutzte *Page-Rank* Verfahren von Brin und Page [3] oder die *HITS* (Hypertext Induced Topic Search) Methode von Kleinberg [7].

Beide Ansätze versuchen, die in der Link-Struktur manifestierte „relative Wertschätzung" zwischen einzelnen Webseiten in eine „grundlegende Bedeutung" der Webseiten umzurechnen.
Details zu den beiden Verfahren finden sich in dem Buch [8].

Folie 10

Bearbeitung einer Suchanfrage:

Bei der Bearbeitung einer Suchanfrage, bei der eine Liste s von Such-Stichworten eingegeben wird, wird unter Verwendung von (A) und (B) jeder Webseite i ein Wert $\mathit{Score}(i, s)$ zugeordnet, der als *Maß für die Relevanz der Webseite i hinsichtlich der Suchanfrage s* dient.

Als Trefferliste gibt die Suchmaschine dann eine Liste aller Webseiten aus, deren Score über einer bestimmten Schranke liegt und sortiert die Liste so, dass die Webseiten mit dem höchsten Score am weitesten oben stehen.
Wie der Wert $\mathit{Score}(i, s)$ gewählt wird, ist Betriebsgeheimnis der einzelnen Betreiber von Suchmaschinen.

Im Rest dieses Kapitels werden wir uns anhand des Page-Rank Verfahrens etwas genauer ansehen, wie die „grundlegende Bedeutung" einer Webseite modelliert und berechnet werden kann.

1.3 Der Page-Rank einer Webseite

Folie 11

Der Page-Rank einer Webseite:

Der Page-Rank liefert ein Maß für die „grundlegende Bedeutung" einer Webseite, das allein also aus der Link-Struktur des Internets bestimmt wird, ohne dass der textuelle Inhalt einer Webseite dabei berücksichtigt wird.

Wir schreiben im Folgenden $G = (V, E)$, um den *Web-Graph*en zu bezeichnen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass *die Webseiten mit den Zahlen* $1, \ldots, n$ *durchnummeriert* sind (wobei $n = |V|$ ist), und dass $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist.

Jeder Knoten von G repräsentiert eine Webseite, und jede *Kante* $(i, j) \in E$ modelliert einen *Link von Webseite i auf Webseite j*.

Für jeden Knoten $i \in V$ sei

$$a_i \ := \ \text{Aus-Grad}_G(i) \ = \ |\{j \in V \ : \ (i, j) \in E\}|$$

der *Ausgangsgrad von i in G*. D.h. a_i ist die Anzahl der Hyperlinks, die von der Webseite i auf andere Webseiten verweisen.

Folie 12

Für eine Webseite $j \in V$ schreiben wir $\text{Vor}_G(j)$, um die Menge aller Webseiten zu bezeichnen, die einen Link auf j enthalten, d.h.

$$\text{Vor}_G(j) \ = \ \{i \in V \ : \ (i, j) \in E\}.$$

Die Elemente in $\text{Vor}_G(j)$ werden *Vorgänger* von j genannt.

Folie 13

Die „grundlegende Bedeutung“ einer Webseite i wird im Folgenden durch eine Zahl PR_i modelliert, dem so genannten *Page-Rank* von i.

Der Wert PR_i soll die Qualität (im Sinne von „Renommee“ oder „Ansehen“) von Webseite i widerspiegeln; die Zahl PR_i soll umso größer sein, je höher das Renommee der Webseite i ist.

Das Renommee (und damit der Wert PR_j) einer Webseite j wird als hoch bewertet, wenn viele Webseiten i mit hohem Page-Rank PR_i einen Link auf die Seite j enthalten.

Folie 14

Die Werte PR_i, die allen Webseiten $i \in V$ zugeordnet werden, werden daher so gewählt, dass Folgendes gilt:

> *Eine Webseite i mit a_i ausgehenden Links „vererbt“ ihren Page-Rank an jede Webseite j mit $(i, j) \in E$ um den Anteil $\frac{\mathsf{PR}_i}{a_i}$.*

Mit dieser Sichtweise müsste also für alle $j \in V$ mit $\text{Vor}_G(j) \neq \emptyset$ gelten:

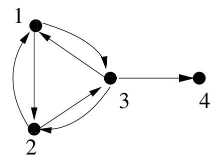
$$\mathsf{PR}_j \ = \ \sum_{i \in \text{Vor}_G(j)} \frac{\mathsf{PR}_i}{a_i}. \tag{1.1}$$

Folie 15

Ein Problem:

Ein Problem stellen hierbei Knoten dar, deren Ausgangsgrad 0 ist, da solche Knoten ihren Page-Rank nicht an andere Knoten weitervererben und daher zu Werten PR_i führen können, die kein sinvolles Maß für die Bedeutung einer Webseite liefern.

Als Beispiel betrachte man den folgenden Graphen $G = (V, E)$:



Frage: Welche Werte $\mathsf{PR}_1, \mathsf{PR}_2, \mathsf{PR}_3, \mathsf{PR}_4 \in \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung (1.1) ?

Antwort: Die einzigen Werte $\mathsf{PR}_1, \mathsf{PR}_2, \mathsf{PR}_3, \mathsf{PR}_4 \in \mathbb{R}$, die die Gleichung (1.1) erfüllen, sind $\mathsf{PR}_1 = \mathsf{PR}_2 = \mathsf{PR}_3 = \mathsf{PR}_4 = 0$.
Diese Werte spiegeln aber nicht die intuitive „grundlegende Bedeutung“ wider, die man den Webseiten 1, 2, 3 und 4 zuordnen würde!

Folie 16

Im Folgenden werden *Knoten vom Ausgangsgrad 0* auch *Senken* genannt.

Zur Bestimmung des Page-Ranks betrachtet man in der Regel nur *Graphen ohne Senken*, d.h. gerichtete Graphen, bei denen jeder Knoten einen Ausgangsgrad $\geqslant 1$ hat.

Natürlich gibt es keine Garantie, dass der Web-Graph keine Senken besitzt. Die Autoren von [3, 11] schlagen zwei Möglichkeiten vor, den Web-Graphen in einen Graphen ohne Senken zu transformieren:

- Die eine Möglichkeit ist, von jeder Senke Kanten zu *allen* Knoten hinzuzufügen.
- Die andere Möglichkeit ist, alle Senken zu löschen und dies rekursiv so lange zu tun, bis ein Graph übrig bleibt, der keine Senke besitzt.

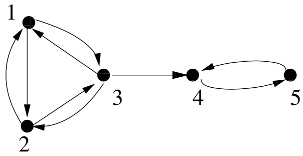
Wir nehmen im Folgenden an, dass eine dieser beiden Transformationen durchgeführt wurde und dass der Web-Graph durch einen endlichen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ repräsentiert wird, der keine Senke besitzt.

Folie 17

Ein weiteres Problem:

Ein weiteres Problem stellen Knotenmengen dar, die unter sich zwar verbunden sind, die aber keine Kante zu einem anderen Knoten des Graphen G enthalten.

Als einfaches Beispiel betrachten wir den folgenden Graphen $G = (V, E)$:



Frage: Welche Werte $\mathsf{PR}_1, \mathsf{PR}_2, \mathsf{PR}_3, \mathsf{PR}_4, \mathsf{PR}_5 \in \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung (1.1) ?

