Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

30. Juni 2016

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2016

Übungsblatt 8

Zu bearbeiten bis 20. Juli 2016

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass es eine Σ_1-Formel φ gibt, so dass es keine zu $\neg\varphi$ bezüglich des Standardmodells $\mathcal{N}$ der Arithmetik äquivalente Σ_1-Formel gibt.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Sei $\mathcal{Z}$ die σ_{Ar}-Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$ und Konstanten $0^{\mathcal{Z}} = 0$ und $1^{\mathcal{Z}} = 1$, für die $\leqslant^{\mathcal{Z}}$, $+^{\mathcal{Z}}$ und $\cdot^{\mathcal{Z}}$ die natürliche lineare Ordnung, Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ sind.

Zeigen Sie: $\text{Th}(\mathcal{Z})$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Eine Signatur σ heißt *binär*, falls jedes Symbol in σ ein Relationssymbol der Stelligkeit 2 ist. Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Trakhtenbrot:

Es gibt eine endliche binäre Signatur $\hat{\sigma}$, so dass das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\hat{\sigma}]$ unentscheidbar ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation beliebiger σ-Strukturen durch kantengefärbte Graphen, repräsentiert durch Strukturen über einer geeigneten binären Signatur $\hat{\sigma}$. Benutzen Sie die in der Vorlesung für $\sigma := \tilde{\sigma}_{\text{Ar}} := \{\leqslant, R_+, R_\cdot, R_0, R_1\}$ bewiesene Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für $\text{FO}[\sigma]$-Sätze, um die Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für $\text{FO}[\hat{\sigma}]$-Sätze zu beweisen.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Trakhtenbrot:

Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{E\}$ die Signatur, die aus einem zweistelligen Relationssymbol E besteht. Das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma_{\text{Graph}}]$ ist unentscheidbar.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die in Aufgabe 3 bewiesene Aussage. Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation von Strukturen über einer binären Signatur σ durch gerichtete Graphen (d.h. σ_{Graph}-Strukturen).