Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

7. Juli 2016

# Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2016

# Übungsblatt 9

*Zu bearbeiten bis 21. Juli 2016*

## Aufgabe 1: (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass in Definition 4.10 („Repräsentierbarkeit einer Funktion“) die Bedingung (1.2) bereits aus den Bedingungen (1.1) und (2) folgt, sofern $T \supseteq Q$ ist. D.h.:

Sei $T \supseteq Q$ eine Menge von $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Sätzen, sei $k \geqslant 1$, sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion, und sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ eine $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Formel, so dass gilt:

(1.1) Für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \ldots, m_k) = n$ gilt: $T \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

(2) Für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$T \models \forall y_1 \forall y_2 \Big( \big( \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_1) \land \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_2) \big) \to y_1 = y_2 \Big).$$

Zeigen Sie, dass dann auch Folgendes gilt:

(1.2) Für alle $m_1, \ldots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \ldots, m_k) \neq n$ gilt: $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

*Frage:* An welcher Stelle benutzt Ihr Beweis, dass $T \supseteq Q$ ist?

## Aufgabe 2: (25 Punkte)

Gilt auch die folgende Variante von Gödels 1. Unvollständigkeitssatz?

*Jede $\sigma_{\mathrm{Ar}}$-Theorie $T$, für die gilt*

*(1) $T$ ist widerspruchsfrei (d.h. erfüllbar)*

*(2) $T$ besitzt ein semi-entscheidbares Axiomensystem und*

*(3) $T \supseteq Q$*

*ist unvollständig (d.h. es gibt einen $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{Ar}}]$-Satz $\varphi$, so dass weder $\varphi$ noch $\neg\varphi$ aus $T$ folgt).*

Falls Ihre Antwort „ja“ ist, so beweisen Sie, dass Sie Recht haben; falls Ihre Antwort „nein“ ist, so zeigen Sie auf, welche Probleme entstehen, wenn man versucht, den in der Vorlesung behandelten Beweis von Gödels 1. Unvollständigkeitssatz auf die in dieser Aufgabe formulierte Variante zu übertragen.

*... auf der Rückseite geht's weiter!*

**Aufgabe 3:** **(25 Punkte)**

Beweisen Sie, dass die Menge aller erfüllbaren FO[$\sigma_{\mathrm{Ar}}$]-Sätze nicht rekursiv aufzählbar ist.

**Aufgabe 4:** **(25 Punkte)**

Sei $\sigma$ eine Signatur, sei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol, das nicht zu $\sigma$ gehört und sei $\sigma_{\leqslant} := \sigma \cup \{\leqslant\}$.

Sei $\mathscr{C}$ eine Klasse von $\sigma$-Strukturen. Ein FO[$\sigma_{\leqslant}$]-Satz $\varphi$ heißt *ordnungsinvariant auf* $\mathscr{C}$, falls für alle Strukturen $\mathcal{A} \in \mathscr{C}$ und alle linearen Ordnung $\leqslant_1$ und $\leqslant_2$ auf $A$ gilt:

$$(\mathcal{A}, \leqslant_1) \models \varphi \quad \iff \quad (\mathcal{A}, \leqslant_2) \models \varphi\,.$$

Mit "$(\mathcal{A}, \leqslant_i)$" (für $i \in \{1, 2\}$) ist hierbei die $\sigma_{\leqslant}$-Expansion $\mathcal{B}_i$ von $\mathcal{A}$ mit $\leqslant^{\mathcal{B}_i} = \leqslant_i$ gemeint.

Sei nun $\sigma := \{E\}$ für ein 2-stelliges Relationssymbol $E$ und sei $\mathscr{E}$ die Klasse aller *endlichen* $\sigma$-Strukturen. Zeigen Sie, dass das Problem

*Ordungsinvarianz auf* $\mathscr{E}$

Eingabe: ein FO[$\sigma_{\leqslant}$]-Satz $\varphi$

Frage: Ist $\varphi$ ordnungsinvariant auf $\mathscr{E}$?

nicht entscheidbar ist.