Antwort: Man kann sich leicht davon überzeugen, dass Werte $\mathsf{PR}_1, \mathsf{PR}_2, \mathsf{PR}_3, \mathsf{PR}_4, \mathsf{PR}_5 \in \mathbb{R}$ genau dann die Gleichung (1.1) erfüllen, wenn $\mathsf{PR}_1 = \mathsf{PR}_2 = \mathsf{PR}_3 = 0$ und $\mathsf{PR}_4 = \mathsf{PR}_5$ ist.
Insbesondere kann für $\mathsf{PR}_4 = \mathsf{PR}_5$ jede beliebige Zahl gewählt werden!

Ähnlich wie im vorherigen Beispiel spiegeln diese Werte nicht die intuitive „grundlegende Bedeutung“ wider, die man den Webseiten 1–5 zuordnen würde!

D.h. die durch die Gleichung (1.1) gegebenen Werte $\mathsf{PR}_1, \ldots, \mathsf{PR}_5$ liefern kein sinnvolles Maß, um die grundlegende Bedeutung der einzelnen Webseiten zu bewerten.

Folie 18

Der Dämpfungsfaktor:

Um dieses Problem zu vermeiden, wird die Vererbung von PR_i auf die Nachfolgeseiten j mit $(i, j) \in E$ meistens um einen *Dämpfungsfaktor* d mit $0 \leqslant d \leqslant 1$ abgeschwächt.

Dies wird in der folgenden Definition präzisiert.

Folie 19

Die Page-Rank-Eigenschaft:

Definition 1.1 (Page-Rank-Eigenschaft)**.**

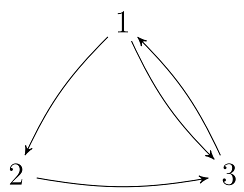
Sei d eine reelle Zahl mit $0 \leqslant d \leqslant 1$. Die Zahl d wird im Folgenden *Dämpfungsfaktor* genannt.
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, der keine Senke besitzt, und sei $n := |V| \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und $V = \{1, \ldots, n\}$.
Für alle $i, j \in V$ sei $a_i := \text{Aus-Grad}_G(i)$ und $\text{Vor}_G(j) := \{i \in V \ : \ (i, j) \in E\}$. Ein Tupel $\mathsf{PR} = (\mathsf{PR}_1, \ldots, \mathsf{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ hat die *Page-Rank-Eigenschaft bezüglich d*, wenn für alle $j \in V$ gilt:

$$\mathsf{PR}_j \quad = \quad \frac{1-d}{n} \quad + \ d \cdot \sum_{i \in \text{Vor}_G(j)} \frac{\mathsf{PR}_i}{a_i}. \tag{1.2}$$

Beachte. Für den Dämpfungsfaktor $d = 1$ erhält man gerade die Gleichung (1.1).
Für den Dämpfungsfaktor $d = 0$ ist $\mathsf{PR}_1 = \mathsf{PR}_2 = \ldots = \mathsf{PR}_n = \frac{1}{n}$.
In [3] wird empfohlen, den Wert $d = 0.85 = \frac{17}{20}$ zu wählen.

Folie 20

Beispiel 1.2. Zur Veranschaulichung der Page-Rank-Eigenschaft betrachten wir den Dämpfungsfaktor $d := \frac{1}{2}$ und den folgenden Graphen $G = (V, E)$:



Wir suchen ein Tupel $\mathsf{PR} = (\mathsf{PR}_1, \mathsf{PR}_2, \mathsf{PR}_3)$ von reellen Zahlen, das die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. $d = \frac{1}{2}$ hat, d.h. es gilt:

(1) $\mathsf{PR}_1 = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathsf{PR}_3}{1}$

(2) $\mathsf{PR}_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathsf{PR}_1}{2}$

(3) $\mathsf{PR}_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mathsf{PR}_1}{2} + \frac{\mathsf{PR}_2}{1} \right)$.

Die Werte PR_1, PR_2 und PR_3 können wir daher finden, indem wir das Lineare Gleichungssystem lösen, das aus den folgenden drei Gleichungen besteht:

Folie 21

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad 1 \cdot \mathsf{PR}_1 \;-\; \tfrac{1}{2} \cdot \mathsf{PR}_3 \;=\; \tfrac{1}{6} \\
&(2) \quad -\tfrac{1}{4} \cdot \mathsf{PR}_1 \;+\; 1 \cdot \mathsf{PR}_2 \;=\; \tfrac{1}{6} \\
&(3) \quad -\tfrac{1}{4} \cdot \mathsf{PR}_1 \;-\; \tfrac{1}{2} \cdot \mathsf{PR}_2 \;+\; 1 \cdot \mathsf{PR}_3 \;=\; \tfrac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Die Auflösung dieses linearen Gleichungssystems (z.B. mittels *Gauß-Elimination*) liefert die Werte

$$\mathsf{PR}_1 = \tfrac{14}{39}, \quad \mathsf{PR}_2 = \tfrac{10}{39}, \quad \mathsf{PR}_3 = \tfrac{15}{39}.$$

□Ende Beispiel 1.2

Folie 22

Auf die gleiche Art wie in diesem Beispiel erhält man auch für den Web-Graphen und einen geeigneten Dämpfungsfaktor d ein entsprechendes lineares Gleichungssystem.

Um den Page-Rank der einzelnen Webseiten zu berechnen, müssen wir „nur“ dieses lineare Gleichungssystem lösen.

Folie 23

Dabei stellen sich folgende Probleme:

(1) Zunächst ist völlig unklar, ob dieses lineare Gleichungssystem überhaupt eine Lösung besitzt, und falls ja, ob die Lösung eindeutig ist.

Anhand von Definition 1.1 ist nämlich prinzipiell auch denkbar, dass es gar kein Tupel gibt, das die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d hat, oder dass es mehrere verschiedene Tupel gibt, die die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d besitzen.

(2) Das lineare Gleichungssystem hat n Unbekannte, wobei n die Anzahl der Webseiten im Internet ist — und diese Zahl ist enorm groß.

Um den Page-Rank aller Webseiten zu bestimmen, benötigen wir daher ein extrem effizientes Verfahren zum Lösen dieses linearen Gleichungssystems.

Im Rest des Kapitels werden wir sehen, dass die Theorie der *Markov-Ketten* uns hilft, diese Probleme zu lösen. Dazu ist die im folgenden Abschnitt dargestellte Sichtweise auf den Page-Rank sehr hilfreich.

1.4 Der Zufalls-Surfer

Folie 24

Der Zufalls-Surfer:

Wir nehmen an, dass der Webgraph durch einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ repräsentiert wird, der keine Senke besitzt. Des Weiteren sei d eine beliebige reelle Zahl mit $0 \leqslant d \leqslant 1$.

Wir betrachten einen *Zufalls-Surfer* (englisch: *random surfer*), der auf einer beliebigen Webseite beginnt und beliebige Links verfolgt, ohne dabei auf Inhalte zu achten.

Wenn der Zufalls-Surfer auf einer Webseite i ist, so wählt er

- mit Wahrscheinlichkeit d einen Link, der von Seite i ausgeht.

  Hierbei wird dann jeder der $a_i = \text{Aus-Grad}_G(i)$ ausgehenden Links mit derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{d}{a_i}$ ausgewählt.

- mit Wahrscheinlichkeit $(1 - d)$ eine *beliebige* Webseite im Web-Graphen.

  Hierbei wird dann jede der n Webseiten mit derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{1-d}{n}$ ausgewählt.

