Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

14. Juli 2016

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2016

Übungsblatt 10

Zu bearbeiten bis 21. Juli 2016

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines endlichen Automaten A entscheidet, ob die von A erkannte Sprache $L(A)$ kommutativ ist.

Hinweis: Es könnte helfen, den minimalen zu A äquivalenten DFA A' zu betrachten und sich zu überlegen, welche Eigenschaft A' haben muss, damit die Sprache $L(A')$ kommutativ ist.

Bemerkung: Mit dieser Aufgabe beweisen Sie, dass die in der Vorlesung gemachte Behauptung „Kommutativität regulärer Sprachen ist entscheidbar" wahr ist.

Aufgabe 2: **(30 Punkte)**

Sei $\sigma := \{<, +, C\}$, wobei $<$ ein 2-stelliges, $+$ ein 3-stelliges und C ein 1-stelliges Relationssymbol ist.

(a) Konstruieren Sie einen FO[σ]-Satz $\varphi_{C=Squares}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und alle $C' \subseteq [n]$ für die σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit Universum $[n]$ und $C^{\mathcal{A}} = C'$, bei der $<^{\mathcal{A}}$ und $+^{\mathcal{A}}$ auf die nahe liegende Art interpretiert werden, gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi_{C=Squares} \quad \iff \quad C^{\mathcal{A}} \;=\; \{i^2 : i \in \mathbb{N}\} \cap [n]\,.$$

(b) Konstruieren Sie eine FO[σ]-Formel $\psi(x, y)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und die σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit Universum $[n]$ und mit $C^{\mathcal{A}} = \{i^2 : i \in \mathbb{N}\} \cap [n]$, bei der $<^{\mathcal{A}}$ und $+^{\mathcal{A}}$ auf die nahe liegende Art interpretiert werden, Folgendes für alle $a, b \in [n]$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[a, b] \quad \iff \quad a^2 = b\,.$$

(c) Konstruieren Sie eine FO[σ]-Formel $\varphi'_\times(x, y, z)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und die σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit Universum $[n]$ und mit $C^{\mathcal{A}} = \{i^2 : i \in \mathbb{N}\} \cap [n]$, bei der $<^{\mathcal{A}}$ und $+^{\mathcal{A}}$ auf die nahe liegende Art interpretiert werden, Folgendes für alle $a, b, c \in [n]$ mit $a, b < \sqrt{n}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi'_\times[a, b, c] \quad \iff \quad a \cdot b = c\,.$$

… auf der Rückseite geht's weiter!

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Arbeiten Sie die noch fehlenden Details im Beweis des Satzes von Potthoff aus. D.h.:

(a) Konstruieren Sie einen FO$[E, D]$-Satz ψ, so dass für jede endliche $\{E, D\}$-Struktur $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \models \psi \iff$ es gibt einen endlichen Binärbaum T, so dass $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}_T$.

(b) Konstruieren Sie einen ordnungsinvarianten FO$[E, D, <]$-Satz φ_{even}, bei dem nicht nur für vollständige Binärbäume, sondern für *alle* endlichen Binärbäume T gilt: $\mathcal{A}_T \models \varphi_{even} \iff$ jedes Blatt von T hat gerade Höhe.

Mit *Binärbaum* ist hier ein Baum gemeint, bei dem jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau 2 Kinder hat.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Viel Spaß in den Semesterferien!