

# Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2016

## Übungsblatt 7

*Zu bearbeiten 30. Juni 2016*

### Aufgabe 1: (25 Punkte)

Arbeiten Sie die Details zu Lemma 3.19 aus.

### Aufgabe 2: (25 Punkte)

Betrachten Sie Turingmaschinen (siehe Abschnitt 3.3.2 im Skript), deren Zustandsmengen endliche Teilmengen von  $\mathbb{N}$  sind.

Geben Sie eine geeignete Gödelisierung für solche Turingmaschinen an. D.h. geben Sie eine berechenbare, injektive Funktion  $\langle \cdot \rangle$  an, die jeder solchen Turingmaschine  $M$  eine natürliche Zahl  $n_M := \langle M \rangle$  zuordnet.

### Aufgabe 3: (25 Punkte)

Welche der folgenden Relationen bzw. partiellen Funktionen sind  $\Sigma_1$ -definierbar, welche nicht? Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

- (a)  $\exp: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\exp(a, b) := a^b$  (f.a.  $a, b \in \mathbb{N}$ )
- (b)  $\text{Bit} := \{(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{das } i\text{-te Bit in der Binärdarstellung von } n \text{ ist } 1\}$
- (c)  $H := \{n_M : M \text{ ist eine Turing-Maschine, deren Zustandsmenge eine endliche Teilmenge von } \mathbb{N} \text{ ist, die bei leerer Eingabe nach endlich vielen Schritten anhält}\}$
- (d)  $\bar{H} := \mathbb{N} \setminus H$

### Aufgabe 4: (25 Punkte)

Beweisen Sie die Korrektheit der Aussage von Bemerkung 3.22, d.h. zeigen Sie:

- (a) Sei  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Eine partielle Funktion  $f$  von  $\mathbb{N}^k$  nach  $\mathbb{N}$  ist genau dann TM-berechenbar, wenn sie  $\Sigma_1$ -definierbar ist.
- (b) Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Eine Relation  $R \subseteq \mathbb{N}^k$  ist genau dann TM-rekursiv aufzählbar, wenn sie  $\Sigma_1$ -definierbar ist.