Folie 25

Für alle $i, j \in V$ gibt daher

$$p_{i,j} \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1-d}{n} + \dfrac{d}{a_i} & \text{, falls } (i,j) \in E \\[2ex] \dfrac{1-d}{n} & \text{, falls } (i,j) \notin E \end{cases} \tag{1.3}$$

die Wahrscheinlichkeit an, mit der der Zufalls-Surfer in einem Schritt von Seite i zu Seite j wechselt.

Diese Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich der Zufalls-Surfer von Knoten zu Knoten bewegt, lassen sich kompakt durch die folgende Matrix darstellen.

Folie 26

Die Page-Rank-Matrix $P(G,d)$

Definition 1.3 (Die Page-Rank-Matrix $P(G,d)$)**.**
Sei $d \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant d \leqslant 1$, sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $G = (V,E)$ mit $V = \{1,\dots,n\}$ ein gerichteter Graph ohne Senke. Für jedes $i \in V$ sei $a_i := \text{Aus-Grad}_G(i)$.

Die *Page-Rank-Matrix* ist die $n{\times}n$-Matrix

$$P(G,d) \;:=\; \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix},$$

wobei für alle $i,j \in V$ der Eintrag in Zeile i und Spalte j der in Gleichung (1.3) festgelegte Wert $p_{i,j}$ ist.

Wir schreiben auch kurz $(p_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, um die Matrix $P(G,d)$ zu bezeichnen.

Folie 27

Beispiel 1.4. Für den Wert $d = \frac{1}{2}$ und den Graphen G aus Beispiel 1.2 ist beispielsweise $p_{1,1} = \frac{1}{6}$, $p_{1,2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$, $p_{2,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ und insgesamt

$$P(G,d) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$\square$Ende Beispiel 1.4

Folie 28

Zur Erinnerung: Vektor-Matrix-Produkt

Um den Zusammenhang zwischen dem Zufalls-Surfer, der Page-Rank-Matrix und Tupeln mit der Page-Rank-Eigenschaft beschreiben zu können, benötigen wir folgende Notation für das Rechnen mit Matrizen.

Zur Erinnerung (Vektor-Matrix-Produkt).
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, und für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ sei $p_{i,j}$ eine reelle Zahl. Sei $P := (p_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ die $n{\times}n$-Matrix, die in Zeile i und Spalte j den Eintrag $p_{i,j}$ hat (für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$).

Ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein Tupel aus n reellen Zahlen, so ist das *Vektor-Matrix-Produkt*

$$X \cdot P$$

das Tupel $Y = (Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathbb{R}^n$, bei dem für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$Y_j \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot p_{i,j}.$$

Folie 29

Zusammenhang zwischen Page-Rank-Matrix und Page-Rank-Eigenschaft

Der folgende Satz beschreibt den genauen Zusammenhang zwischen Zufalls-Surfer, Page-Rank-Matrix und Tupeln mit der Page-Rank-Eigenschaft.

Satz 1.5. *Sei $d \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant d < 1$, sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$, der keine Senke besitzt. Dann gilt:*

(a) Ist $\mathsf{PR} = (\mathsf{PR}_1, \ldots, \mathsf{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Tupel, das die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d besitzt, so ist $\sum_{i=1}^{n} \mathsf{PR}_i = 1$.

(b) Für jedes Tupel $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$ gilt: X besitzt die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d $\iff$ $X \cdot P(G, d) \ = \ X$.

Beweis. (a) Sei $\mathsf{PR} = (\mathsf{PR}_1, \ldots, \mathsf{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Tupel, das die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d besitzt. D.h. es gilt[2] f.a. $j \in \{1, \ldots, n\}$, dass

$$\mathsf{PR}_j \quad = \quad \tfrac{1-d}{n} \ + \ d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i}.$$

[2] Wir schreiben kurz „f.a.“ für „für alle“, „s.d.“ für „so dass“ und „ex.“ für „es existiert“.

Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \mathsf{PR}_j \\
=\ & \sum_{j=1}^{n} \Big(\tfrac{1-d}{n} \ + \ d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i} \Big) \quad = \quad n \cdot \tfrac{1-d}{n} \ + \ d \cdot \sum_{j=1}^{n} \ \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i} \\
=\ & (1-d) \ + \ d \cdot \sum_{(i,j) \in E} \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i} \quad = \quad (1-d) \ + \ d \cdot \sum_{i=1}^{n} \ \sum_{j:(i,j) \in E} \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i} \\
\stackrel{\substack{G \text{ ohne} \\ \text{Senke}}}{=}\ & (1-d) \ + \ d \cdot \sum_{i=1}^{n} \big(a_i \cdot \tfrac{\mathsf{PR}_i}{a_i} \big) \quad = \quad (1-d) \ + \ d \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathsf{PR}_i \\
=\ & (1-d) \ + \ d \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathsf{PR}_j .
\end{aligned}
$$

Insbesondere gilt also:

$$
(1-d) \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathsf{PR}_j \quad = \quad (1-d). \qquad (*)
$$

Wegen $d \neq 1$ ist $(1-d) \neq 0$, und daher erhalten wir aus Gleichung $(*)$, dass $\sum_{j=1}^{n} \mathsf{PR}_j = 1$ ist. Dies schließt den Beweis von Teil (a) ab.

(b) Sei $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$. Sei $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ so dass $X \cdot P(G,d) = Y$. Dann gilt gemäß der Definition des Vektor-Matrix-Produkts und Definition 1.3 für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$, dass

$$
\begin{aligned}
Y_j \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot p_{i,j} \quad & \stackrel{(1.3)}{=} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \frac{1-d}{n} \ + \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} X_i \cdot \frac{d}{a_i} \\
& = \quad \frac{1-d}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \ + \ d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \frac{X_i}{a_i} \\
& \stackrel{\sum_{i=1}^{n} X_i = 1}{=} \quad \frac{1-d}{n} \ + \ d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \frac{X_i}{a_i} \,,
\end{aligned}
$$

d.h. es gilt

$$
Y_j \quad = \quad \frac{1-d}{n} \ + \ d \cdot \sum_{i \in \mathrm{Vor}_G(j)} \frac{X_i}{a_i} \,. \qquad (**)
$$

Aus Definition 1.1 zusammen mit Gleichung $(**)$ folgt:

$$\begin{array}{ll} & X \text{ besitzt die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. } d \\ \iff & \text{f.a. } j \in \{1,\ldots,n\} \text{ gilt: } \; X_j = Y_j \\ \iff & X \cdot P(G,d) \;=\; X. \end{array}$$

$\square$

Folie 30

Beachte. Für den Beweis von Satz 1.5 (a) ist wichtig, dass $d \neq 1$ ist und dass G keine Senke besitzt.

Folie 31

Linke Eigenvektoren zum Eigenwert 1

Notation 1.6 (Eigenvektor)**.**
Ein Vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)$ heißt *linker Eigenvektor zum Eigenwert* 1 der $n{\times}n$-Matrix P, falls gilt: $X \cdot P = X$ und $X \neq (0, \ldots, 0)$.

Satz 1.5 besagt also, dass ein Tupel $\mathsf{PR} = (\mathsf{PR}_1, \ldots, \mathsf{PR}_n) \in \mathbb{R}^n$ genau dann die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d besitzt, wenn es ein linker Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix $P(G,d)$ ist, für den $\sum_{i=1}^{n} \mathsf{PR}_i = 1$ ist.

Diese Sichtweise auf den Page-Rank sowie die in den folgenden Abschnitten vorgestellte Theorie der Markov-Ketten helfen uns, die beiden am Ende von Abschnitt 1.3 gestellten Probleme zu lösen.

