

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2016

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten 30. Juni 2016

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Arbeiten Sie die Details zu Lemma 3.19 aus.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Betrachten Sie Turingmaschinen (siehe Abschnitt 3.3.2 im Skript), deren Zustandsmengen endliche Teilmengen von \mathbb{N} sind.

Geben Sie eine geeignete Gödelisierung für solche Turingmaschinen an. D.h. geben Sie eine berechenbare, injektive Funktion $\langle \cdot \rangle$ an, die jeder solchen Turingmaschine M eine natürliche Zahl $n_M := \langle M \rangle$ zuordnet.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Welche der folgenden Relationen bzw. partiellen Funktionen sind Σ_1 -definierbar, welche nicht? Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

- (a) $\exp: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\exp(a, b) := a^b$ (f.a. $a, b \in \mathbb{N}$)
- (b) $\text{Bit} := \{(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{das } i\text{-te Bit in der Binärdarstellung von } n \text{ ist } 1\}$
- (c) $H := \{n_M : M \text{ ist eine Turing-Maschine, deren Zustandsmenge eine endliche Teilmenge von } \mathbb{N} \text{ ist, die bei leerer Eingabe nach endlich vielen Schritten anhält}\}$
- (d) $\bar{H} := \mathbb{N} \setminus H$

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Beweisen Sie die Korrektheit der Aussage von Bemerkung 3.22, d.h. zeigen Sie:

- (a) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Eine partielle Funktion f von \mathbb{N}^k nach \mathbb{N} ist genau dann TM-berechenbar, wenn sie Σ_1 -definierbar ist.
- (b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann TM-rekursiv aufzählbar, wenn sie Σ_1 -definierbar ist.