1.5 Markov-Ketten

Folie 32

Markov-Ketten und stochastische Matrizen

Markov-Ketten sind nach dem russischen Mathematiker Andrei A. Markov (1856–1922) benannt. In der Literatur werden unterschiedliche Schreibweisen des Namens verwendet, z.B. Markov, Markow oder Markoff.

Definition 1.7 (Markov-Kette)**.**
Eine *(homogene) Markov-Kette* mit *Übergangsmatrix* P wird durch eine $n{\times}n$-Matrix

$$P \;=\; \big(p_{i,j}\big)_{i,j=1,\ldots,n}$$

mit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ beschrieben, für die gilt:

(1) $p_{i,j} \geqslant 0$ für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$, und

(2) für jede Zeile $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1.$

Eine Matrix P, die die Eigenschaften (1) und (2) besitzt, wird auch *stochastische Matrix* genannt.

Folie 33

Der zu P gehörende Graph

Der *zu einer stochastischen Matrix P gehörende Graph* ist der gerichtete Graph mit Knotenmenge $V = \{1,\dots,n\}$, so dass für alle $i,j \in \{1,\dots n\}$ gilt:
Es gibt in G genau dann eine Kante von i nach j, wenn $p_{i,j} > 0$ ist.

Den Eintrag $p_{i,j}$ in Zeile i und Spalte j von P kann man als Wahrscheinlichkeit dafür auffassen, dass ein Zufalls-Surfer im Graphen G in einem Schritt von Knoten i zu Knoten j springt.

Folie 34

Beispiel 1.8. Sei $G = (V,E)$ ein beliebiger gerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{1,\dots,n\}$ (für $n := |V| \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$), der keine Senke besitzt. Sei d eine reelle Zahl mit $0 \leqslant d < 1$ und sei $P := P(G,d)$ die zugehörige Page-Rank-Matrix.

Gemäß der Definition von $P(G,d)$ ist $p_{i,j} > 0$ für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ (dazu beachte man, dass $0 \leqslant d < 1$ ist).

Außerdem gilt für jede Zeile $i \in \{1,\dots,n\}$, dass

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{1-d}{n} \;+\; \sum_{j\,:\,(i,j)\in E} \frac{d}{a_i} \quad \stackrel{G \text{ ohne Senke}}{=} \quad (1-d) \;+\; a_i \cdot \frac{d}{a_i} \quad = \quad 1.$$

Somit ist P eine stochastische Matrix und beschreibt daher eine Markov-Kette.
Für jedes $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gibt der Wert $p_{i,j}$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Zufalls-Surfer in einem Schritt von Webseite i zu Webseite j springt.

Da $p_{i,j} > 0$ ist, ist der zu P gehörende Graph der *vollständige gerichtete Graph* auf n Knoten, d.h. der Graph mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ und Kantenmenge $V \times V$.
Diesen Graphen bezeichnen wir im Folgenden mit $\vec{K}_n$. $\square_{\text{Ende Beispiel 1.8}}$

Die Theorie der Markov-Ketten und der stochastischen Matrizen wurde in der Literatur gut untersucht (siehe [6, 5]).

1.6 Die effiziente Berechnung des Page-Rank

Folie 35

Um zu sehen, dass die Theorie der Markov-Ketten uns eine Lösung für die beiden am Ende von Abschnitt 1.3 gestellten Probleme zu lösen. liefert, schauen wir uns die Bewegungen des Zufalls-Surfers auf dem Web-Graphen etwas genauer an.

Für unsere Betrachtungen ist der folgendermaßen definierte Begriff einer *Verteilung* sehr nützlich.

Folie 36

Verteilungen

Definition 1.9. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.
Eine *Verteilung* auf $V = \{1, \ldots, n\}$ ist ein Tupel $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$, für das gilt:

(1) für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $X_i \geqslant 0$ und

(2) $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$.

Ist G ein gerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ und ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine Verteilung auf V, so fassen wir für jedes $i \in V$ die Zahl X_i als Wahrscheinlichkeit dafür auf, dass ein Zufalls-Surfer in G sich auf Knoten i befindet.

Folie 37

Beobachtung 1.10. *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $P = (p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine stochastische Matrix. Ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine Verteilung auf $V := \{1, \ldots, n\}$, so gibt das Tupel $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ mit*

$$X \cdot P \;=\; Y$$

Folgendes an: Wenn wir in dem zu P gehörenden Graphen für jedes $i \in V$ den Zufalls-Surfer mit Wahrscheinlichkeit X_i auf Knoten i beginnen lassen, so gibt für jedes $j \in V$ die Zahl

$$Y_j \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot p_{i,j}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Zufalls-Surfer sich nach einem Schritt auf Knoten j befindet.

Rekursiv können wir so für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Verteilung $X^{(k)} = (X_1^{(k)}, \ldots, X_n^{(k)})$ angeben, so dass für jedes $j \in V$ der Wert $X_j^{(k)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass der Zufalls-Surfer sich nach k Schritten auf Knoten j befindet. Dazu wählen wir

$$X^{(0)} \;:=\; X \qquad \textit{und} \qquad X^{(k+1)} \;:=\; X^{(k)} \cdot P\,, \qquad \textit{f.a. } k \in \mathbb{N}.$$

Somit gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$:
$$X^{(k)} \quad = \quad X^{(0)} \cdot \underbrace{P \cdot P \cdot \cdots \cdot P}_{k \textit{ mal}} \quad = \quad X \cdot P^k.$$

Folie 38

Zur Erinnerung: Das Matrix-Produkt

Zur Erinnerung. Das Produkt $A \cdot B$ zweier $n \times n$-Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ und $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ ist die $n \times n$-Matrix $C = (c_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit

$$c_{i,j} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} \cdot b_{\ell,j}$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Für jede Zahl $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist die $n{\times}n$-Matrix A^k rekursiv definiert durch

$$A^1 := A \qquad \text{und} \qquad A^{k+1} := A \cdot A^k \quad (\text{für alle } k \in \mathbb{N}).$$

Wir schreiben $(A^k)_{i,j}$, um den Eintrag in Zeile i und Spalte j der Matrix A^k zu bezeichnen.

Folie 39

Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

Beobachtung 1.11. *Ist $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und ist $P = (p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine stochastische Matrix, so können wir für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ den Eintrag $(P^k)_{i,j}$ in Zeile i und Spalte j der Matrix P^k als die Wahrscheinlichkeit dafür auffassen, dass der Zufalls-Surfer auf dem zu P gehörenden Graphen innerhalb von genau k Schritten von Knoten i zu Knoten j gelangt.*

Insbesondere gilt auch für jede Zeile i, dass $\sum_{j=1}^{n} (P^k)_{i,j} = 1$.

Wegen

$$P^{k+1} \quad = \quad P^k \cdot P \quad = \quad P \cdot P^k$$

gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$:

$$(P^{k+1})_{i,j} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} (P^k)_{i,\ell} \cdot p_{\ell,j} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell} \cdot (P^k)_{\ell,j}\,.$$

Folie 40

Zur effizienten Berechnung des Page-Ranks machen wir uns zunutze, dass die durch die Page-Rank-Matrix $P(G,d)$ (für $0 \leqslant d < 1$) beschriebene Markov-Kette die folgende Eigenschaft hat. Der Beweis, dass die Matrix $P(G,d)$ tatsächlich diese Eigenschaft hat, wird am Ende dieses Abschnitts durch Satz 1.14 geliefert.

Folie 41

Ergodische Markov-Ketten

Definition 1.12 (Ergodische Markov-Ketten)**.**
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $P = (p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine stochastische Matrix.
Die durch P beschriebene Markov-Kette heißt *ergodisch*, wenn für alle Zeilen $i, i' \in \{1, \ldots, n\}$ und alle Spalten $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

Die Grenzwerte

$$\lim_{k \to \infty} (P^k)_{i,j} \qquad \text{und} \qquad \lim_{k \to \infty} (P^k)_{i',j}$$

existieren und es gilt

$$\lim_{k \to \infty} (P^k)_{i,j} \quad = \quad \lim_{k \to \infty} (P^k)_{i',j} \quad > \quad 0.$$

Folie 42

Eigenschaften ergodischer Markov-Ketten

Beobachtung 1.13 (Eigenschaften ergodischer Markov-Ketten)**.**
Ist P eine stochastische Matrix, die eine ergodische Markov-Kette beschreibt, so gilt offensichtlicherweise Folgendes:

(1) Die Matrix
$$P' \ := \ \left(\lim_{k\to\infty} \left(P^k\right)_{i,j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \tag{1.4}$$
ist wohldefiniert (da die Grenzwerte existieren), alle Einträge sind > 0 (da die Grenzwerte alle > 0 sind), und

(2) alle Zeilen von P' sind identisch.

Wir schreiben $p' := (p'_1, \dots, p'_n)$, um die erste Zeile von P' zu bezeichnen.

Folie 43

Die Matrix P' sieht daher folgendermaßen aus:

$$P' \quad = \quad \begin{pmatrix} p' \\ p' \\ \vdots \\ p' \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} p'_1 & \cdots & p'_n \\ p'_1 & \cdots & p'_n \\ & \vdots & \\ p'_1 & \cdots & p'_n \end{pmatrix}.$$

Wegen Gleichung (1.4) ist $P' = \lim_{k\to\infty} \left(P^k\right)$.
Somit ist $P' \cdot P = P'$, und daher gilt insbesondere

$$p' \cdot P \ = \ p' \,,$$

d.h. *p' ist ein linker Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix P.*

Da für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jede Zeile $i \in \{1, \dots, n\}$ die Summe aller Einträge der i-ten Zeile von P^k gleich 1 ist und die Grenzwertbildung mit der Bildung endlicher Summen vertauscht werden kann, ist auch die Summe aller Einträge der i-ten Zeile von P' gleich 1.
Daher ist $\sum_{i=1}^{n} p'_i = 1$, d.h. *p' ist eine Verteilung.*

Folie 44

Notation. Eine *Verteilung Y mit $Y \cdot P = Y$* wird auch *stationäre Verteilung* für P genannt.

Für jede beliebige Verteilung $X = (X_1, \ldots, X_n)$ gilt:

$$X \cdot P' \;=\; p', \tag{1.5}$$

denn für jedes $j \in V$ ist der j-te Eintrag im Tupel $X \cdot P'$ gerade die Zahl $\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot p'_j \;=\; p'_j \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \;=\; p'_j$.

Daher gilt:

(a) $p' = (p'_1, \ldots, p'_n)$ ist die ***einzige*** *stationäre Verteilung*, die P besitzt, und

(b) wenn der Zufalls-Surfer im zu P gehörenden Graphen seinen Startknoten gemäß einer beliebigen Anfangsverteilung $X = (X_1, \ldots, X_n)$ wählt und hinreichend viele Schritte macht, so ist für jedes $j \in V$ die Wahrscheinlichkeit, bei Knoten j zu landen, beliebig nah bei p'_j.

Die Wahl des Anfangsknotens ist für einen Zufalls-Surfer, der hinreichend lange surft, also egal.

Folie 45

Auf Grund der Gleichungen (1.4) und (1.5) erhalten wir:

$$p' \;\overset{(1.5)}{=}\; X \cdot P' \;\overset{(1.4)}{=}\; X \cdot \lim_{k\to\infty} P^k \;=\; \lim_{k\to\infty} \left(X \cdot P^k\right) \;=\; \lim_{k\to\infty} X^{(k)},$$

wobei $X^{(0)} := X$ und $X^{(k+1)} := X^{(k)} \cdot P$, f.a. $k \in \mathbb{N}$.

Um eine Näherung für das Tupel p' zu berechnen, können wir daher wie folgt vorgehen:

- Wir starten mit einer beliebigen Verteilung $X^{(0)} = X$ (etwa der *Gleichverteilung* $X = (\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$)
- und berechnen nacheinander für $k = 1, 2, 3$ usw. das Tupel $X^{(k+1)} := X^{(k)} \cdot P$.
- Dieser Prozess wird beendet, sobald das Tupel $X^{(k+1)}$ sich nicht mehr viel vom Tupel $X^{(k)}$ unterscheidet, d.h. sobald für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Zahl $|X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}|$ kleiner als eine vorher festgelegte Schranke ε ist (wobei $X_j^{(k+1)}$ und $X_j^{(k)}$ der Eintrag in der j-ten Komponente von $X^{(k+1)}$ bzw. $X^{(k)}$ ist).

$\square$ Beobachtung 1.13

Folie 46

Um diese Vorgehensweise für die Berechung des Page-Rank benutzen zu können, benötigen wir noch folgenden Satz.

Satz 1.14. *Ist $P = (p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine stochastische Matrix mit $p_{i,j} > 0$ f.a. $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, so ist die durch P beschriebene Markov-Kette ergodisch.*

Beweis: Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jede Spalte $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$m_j^{(k)} \quad := \quad \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} (P^k)_{i,j}$$

der kleinste Eintrag der j-ten Spalte von P^k, und sei

$$M_j^{(k)} \quad := \quad \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} (P^k)_{i,j}$$

der größte Eintrag der j-ten Spalte von P^k.

Behauptung 1: Für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$m_j^{(k)} \quad \leqslant \quad m_j^{(k+1)} \qquad \text{und} \qquad M_j^{(k)} \quad \geqslant \quad M_j^{(k+1)}.$$

Beweis. Wegen

$$(P^{k+1})_{i,j} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell} \cdot (P^k)_{\ell,j}$$

ist

$$\begin{aligned}
m_j^{(k+1)} \quad &= \quad \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} (P^{k+1})_{i,j} \\
&= \quad \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Big(\sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell} \cdot (P^k)_{\ell,j} \Big) \\
&\geqslant \quad \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Big(\sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell} \cdot m_j^{(k)} \Big) \\
&= \quad m_j^{(k)} \cdot \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Big(\underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell}}_{=1} \Big) \\
&= \quad m_j^{(k)}.
\end{aligned}$$

Analog folgt auch, dass $M_j^{(k+1)} \leqslant M_j^{(k)}$ ist. $\Box_{\text{Behauptung 1}}$

Folie 47

Gemäß Voraussetzung ist $p_{i,j} > 0$ und $p_{i,j} \leqslant 1$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Somit ist

$$a \ := \ \min_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} p_{i,j} \ > \ 0.$$

Gemäß Behauptung 1 gilt für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$0 \ < \ a \ \leqslant \ m_j^{(1)} \ \leqslant \ m_j^{(2)} \ \leqslant \ m_j^{(3)} \ \leqslant \ \cdots \tag{1.6}$$

und

$$1 \ \geqslant \ M_j^{(1)} \ \geqslant \ M_j^{(2)} \ \geqslant \ M_j^{(3)} \ \geqslant \ \cdots . \tag{1.7}$$

Behauptung 2: Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\right) \ = \ 0.$

Bevor wir Behauptung 2 beweisen, schließen wir zunächst den Beweis von Satz 1.14 ab.

Aus (1.6) und (1.7) folgt mit Behauptung 2, dass es für jede Spalte $j \in \{1, \ldots, n\}$ eine Zahl π_j gibt, so dass

$$\pi_j \ = \ \lim_{k\to\infty} m_j^{(k)} \ = \ \lim_{k\to\infty} M_j^{(k)}$$

ist, und es gilt $0 < a \leqslant \pi_j \leqslant 1$. Somit gilt für alle Zeilen $i, i' \in \{1, \ldots, n\}$ und alle Spalten $j \in \{1, \ldots, n\}$: Die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} (P^k)_{i,j} \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} (P^k)_{i',j}$$

existieren und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} (P^k)_{i,j} \ = \ \lim_{k\to\infty} (P^k)_{i',j} \ \geqslant \ a \ > \ 0.$$

Gemäß Definition 1.12 ist die durch P beschriebene Markov-Kette also ergodisch.

Folie 48

Um den Beweis von Satz 1.14 abzuschließen, müssen wir nur noch Behauptung 2 beweisen. Die folgende Behauptung 3 liefert uns den Schlüssel zum Beweis von Behauptung 2.

Behauptung 3: Sei $a := \min_{i,j \in \{1,\dots,n\}} p_{i,j}$. Seien $i_1, i_2 \in \{1,\dots,n\}$. Sei

$$I_1 \ := \ \big\{ \ \ell \in \{1,\dots,n\} \ : \ p_{i_1,\ell} \geqslant p_{i_2,\ell} \ \big\} \quad \text{und} \quad I_2 \ := \ \{1,\dots,n\} \setminus I_2,$$

d.h. I_1 ist die Menge aller Spalten, bei denen der Eintrag in Zeile i_1 größer oder gleich dem Eintrag in Zeile i_2 ist, und I_2 ist die Menge aller Spalten, bei denen der Eintrag in Zeile i_1 echt kleiner als der Eintrag in Zeile i_2 ist. Dann gilt:

(a) $\displaystyle\sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \ \leqslant \ 1 - na.$

(b) $\displaystyle\sum_{\ell \in I_2} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \ = \ - \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big).$

(c) $(P^{k+1})_{i_1,j} - (P^{k+1})_{i_2,j} \ \leqslant \ (1-na) \cdot \big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big)$, für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und $j \in \{1,\dots,n\}$.

Beweis.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \quad &= \quad \sum_{\ell \in I_1} p_{i_1,\ell} \ - \ \sum_{\ell \in I_1} p_{i_2,\ell} \\
&\overset{P \text{ stochastisch}}{=} \quad \Big(1 \ - \ \sum_{\ell \in I_2} p_{i_1,\ell}\Big) \ - \ \sum_{\ell \in I_1} p_{i_2,\ell} \\
&= \quad 1 \ - \ \Big(\ \sum_{\ell \in I_2} \underbrace{p_{i_1,\ell}}_{\geqslant a} \ + \ \sum_{\ell \in I_1} \underbrace{p_{i_2,\ell}}_{\geqslant a} \ \Big) \\
&\leqslant \quad 1 - na\,.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell \in I_2} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \quad &= \quad \sum_{\ell \in I_2} p_{i_1,\ell} \ - \ \sum_{\ell \in I_2} p_{i_2,\ell} \\
&\overset{P \text{ stochastisch}}{=} \quad \Big(1 \ - \ \sum_{\ell \in I_1} p_{i_1,\ell}\Big) \ - \ \Big(1 \ - \ \sum_{\ell \in I_1} p_{i_2,\ell}\Big) \\
&= \quad - \sum_{\ell \in I_1} p_{i_1,\ell} \ + \ \sum_{\ell \in I_1} p_{i_2,\ell} \\
&= \quad - \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big)\,.
\end{aligned}$$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt:

$$
\begin{array}{cl}
 & (P^{k+1})_{i_1,j} - (P^{k+1})_{i_2,j} \\
\overset{P^{k+1}=P\cdot P^k}{=} & \sum_{\ell=1}^{n} p_{i_1,\ell} \cdot (P^k)_{\ell,j} \; - \; \sum_{\ell=1}^{n} p_{i_2,\ell} \cdot (P^k)_{\ell,j} \\
= & \sum_{\ell=1}^{n} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \cdot (P^k)_{\ell,j} \\
= & \sum_{\ell \in I_1} \underbrace{\big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big)}_{\geqslant 0} \cdot \underbrace{(P^k)_{\ell,j}}_{\leqslant M_j^{(k)}} \; + \; \sum_{\ell \in I_2} \underbrace{\big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big)}_{<0} \cdot \underbrace{(P^k)_{\ell,j}}_{\geqslant m_j^{(k)}} \\
\leqslant & \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \cdot M_j^{(k)} \; + \; \sum_{\ell \in I_2} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \cdot m_j^{(k)} \\
= & M_j^{(k)} \cdot \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \; + \; m_j^{(k)} \cdot \sum_{\ell \in I_2} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \\
\overset{(b)}{=} & M_j^{(k)} \cdot \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \; - \; m_j^{(k)} \cdot \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \\
= & \big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big) \cdot \sum_{\ell \in I_1} \big(p_{i_1,\ell} - p_{i_2,\ell}\big) \\
\overset{(a)}{\leqslant} & \big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big) \cdot (1 - na) \, .
\end{array}
$$

$\square_{\text{Behauptung 3}}$

Unter Verwendung von Teil (c) von Behauptung 3 können wir nun Behauptung 2 beweisen.

Beweis von Behauptung 2:
Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig gewählt. Gemäß Behauptung 3(c) gilt für alle Zeilen $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, dass

$$(P^{k+1})_{i_1,j} \; - \; (P^{k+1})_{i_2,j} \quad \leqslant \quad (1 - na) \cdot \big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big) \, .$$

Speziell für die Zeile i_1 mit $(P^{k+1})_{i_1,j} = M_j^{(k+1)}$ und die Zeile i_2 mit $(P^{k+1})_{i_2,j} = m_j^{(k+1)}$ besagt dies, dass

$$M_j^{(k+1)} \; - \; m_j^{(k+1)} \quad \leqslant \quad (1 - na) \cdot \big(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\big) \, .$$

Da diese Ungleichung für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} M_j^{(k+1)} - m_j^{(k+1)} &\leqslant (1-na) \cdot \left(M_j^{(k)} - m_j^{(k)}\right) \\ &\leqslant (1-na)^2 \cdot \left(M_j^{(k-1)} - m_j^{(k-1)}\right) \\ &\leqslant (1-na)^3 \cdot \left(M_j^{(k-2)} - m_j^{(k-2)}\right) \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant (1-na)^k \cdot \left(M_j^{(1)} - m_j^{(1)}\right). \end{aligned}$$

Hierbei ist $\left(M_j^{(1)} - m_j^{(1)}\right)$ die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Eintrag der j-ten Spalte von P, also eine Zahl zwischen 0 und 1. Außerdem ist a der kleinste Eintrag in P. Für die Zeile i, in der der Eintrag a steht, gilt daher: $na \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} p_{i,\ell} = 1$. Somit gilt $0 < na \leqslant 1$, und daher

$$0 \leqslant (1-na) < 1.$$

Somit ist

$$\lim_{k\to\infty} (1-na)^k = 0,$$

und es folgt:

$$\lim_{k\to\infty} \left(M_j^{(k+1)} - m_j^{(k+1)}\right) = \lim_{k\to\infty} (1-na)^k \cdot \left(M_j^{(1)} - m_j^{(1)}\right) = 0.$$

$\square_{\text{Behauptung 2}}$

Insgesamt ist nun Satz 1.14 bewiesen. $\square_{\text{Satz 1.14}}$

Folie 49

Lösung der beiden Hauptprobleme

Folgerung 1.15 (Lösung der Probleme (1) und (2) auf Seite 12)**.**
Sei $P := P(G,d)$ die Page-Rank-Matrix für einen Dämpfungsfaktor d mit $0 \leqslant d < 1$ und einen gerichteten Graphen $G = (V,E)$ ohne Senke.

Wegen $d \neq 1$ sind alle Einträge in P echt größer als 0.

Mit Satz 1.14 erhalten wir, dass P ergodisch ist.

Aus Beobachtung 1.13 folgt, dass die stationäre Verteilung p' von P das eindeutig festgelegte Tupel ist, das die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. d besitzt.

Das am Ende von Beobachtung 1.13 beschriebene Vorgehen liefert ein Verfahren, um eine Näherung für das Tupel p' zu berechnen:

- *Sei $P := P(G,d)$ die Page-Rank-Matrix für den Dämpfungsfaktor $d := 0{,}85$, wobei G der Senken-freie Graph ist, der aus dem Web-Graphen durch wiederholtes Löschen von Senken entsteht.*
- *Starte mit einer beliebigen Verteilung $X^{(0)} = (X_1, \dots, X_n)$ (z.B. $X^{(0)} := (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$).*
- *Für $k := 1, 2, \dots$ berechne $X^{(k+1)} := X^{(k)} \cdot P$.*

Folie 50

Aus der Theorie der Markov-Ketten und den speziellen Eigenschaften der Page-Rank-Matrix ergibt sich, dass auf Grund des hohen Zusammenhangs des Web-Graphen die Folge der Tupel $X^{(k)}$ für $k = 0, 1, 2, \dots$ sehr schnell gegen die stationäre Verteilung p' konvergiert. Details dazu finden sich in [8, 6].

Laut Kapitel 5 des Buchs [9] reichen in der Praxis i.d.R. 50–75 Iterationen aus, so dass die Einträge des Vektors $X^{(k)}$ für $k = 75$ eine hinreichend gute Näherung für die Page-Ranks der einzelnen Webseiten sind.

1.7 Praktische Aspekte der Berechnung des Page-Ranks

In der Praxis werden mehrere Tausend PCs eingesetzt, die mehrere Stunden zur Berechnung des Page-Ranks benötigen — was in Anbetracht der Tatsache, dass es mehrere Milliarden Webseiten gibt, erstaunlich gering ist.

Kompakte Speicherung der Page-Rank-Matrix

Für den Web-Graphen müssen wir davon ausgehen, dass die Anzahl n der Knoten extrem groß ist ($n \geqslant 10^{12}$), so dass es nicht ratsam ist, alle n^2 Einträge der Page-Rank-Matrix $P := P(G,d)$ abzuspeichern. Zur kompakten Speicherung von P wird ausgenutzt, dass P viele identische Einträge der Form $\frac{1-d}{n}$ hat. Jede Zeile i von P sieht wie folgt aus:

- In jeder Spalte j mit $(i,j) \notin E$ steht der Wert $\frac{1-d}{n}$.
- In jeder Spalte j mit $(i,j) \in E$ steht der Wert $p_{i,j} = \frac{1-d}{n} + \frac{d}{a_i}$.

  Die Anzahl dieser Spalten j ist i.d.R. sehr klein (in der Größenordung 10–50), da jede einzelne Webseite i i.d.R. nur recht wenige Links enthält.

Eine kompakte Repräsentation, aus der wir für gegebenes i und j die Zahl $p_{i,j}$ leicht ausrechnen können, speichert folgende Werte:[3]

- Die Werte d und $\frac{1-d}{n}$, und
- für jede Zeile $i \in \{1, \ldots, n\}$
  (i.1): den Aus-Grad a_i des Knotens i und
  (i.2): die Liste aller Knoten j mit $(i, j) \in E$.

Der dafür benötigte Speicherplatz ist

$$O(1) \ + \ n \cdot \big(O(1) + O(a_i)\big) \quad = \quad O(|V| + |E|) \quad = \quad O(|G|)$$

Für den Web-Graphen G können wir davon ausgehen, dass die Knoten einen recht geringen Aus-Grad haben (in der Größenordnung 10 bis 50) und dass daher $|G| = O(|V|)$ ist, wobei der durch die O-Notation unterdrückte konstante Faktor ebenfalls in der Größenordnung 10 bis 50 liegt.

Parallelisierte Berechnung des Vektor-Matrix-Produkts

In jedem der $k \approx 75$ Iterationsschritte der Page-Rank-Berechnung muss für die Page-Rank-Matrix P und den Vektor $X^{(k)}$ das Vektor-Matrix-Produkt $X^{(k+1)} := X^{(k)} \cdot P$ berechnet werden. Wir betrachten nun, wie man einen einzelnen Iterationsschritt auf einem Rechnercluster durchführen kann und schreiben dabei $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, um den Vektor $X^{(k)}$ zu bezeichnen, und $Y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$ um den gesuchten Vektor $X^{(k+1)} := X^{(k)} \cdot P$ zu bezeichnen.

Erster Ansatz:

Wir gehen davon aus, dass für eine Zahl $L \geqslant 1$ im Rechnercluster L Rechner $R_1, \ldots, R_L$ zur Verfügung stehen. Die Matrix P teilen wir auf in L vertikale Streifen $P_1, \ldots, P_L$, so dass der Streifen P_1 die ersten $\frac{n}{L}$ Spalten von P enthält, der Streifen P_2 die nächsten $\frac{n}{L}$ Spalten von P enthält usw. Somit ist

$$P \quad = \quad \Big(P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_L\Big)$$

wobei P_s für jedes $s \in \{1, \ldots, L\}$ eine $(n \times \frac{n}{L})$-Matrix ist.

[3] Diese Repräsentation ist eine um die Werte d, $\frac{1-d}{n}$ und a_i angereichterte Adjazenzliste des Web-Graphen G.

Wir verteilen nun die Page-Rank-Matrix P und den Eingabe-Vektor Y so im Rechnercluster, dass für jedes $s \in \{1, \dots, \ell\}$ der Rechner R_s den Streifen P_s und den gesamten Vektor Y zur Verfügung hat.
Der Rechner R_s berechnet dann das Vektor-Matrix-Produkt $Z_s := Y \cdot P_s$.

Dann gilt: Für jedes $s \in \{1, \dots, L\}$ ist Z_s ein Vektor der Länge $\frac{n}{L}$; und der gesuchte Vektor $Y' = Y \cdot P$ ist gerade der Vektor $(Z_1, Z_2, \dots, Z_L)$.

Nachteil: In der in Abschnitt 1.7 dargestellten kompakten Repräsentation von P werden die Einträge der Page-Rank-Matrix allerdings *zeilenweise* gespeichert. Durch das Bilden von vertikalen Streifen der Matrix P können die Vorteile der kompakten Speicherung zu Nichte gemacht werden (im Extremfall besteht jeder Streifen aus genau einer Spalte von P).

Zweiter Ansatz:

Wir gehen davon aus, dass für eine Zahl $L = \ell^2$ im Rechencluster L Rechner $R_{s,t}$ für $s, t \in \{1, \dots, \ell\}$ zur Verfügung stehen. Die Matrix P teilen wir auf in ℓ^2 Blöcke $B_{s,t}$, so dass $B_{s,t}$ für jedes $s, t \in \{1, \dots, \ell\}$ eine $(\frac{n}{\ell} \times \frac{n}{\ell})$-Matrix ist. Somit ist

$$P \quad = \quad \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & \cdots & B_{1,\ell} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \cdots & B_{2,\ell} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} & \cdots & B_{3,\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{\ell,1} & B_{\ell,2} & B_{\ell,3} & \cdots & B_{\ell,\ell} \end{pmatrix}$$

Den Eingabevektor Y teilen wir auf in horizontale Streifen $Y_1, \dots, Y_\ell$, von denen jeder die Länge $\frac{n}{\ell}$ hat, d.h.

$$Y \quad = \quad \begin{pmatrix} Y_1 & Y_3 & Y_3 & \cdots & Y_\ell \end{pmatrix}$$

Wir verteilen nun die Page-Rank-Matrix P und den Eingabe-Vektor Y so im Rechencluster, dass für alle $s, t \in \{1, \dots, \ell\}$ der Rechner $R_{s,t}$ den Block $B_{s,t}$ sowie den Streifen Y_s erhält.
Der Rechner $R_{s,t}$ berechnet dann das Vektor-Matrix-Produkt $Z_{s,t} := Y_s \cdot B_{s,t}$ und schickt das Ergebnis $Z_{s,t}$ an den Rechner $R_{t,t}$ (insbesondere ist $Z_{s,t}$ ein Zeilenvektor der Länge $\frac{n}{\ell}$).
Der Rechner $R_{t,t}$ nimmt die Zwischenergebnisse $Z_{1,t}$, $Z_{2,t}$, $\dots$, $Z_{\ell,t}$ entgegen und berechnet deren Summe

$$Z_t \quad := \quad Z_{1,t} + Z_{2,t} + Z_{3,t} + \cdots + Z_{\ell,t}$$

Dann gilt: Für jedes $t \in \{1, \ldots, \ell\}$ ist Z_t ein Vektor der Länge $\frac{n}{\ell}$; und der gesuchte Vektor $Y' = Y \cdot P$ ist gerade der Vektor $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_\ell)$.

Im nächsten Iterationsschritt spielt dieser Vektor Y' die Rolle, die bisher der Vektor Y gespielt hat. Um die einzelnen Streifen von Y' an die richtigen Rechner zu verteilen, schickt (für jedes $t \in \{1, \ldots, \ell\}$) Rechner $R_{t,t}$ den Vektor Z_t (der im nächsten Iterationsschritt als Y_t fungiert) direkt an die Rechner $R_{t,1}$, $R_{t,2}$, $R_{t,3}$, ..., $R_{t,\ell}$.

Vorteil: Jeder Block $B_{s,t}$ der Page-Rank-Matrix kann ähnlich wie in Abschnitt 1.7 relativ kompakt gespeichert werden, indem für jede Zeile i von $B_{s,t}$ unter (i.2) nur diejenigen Knoten j mit $(i, j) \in E$ aufgelistet werden, die die Spalten von $B_{s,t}$ betreffen.

Übungsaufgabe:

Arbeiten Sie die Details dazu aus, wie das Vektor-Matrix-Produkt $Y' := Y \cdot P$ für die Page-Rank-Matrix P möglichst effizient mit Map-Reduce gelöst werden kann.

1.8 Literaturhinweise

Das Page-Rank-Verfahren wurde in der Arbeit [3] eingeführt. Zur weiteren Lektüre werden auch „Kapitel 2: Suchmaschinen“ des Vorlesungsskripts [12], „Chapter 5: Link Analysis“ des Buchs [9] und und „Chapter 5: Random Walks and Markov Chains“ des Buchs [2] empfohlen. Eine Algorithmen-orientierte Einführung in die Theorie der Markov-Ketten findet sich in dem Buch [6]. Einen Überblick über die Architektur von Suchmaschinen gibt der Artikel [1]; Details zum Page-Rank und zum HITS Verfahren finden sich in dem Buch [8] sowie in den Originalarbeiten [3, 11, 7, 4]. Als Einführung ins Thema *Information Retrieval* sei das Buch [10] empfohlen. Das Buch [5] ist ein „Klassiker“, der eine umfassende Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (und insbesondere auch ins Thema Markov-Ketten) gibt.
Viele Informationen und Literaturhinweise zum Thema *Suchmaschinen* finden sich auf der Webseite von Martin Sauerhoffs Vorlesung *Internet Algorithmen* an der TU Dortmund; siehe
`http://ls2-www.cs.uni-dortmund.de/lehre/winter200910/IntAlg/`.
Ein kurzer und allgemein verständlicher Überblick über das Page-Rank Verfahren wird in dem Spiegel-Online Artikel *Wie Google mit Milliarden Unbekannten rechnet* von Holger Dambeck gegeben; siehe `http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,646448,00.html`.

Quellennachweis: Teile dieses Kapitels orientieren sich an [12].

Literaturverzeichnis

[1] Arvind Arasu, Junghoo Cho, Hector Garcia-Molina, Andreas Paepcke, and Sriram Raghavan. Searching the web. *ACM Transactions on Internet Technology*, 1(1):2–43, 2001.

[2] Avrim Blum, John Hopcroft, and Ravindran Kannan. Foundations of data science. Vorabversion eines Lehrbuchs; erhältlich unter http://www.cs.cornell.edu/jeh/, Mai 2015.

[3] Sergey Brin and Lawrence Page. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer Networks*, 30(1-7):107–117, 1998.

[4] Ayman Farahat, Thomas LoFaro, Joel C. Miller, Gregory Rae, and Lesley A. Ward. Authority rankings from HITS, PageRank, and SALSA: Existence, uniqueness, and effect of initialization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(4):1181–1201, 2006.

[5] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications: Volume I.* Wiley, 3rd edition, 1968. ISBN: 978-0-471-25708-0.

[6] Olle Häggström. *Finite Markov chains and algorithmic applications.* Number 52 in London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2002. ISBN-10: 0521890012.

[7] Jon M. Kleinberg. Authoritative sources in a hyperlinked environment. *Journal of the ACM*, 46(5):604–632, 1999.

[8] Amy N. Langville and Carl D. Meyer. *Google's Pagerank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*. Princeton University Press, 2006.

[9] Jure Leskovec, Anand Rajamaran, and Jeffrey David Ullman. *Mining of Massive Datasets*. Cambridge University Press, 2. Auflage edition, 2014. Umfangreiche Informationen zum Buch sind unter http://www.mmds.org/ erhältlich.

[10] Christopher D. Manning, Prabhakar Raghavan, and Hinrich Schütze. *Introduction to Information Retrieval*. Cambridge University Press, 2008.

[11] Lawrence Page, Sergey Brin, Rajeev Motwani, and Terry Winograd. The PageRank citation ranking: Bringing order to the web. Technical Report 1999-66 (previous number: SIDL-WP-1999-0120), Stanford InfoLab, November 1999. The article is available from http://ilpubs.stanford.edu:8090/422/.

[12] Georg Schnitger. *Internet Algorithmen*. Skript zur Vorlesung am Institut für Informatik, Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2009.